

С·И·НОВОСЕЛОВ



**специальный
курс
тригонометрии**

С.И. НОВОСЕЛОВ

специальный курс тригонометрии

Издание пятое

Д о п у щ е н о

**Министерством высшего
и среднего специального
образования СССР в качестве
учебного пособия
для педагогических институтов
и государственных университетов**



**ИЗДАТЕЛЬСТВО
«ВЫСШАЯ ШКОЛА»
Москва — 1967**

Новоселов Сергей Иосифович

**СПЕЦИАЛЬНЫЙ КУРС
ТРИГОНОМЕТРИИ**

Редактор **А. И. Селиверстова**
Переплет художника **А. Е. Григорьева**
Технический редактор **В. А. Зорина**
Корректор **Р. И. Самофатова**

Т-02760. Сдано в набор 14/XII—65 г.
Подписано к печати 15/III—67 г.
Формат $60 \times 90^{1/16}$. Объем 33,5 печ. л.
Уч.-изд. л. 31,52. Изд. № ФМ—298
Тираж 30 000 экз. Цена 98 коп.

Тематический план издательства
«Высшая школа» (вузы и техникумы)
на 1966 г.

Позиция № 55
Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14,
Издательство «Высшая школа» З. 597

Московская типография № 4
Главполиграфпрома
Комитета по печати
при Совете Министров СССР,
Б. Переяславская, д. 46

ОГЛАВЛЕНИЕ

	<i>Стр</i>
Предисловие	3
Введение.	5
§ 1. О содержании курса тригонометрии	5
§ 2. Основные понятия теории проекций	7
§ 3. Углы и их измерение	11
§ 4. Координатная плоскость.	18
§ 5. О монотонных функциях	22
§ 6. Периодические функции	25
Г л а в а I. Тригонометрические функции и соотношения между ними	
§ 7. Тригонометрические функции угла	28
§ 8. Различные определения и интерпретации тригонометрических функций	33
§ 9. Аргумент тригонометрической функции	41
§ 10. Тригонометрические функции от некоторых частных значений аргумента.	45
§ 11. Четность и нечетность тригонометрических функций	48
§ 12. Нахождение угла (дуги) по данному значению его тригонометрической функции	49
§ 13. Соотношения между тригонометрическими функциями, тригонометрические тождества.	57
Г л а в а II. Аппарат тригонометрии	
§ 14. Теоремы сложения.	68
§ 15. Обобщение теорем сложения.	76
§ 16. Формулы приведения.	79
§ 17. Тригонометрические функции кратных дуг; полином Чебышева	84
§ 18. Формулы деления аргумента.	88
§ 19. Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму.	95
§ 20. Тригонометрические многочлены и их преобразование	97
§ 21. Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение.	101
§ 22. Примеры выполнения различных тригонометрических преобразований.	106
§ 23. Рационализирующие подстановки.	116
§ 24. Введение вспомогательных углов и тригонометрические подстановки.	123
§ 25. Вычисление некоторых тригонометрических сумм и произведений.	129

Г л а в а III. Исследование тригонометрических функций числового аргумента

§ 26. Области определения и множества значений тригонометрических функций.	148
§ 27. Периодичность тригонометрических функций.	150
§ 28. Интервалы знакопостоянства тригонометрических функций .	153
§ 29. Промежутки монотонности тригонометрических функций, наибольшие и наименьшие значения.	154
§ 30. Непрерывность тригонометрических функций.	168
§ 31. Графики тригонометрических функций	175
§ 32. Простейшие тригонометрические неравенства	179
§ 33. Неравенства, содержащие аргумент и его тригонометрические функции.	182
§ 34. Гармонические колебания.	190
§ 35. Примеры исследования функций и построений графиков . . .	200
§ 36. Трансцендентность тригонометрических функций	214

Г л а в а IV. Обратные тригонометрические функции

§ 37. Аркфункции.	216
§ 38. Тригонометрические операции над аркфункциями	229
§ 39. Соотношения между аркфункциями.	234
§ 40. Выполнение обратных тригонометрических операций над тригонометрическими функциями	240
§ 41. Формулы сложения.	246
§ 42. Примеры преобразования сумм аркфункций	254
§ 43. Некоторые свойства полиномов Чебышева	263

Г л а в а V. Уравнения и неравенства

§ 44. Тригонометрические уравнения.	269
§ 45. Об особых случаях решения уравнений	274
§ 46. Соотношения между двумя дугами, имеющими одинаковое значение данной тригонометрической функции	276
§ 47. Решение уравнений посредством подстановок	281
§ 48. Рационализирующие подстановки.	283
§ 49. О преобразовании формул общего решения тригонометрического уравнения.	288
§ 50. Различные частные приемы решений тригонометрических уравнений.	294
§ 51. Тригонометрические уравнения, содержащие параметры . . .	308
§ 52. Некоторые системы тригонометрических уравнений и методы их решения	320
§ 53. Уравнения, содержащие неизвестные под знаками аркфункций	327
§ 54. Примеры решения некоторых трансцендентных уравнений .	337
§ 55. Приемы решения тригонометрических и некоторых других трансцендентных неравенств	342
§ 56. О приближенном решении трансцендентных уравнений	357

Г л а в а VI. Вычисление элементов геометрических фигур; применения тригонометрии

§ 57. Общие понятия.	360
§ 58. Соотношения между основными элементами треугольника .	361
§ 59. Тригонометрические тождества и неравенства, имеющие место для углов треугольника	367
§ 60. Элементы различных измерений.	372
§ 61. Соотношения между различными элементами треугольника	374
§ 62. Ряд равных отношений.	380

§ 63.	Общий принцип Торопова решения треугольников	385
§ 64.	Основные случаи решения треугольников.	388
§ 65.	Неосновные случаи решения треугольников.	394
§ 66.	О применениях тригонометрии к геометрии	400
§ 67.	О задачах на решение многоугольников	404
§ 68.	Применение тригонометрии к стереометрическим задачам	411
§ 69.	Понятие о геодезических задачах	425
§ 70.	О применениях тригонометрии к физике, механике, технике	431
§ 71.	Вычисления при помощи тригонометрических таблиц	435

Г л а в а VII. Элементы сферической тригонометрии

§ 72.	Основные понятия.	446
§ 73.	Соотношения между основными элементами сферического треугольника.	451
§ 74.	Соотношения между элементами прямоугольного треугольника	456
§ 75.	Решение прямоугольных треугольников.	458
§ 76.	Понятие о решении косоугольных сферических треугольников	463
§ 77.	Формулы эксцесса и площади сферического треугольника . .	469
§ 78.	О различных применениях сферической тригонометрии . . .	471

Г л а в а VIII. Аналитическая теория тригонометрических функций

§ 79.	Определение тригонометрических функций при помощи степенных рядов.	477
§ 80.	Вычисление значений тригонометрических функций аналитическими средствами.	485
§ 81.	Аксиоматический метод в тригонометрии	487
§ 82.	Теорема единственности.	491
§ 83.	Различные конкретные определения тригонометрических функций.	495
§ 84.	О различных способах построения теории тригонометрических функций	503

Г л а в а IX. Элементарные трансцендентные функции над полем комплексных чисел

§ 85.	Показательная функция над полем комплексных чисел и ее связь с тригонометрическими функциями.	509
§ 86.	Тригонометрические функции от комплексного аргумента . . .	514
§ 87.	Логарифмическая функция.	520
§ 88.	Обратные тригонометрические функции от комплексного аргумента.	524
§ 89.	Степенная, общая показательная и общая логарифмическая функции.	529



Настоящая книга предназначена в качестве учебного пособия для физико-математических факультетов педагогических институтов и университетов по разделу «Тригонометрия» — специального курса элементарной математики. При написании настоящей книги я руководствовался теми же принципами, которые положены в основу моей книги «Специальный курс элементарной алгебры» и которые подробно высказаны мною в предисловии к упомянутой книге.

Едва ли нужно доказывать необходимость углубленного и систематического изучения студентами элементарной математики, т. е. той дисциплины, которую они станут преподавать в школе. Различные курсы «высшей» математики, при всем их огромном значении, не могут сами по себе обеспечить необходимой профессиональной подготовки будущего учителя.

Было бы ошибкой думать, что студент изучает элементарную математику только лишь при прохождении дисциплины, значащейся в учебном плане под названием «Специальный курс элементарной математики». Эта дисциплина содержит лишь сравнительно немногие основные вопросы элементарной математики, изучаемые в их взаимной связи и в связи с дисциплинами «высшей» математики. Изучение методики математики, прохождение педагогической практики и работа в специальных семинарах требуют от студента серьезного самостоятельного изучения элементарной математики. По этой причине учебная литература по элементарной математике, как я полагаю, не может строго ограничиваться рамками программы «Специального курса», а должна содержать систематическое, углубленное, научно обоснованное и полное изложение элементарной математики. В учебниках и пособиях по элементарной математике студент должен находить ответы на самые разнообразные вопросы, которые могут у него возникнуть по содержанию школьного курса математики. Эти соображения и побудили меня при написании настоящей книги дать достаточно полное изложение тригонометрии, тогда как в программе «Специального курса» вопросы тригонометрии занимают сравнительно небольшой удельный вес.

Настоящую книгу следует рассматривать как продолжение моей книги «Специальный курс элементарной алгебры», поэтому вопросы (например, общие положения теории уравнений и неравенств), содержащиеся в указанной книге и необходимые для тех или иных разделов курса тригонометрии, в тексте не излагаются, а делаются ссылки на соответствующие параграфы «Специального курса элементарной алгебры» (изд. начиная с 1956 г.).

Последняя IX глава настоящей книги содержит основы теории элементарных трансцендентных функций над полем комплексных чисел, т. е. материал, не относящийся с о б с т в е н н о к тригонометрии. Этот материал отнесен мною к курсу тригонометрии потому, что невозможно изучать показательную, логарифмическую, тригонометрические и обратные тригонометрические функции н а д п о л е м к о м п л е к с н ы х ч и с е л независимо друг от друга.

В четвертом издании книга подверглась переработке, которая в основном выражается в следующем:

I. Структура курса приближена к структуре современного школьного курса тригонометрии.

а) Учение о тригонометрических функциях последовательно излагается на координатной основе.

б) Теоремы сложения и их следствия используются в качестве аппарата для исследования тригонометрических функций.

с) Материал, посвященный исследованию тригонометрических функций, выделен в особую главу.

д) Расширен вопрос о гармонических колебаниях, как имеющий важное прикладное значение.

II. Учтены требования современной программы педагогических институтов.

а) Аналитические определения тригонометрических функций при помощи степенных рядов даны независимо от аксиоматического определения.

б) Введено интегральное представление обратных тригонометрических функций.

III. Несколько изменено расположение глав: глава «Элементы сферической тригонометрии» непосредственно следует за главой «Вычисление элементов геометрических фигур». Такое расположение в большей степени соответствует логике предмета.

IV. Внесены отдельные изменения, улучшающие (по мнению автора) изложение. Так, например, в большей мере систематизирован подбор примеров на тригонометрические уравнения, уравнения, содержащие параметры, рассмотрены особо, уточнен вопрос об исследовании вычислительных задач, исключены некоторые второстепенные детали и т. п.

В настоящем издании исправлен ряд погрешностей и в отдельных местах уточнен текст.

Выражаю благодарность П. С. Моденову за ценные советы, которыми я пользовался при составлении книги.

Автор

§ 1. О содержании курса тригонометрии

Возникновение тригонометрии обусловлено потребностями вычислительной практики, а именно, *необходимостью создания аппарата для вычисления элементов различных геометрических фигур по достаточному количеству их заданных элементов*. Еще в древней Греции, в связи с решением ряда вычислительных астрономических задач, тригонометрия достигла значительного развития. Основоположное значение в формировании тригонометрии как самостоятельной науки имели труды среднеазиатских ученых IX—XIII вв. Хотя тригонометрия и получила самостоятельное значение как научная дисциплина, располагающая собственными методами исследования, все же ее конечная цель усматривалась в выработке методов вычисления элементов «простейших» геометрических фигур: плоских и сферических треугольников. В основу учения о тригонометрических функциях неизменно полагались геометрические построения; установленные геометрически алгебраические соотношения между тригонометрическими функциями позволили применять алгебраические методы к исследованию этих функций, к выполнению преобразований, к установлению различных соотношений между элементами геометрических фигур. Так сложился своеобразный характер тригонометрии, основывающейся на геометрии и вместе с тем широко применяющей алгебраические методы.

Дальнейшее развитие науки показало, что значение тригонометрических функций заключается не только в выработке аппарата, для решения вычислительных геометрических задач; эти функции получили важное значение в механике и физике при исследовании периодических процессов. Таким образом, теория тригонометрических функций получила самостоятельное значение, и возникла потребность в аналитическом построении этой теории, не опирающемся на геометрию.

Начала аналитической теории тригонометрических функций были положены трудами великого ученого, члена Петербургской Академии наук Л. Эй л е р а.

Поставив задачу определить тригонометрические функции независимо от евклидовой геометрической системы, великий русский математик Н. И. Л о б а ч е в с к и й создал аналитическую теорию этих функций, в основу которой был положен аппарат степенных рядов.

В настоящее время тригонометрия как самостоятельная наука не существует: вопросы, связанные с вычислением элементов геометрических фигур, относятся к геометрии, здесь тригонометрия выполняет «служебную» роль; с другой стороны, аналитическая теория тригонометрических функций включилась в ту главу математического анализа, которая посвящается общей теории элементарных функций. Несмотря на то, что в настоящее время тригонометрия перестала существовать как самостоятельная наука, *она продолжает оставаться весьма важной самостоятельной учебной дисциплиной*. В школьном курсе математики тригонометрия по справедливости имеет значительный удельный вес.

Поскольку достаточно развитый аналитический аппарат, необходимый для построения аналитической теории тригонометрических функций, далеко выходит за пределы программы, *школьный курс тригонометрии неизбежно строится на геометрической основе*. Кроме того, геометрическая теория тригонометрических функций в большей степени соответствует практическим приложениям тригонометрии.

В современном школьном курсе тригонометрии находят отражение две линии, а именно: функциональная и вычислительная. Первая линия, выражающаяся в исследовании тригонометрических функций как функций числового аргумента, имеет важное принципиальное значение, поскольку эти функции играют существенную роль в современном математическом анализе, физике, механике, технике. Вторая линия, выражающаяся в вычислении элементов геометрических фигур, имеет важное практическое значение, как дающая вычислительные средства, необходимые для геометрии, физики, техники, астрономии, геодезии и т. д.*.

* Правильное сочетание в школьном курсе обеих указанных линий есть задача методики математики. Заметим лишь, что нижеследующие две крайние точки зрения в равной мере являются порочными.

Первая крайность выражается в игнорировании функциональной линии и в сведении тригонометрии лишь к «решению треугольников».

Другая крайность выражается в игнорировании вычислительной линии. Решение треугольников, изучаемое в тригонометрии, имеет существенное значение и поскольку к вычислению элементов треугольников обычно сводится решение различных вычислительных планиметрических и стереометрических задач. Пренебрежительное отношение к разделу, дающему вычислительные средства для геометрии, физики, механики, астрономии и т. д., глубоко ошибочно.

В соответствии с общими задачами специального курса элементарной математики педагогических институтов и университетов, специальный курс тригонометрии ставит своей целью углубление, развитие и научное обоснование школьного курса тригонометрии, а также знакомство с практическими приложениями тригонометрии. Специальный курс тригонометрии охватывает в расширенном изложении все вопросы школьного курса, а потому имеет, наряду с прочими разделами специального курса элементарной математики, весьма важное значение с точки зрения профессиональной подготовки учителя школы.

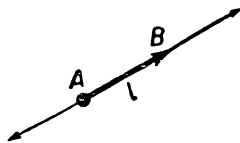
В настоящей вводной главе в конспективном изложении и указаны те сведения, которые будут считаться известными из прочих дисциплин, изучающихся в педагогических институтах и университетах, и которые послужат основанием для изложения курса тригонометрии в последующих главах.

§ 2. Основные понятия теории проекций

Чтобы отрезку, ограниченному точками A и B , приписать направление, его граничные точки A и B задаются в определенном порядке; первая точка (пишется на первом месте) называется *началом* отрезка, вторая (пишется на втором месте) — его *концом* (черт. 1). *Направленный отрезок называется вектором*.



Черт. 1



Черт. 2

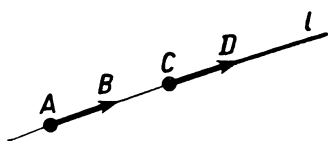
В кинематической интерпретации вектор $\overrightarrow{AB}$ рассматривается как путь, пройденный прямолинейно движущейся точкой от начального положения A до конечного положения B .

Пусть $\overrightarrow{AB}$ — данный вектор; прямая l , проходящая через точки A и B , содержит все точки отрезка AB . Начальная точка A вектора $\overrightarrow{AB}$ делит прямую l на два луча, один из которых содержит конец B вектора, говорят, что этот луч *одинаково направлен* с вектором $\overrightarrow{AB}$; другой луч не содержит точку B ; говорят, что этот второй луч *противоположно направлен* с вектором $\overrightarrow{AB}$ (через 2).

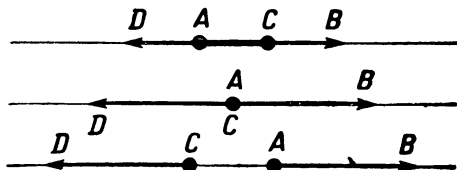
Если точки A и B совпадают, то говорят, что $\overrightarrow{AB}$ есть *нулевой вектор*.

Примем некоторый отрезок e за единицу длины. Длина отрезка AB (при данной единице измерения) называется длиной или **модулем** вектора $\overrightarrow{AB}$. Модуль вектора будем обозначать так: $|\overrightarrow{AB}|$.

Пусть $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ — два вектора, расположенные на одной прямой l , причем каждый из них отличен от нуль-вектора; эти векторы могут быть либо **одинаково** направлены, либо **противоположно** направлены. Это означает следующее: в первом случае луч прямой l , одинаково направленный с $\overrightarrow{AB}$, и луч, одинаково направленный с $\overrightarrow{CD}$, имеют общую часть, являющуюся также **лучом** прямой l (черт. 3); во втором случае общей частью этих двух лучей является либо отрезок, либо точка (общее начало), либо пустое множество (лучи не имеют общей части) (черт. 4).

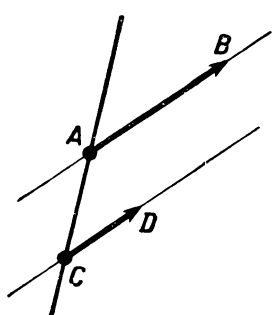


Черт. 3

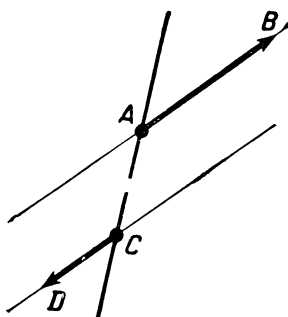


Черт. 4

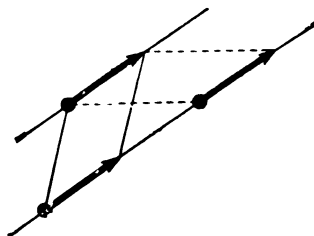
Пусть $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ — два параллельных вектора, каждый из которых отличен от нуль-вектора; векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ могут быть направлены либо **одинаково**, либо **противоположно**. Это означает следующее: в первом случае концы B и D данных векторов расположены на плоскости **по одну сторону** относительно прямой AC , соединяющей их начала (черт. 5), во втором случае точки B и D расположены **по разные стороны** относительно прямой AC (черт. 6).



Черт. 5



Черт. 6

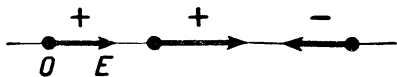


Черт. 7

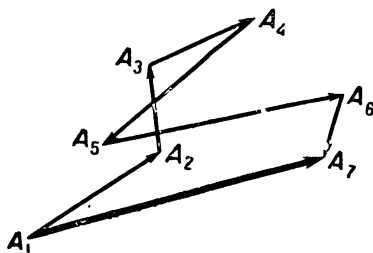
Два вектора считаются равными тогда и только тогда, когда они параллельны или лежат на одной прямой, одинаково направлены и равны по длине (черт. 7).

Замена вектора вектором, ему равным, называется **переносом вектора**.

Пусть l — данная прямая, на которой заданы две точки: начальная точка O и единичная точка E , так что отрезок OE по длине равен 1. Заданием точек O и E устанавливается положительное направление на прямой: всякий отличный от нуля вектор на прямой l считается положительно (отрицательно) направленным, если его направление одинаково (противоположно) с направлением единичного вектора OE (черт. 8).



Черт. 8



Черт. 9

Нуль-вектору не приписывается никакого направления.

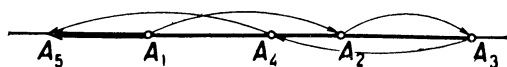
Прямая, на которой установлено положительное направление и выбран единичный отрезок, называется осью.

Пусть AB — вектор, расположенный на оси l ; величиной вектора будем называть его длину, если он имеет положительное направление, его длину, взятую со знаком, — если он имеет отрицательное направление; величина нуль-вектора считается равной нулю. Величину вектора AB будем обозначать так: AB .

Сложение векторов производится по следующему правилу: *чтобы сложить данные векторы, следует приложить (посредством переноса) начало второго вектора к концу первого, начало третьего к концу второго и так далее и построить вектор, соединяющий начало первого слагаемого с концом последнего.*

Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}$ — данные точки; тогда, согласно изложенному правилу сложения векторов, имеем

$$A_1 A_2 + A_2 A_3 + \dots + A_n A_{n+1} = A_1 A_{n+1}. \quad (\text{черт. 9})$$



Черт. 10

Правило применимо, в частности, если точки $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ расположены на одной прямой (черт. 10, $n = 4$). Если $a_1, a_2, \dots, a_n$

суть величины векторов $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_{n+1}$, расположенных на оси, то *величина вектора-суммы равна сумме величин векторов-слагаемых*:

$$A_1 A_{n+1} = A_1 A_2 + A_2 A_3 + \dots + A_n A_{n+1},$$

или

$$A_1 A_{n+1} = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

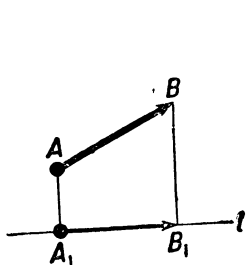
Это последнее равенство устанавливается в геометрии для случая двух слагаемых путем непосредственного рассмотрения всех возможных взаимных расположений (десять случаев) точек A_1, A_2, A_3 (теорема Ш а л я) и распространяется для произвольного числа слагаемых методом математической индукции.

Как известно:

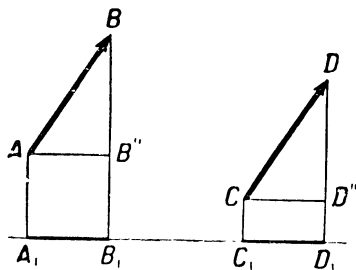
1°. *проекцией точки А на ось 1 называется основание A_1 перпендикуляра, опущенного из точки А на ось 1.*

2°. *проекцией вектора АВ называется величина вектора A_1B_1 , соединяющего проекцию начала вектора с проекцией его конца*

$$\text{пр}_1 \mathbf{AB} = A_1 B_1. \quad (\text{черт. 11})$$



Черт. 11



Черт. 12

Ради краткости, нередко как величину A_1B_1 вектора A_1B_1 , так и сам вектор A_1B_1 называют общим термином *п р о е к ц и я*.

При параллельном переносе вектора его проекция на данную ось не меняется: если $AB = CD$, то и $A_1B_1 = C_1D_1$ (черт. 12).

Пусть $A_1A_2 \dots A_{n+1}$ — произвольная ломаная линия, расположенная на плоскости. Звенья этой ломаной будем рассматривать как векторы $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_n A_{n+1}$, направления которых определяются порядком задания вершин. Вектор-сумма

$$A_1 A_{n+1} = A_1 A_2 + A_2 A_3 + \dots + A_n A_{n+1}$$

называется также *з а м ы к а ю щ е й* данной ломаной. Имеет место следующая основная теорема о проекции ломаной (черт. 13).

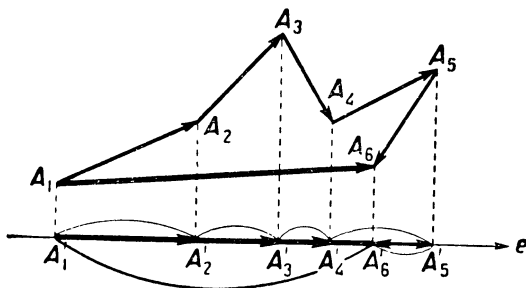
Теорема. *Сумма проекций на ось звеньев ломаной равна проекции на ту же ось замыкающей; или в другой формулировке: проекция вектора-суммы равна сумме проекций векторов-слагаемых.*

В самом деле, пусть $A'_1, A'_2, \dots, A'_n, A'_{n+1}$ — проекции вершин данной ломаной на ось l (черт. 13); при любом расположении точек A'_i имеем

$$A'_1 A'_{n+1} = A'_1 A'_2 + A'_2 A'_3 + \dots + A'_n A'_{n+1}$$

или, что то же,

$$\text{пр } A_1 A_{n+1} = \text{пр } A_1 A_2 + \text{пр } A_2 A_3 + \dots + \text{пр } A_n A_{n+1}.$$

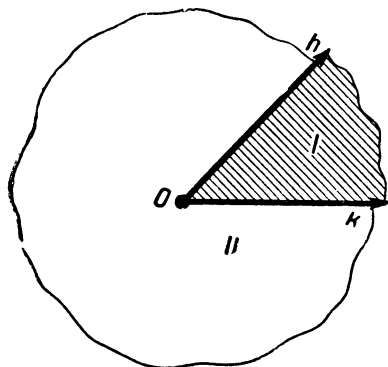


Черт. 13

В частности, если точки A_1 и A_{n+1} совпадают, то данная ломаная замкнутая; замыкающая есть нуль-вектор, а потому *сумма проекций на ось звеньев замкнутой ломаной линии равна нулю*.

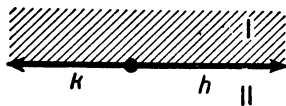
§ 3. Углы и их измерение

Пусть дана пара несовпадающих лучей h и k , исходящих из одной точки O . Эта пара лучей делит плоскость на две части, одна из которых (в общем случае) является *выпуклой*, а другая не является выпуклой (черт. 14)*.



Черт. 14

Исключение имеет место лишь тогда, когда лучи h и k составляют одну прямую, в этом последнем случае обе части плоской (полуплоскости) выпуклы (черт. 15).



Черт. 15

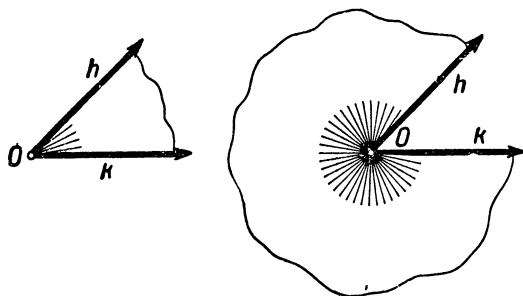
* Часть плоскости называется выпуклой, если, каковы бы ни были две точки, ей принадлежащие, отрезок, соединяющий эти точки, также принадлежит рассматриваемой части.

В геометрии углом называется *система двух различных лучей h и k , исходящих из одной точки O , причем указывается, какая из двух частей, на которые делится плоскость данными лучами, считается внутренней относительно угла*. Эта часть плоскости называется *внутренней областью угла*, другая часть плоскости — *внешней областью*, лучи h и k — *сторонами*, а точка O — *вершиной угла*.

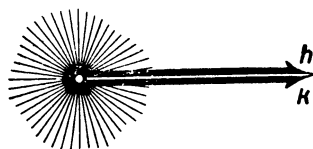
Иногда углом называют не только систему двух лучей h и k , но и *часть плоскости, которую составляет внутренняя область угла вместе с его сторонами*.

В тригонометрии под углом будем понимать *множество всех лучей, исходящих из некоторой точки O и расположенных во внутренней области некоторого угла с вершиной в точке O , вместе с его сторонами h и k* (черт. 16). Это соответствует кинематическому представлению угла как «пути», описанного лучом, вращающимся в плоскости вокруг точки O ; при этом стороны h и k суть начальное и конечное положения вращающегося луча, а прочие «внутренние» лучи суть его промежуточные положения.

Два различных луча h и k , исходящие из точки O , определяют два угла; внутренняя область для одного из них является внешней для другого; эти углы будем называть *взаимно дополнительными*.



Черт 16



Черт. 17

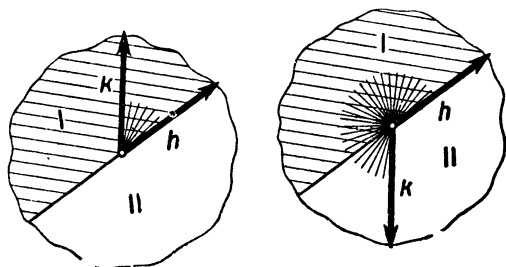
Если лучи h и k совпадают, то в этом случае также говорят о двух взаимно дополнительных углах; один из этих углов нулевой, для него внутренняя область есть *пустое множество*; внутренняя область другого угла есть *вся плоскость* за вычетом луча $h = k$; этот последний угол называется *полным* (черт. 17).

Рассмотрим один из лучей, например h , ограничивающих данный угол, который предполагается отличным от нулевого и от полного. Если продолжить луч h (за точку O), то плоскость полученной прямой на две части — *полуплоскости*. Одна из этих полуплоскостей *либо содержит внутреннюю область данного угла, либо сама содержится в этой области*; другая полуплоскость *либо содер-*

жит внутреннюю область дополнительного угла, либо сама содержится в этой области (черт. 18).

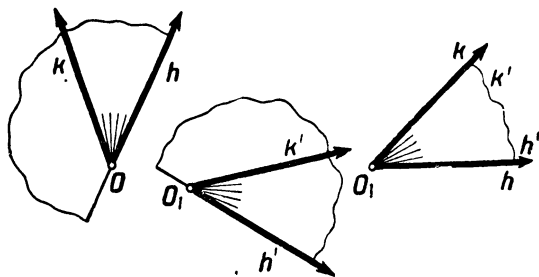
Будем говорить, что полуплоскость I располагается во внутреннем направлении, а полуплоскость II — во внешнем направлении относительно стороны h данного угла.

Для нулевого угла понятие полуплоскости, расположенной во внутреннем направлении, не имеет смысла. Для полного угла следует дать специальное указание, какая именно из полуплоскостей считается расположенной во внутреннем направлении.



Черт. 18

Пусть O и O' — вершины двух углов на плоскости, а h, k и h', k' — их стороны. Совместим две какие-либо стороны, например h и h' , этих углов так, чтобы совпали и полуплоскости, расположенные во внутреннем направлении относительно этих сторон*. Иными словами, приложим углы друг к другу сторонами h и h' так, чтобы совпали и полуплоскости, расположенные во внутреннем направлении. Если при таком совмещении совместятся стороны k и k' (черт. 19), то углы $\angle(h, k)$ и $\angle(h', k')$ равны (конгруэнтны), если же стороны k и k' не совместятся, то углы не равны. Пусть, например, сторона k' окажется во



Черт. 19

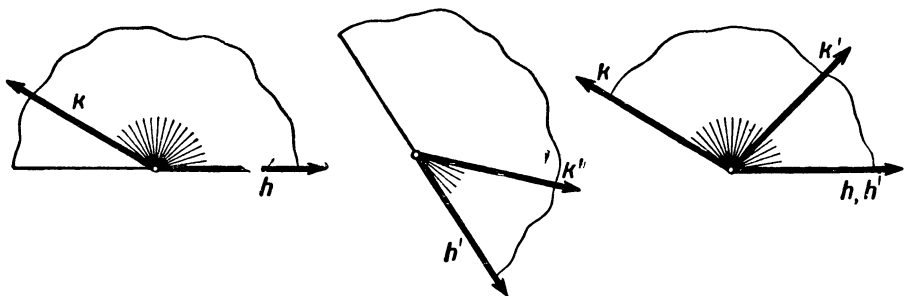
внутренней области угла $\angle(h, k)$, тогда (черт. 20) $\angle(h, k) > \angle(h', k')$, при этом угол $\angle(h, k)$ рассматривается как сумма угла $\angle(h', k')$ и угла $\angle(k', k)$, где внутренней областью угла $\angle(k', k)$ считается та

* Для этого совмещения возможно пользоваться как движением, так и отражением, «переворачиванием» плоскости.

часть плоскости, которая содержится внутри угла $\angle(h, k)$. Таким образом, имеем

$$\angle(h, k) = \angle(h, k') + \angle(k', k).$$

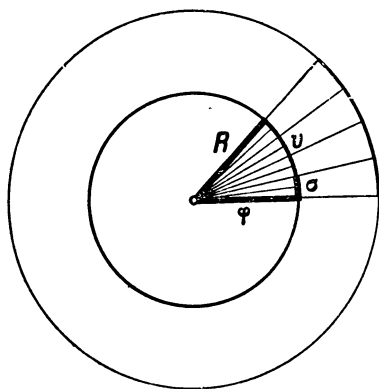
Измерение углов производится по общим принципам измерения скалярных величин. Приняв некоторый угол за единицу измерения, относят всякому ненулевому углу положительное число — его меру,



Черт. 20

или величину. При этом, как обычно, *равные углы имеют равную величину; величина суммы двух углов равна сумме их величин (аддитивность меры); величина угла, принятого за единицу измерения, равна 1; величина нулевого угла равна 0.*

Рассмотрим окружность произвольного радиуса R с центром в вершине данного угла φ . Внутренняя область угла φ отсекает на



Черт. 21

окружности дугу v (черт. 21); говорят, что данный угол φ опирается на эту дугу. Пусть σ — дуга, на которую опирается угол, принятый за единицу измерения. Отношение $\frac{v}{\sigma}$ длины дуги v к длине ду-

ги σ не зависит от радиуса R окружности, так как при изменении R секторы окружности радиуса R заменяются подобными секторами, и отношение длин соответствующих элементов в обеих конфигурациях одинаково. Примем дугу σ за единицу измерения дуг данной окружности, тогда величина угла φ

и величина дуги v (измеренная в принятой единице) выражаются одним и тем же числом.

Таким образом, дуги окружности и опирающиеся на них центральные углы можно поставить во взаимно однозначное соответствие,

при этом соответственные угол и дуга измеряются одним и тем же числом в угловой и соответственной ей дуговой единице.

В вычислительной практике обычно за единицу измерения углов принимают угол, равный $\frac{1}{360}$ части полного угла, этот угол называется г р а д у с о м. Нередко в элементарной геометрии величина угла выражается «в долях d » — это значит, что за единицу измерения принимается прямой угол. В математическом анализе и в различных теоретических рассуждениях за единицу измерения углов (или дуг) принимается р а д и а н (дуговой радиан). Введение радианной меры основано на следующем предложении.

Отношение длины дуги окружности, на которую данный угол, как центральный, опирается, к радиусу окружности не зависит от величины радиуса и определяется данным углом.

В самом деле, при изменении радиуса это отношение, будучи отношением сходственных линий в подобных фигурах (дуги и радиусы, ограничивающие подобные секторы) (см. черт. 21), не меняется.

Радианной мерой угла (и соответствующей дуги) называется отношение длины дуги, для которой данный угол ϕ является центральным, к ее (дуги) радиусу.

В радианном измерении за единицу измерения углов принимается угол (центральный), опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу. Этот угол называется у г л о в ы м р а д и а н о м, а соответствующая дуга — д у г о в ы м р а д и а н о м. При обозначении радианной меры не принято ставить наименование единицы измерения.

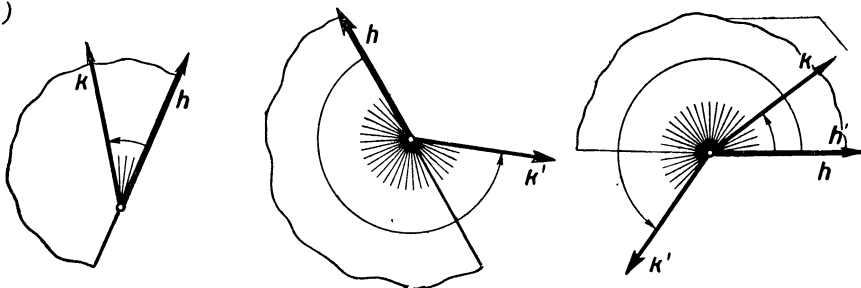
Введение радианной меры целесообразно при изучении тригонометрических функций числового аргумента средствами математического анализа; градусное измерение углов и дуг удобно на практике тем, что в нем единица измерения (градус) с о и з м е р и м а с полным оборотом.

Углы и дуги можно рассматривать как н а п р а в л е н н ы е величины (в предыдущих рассуждениях мы рассматривали их как величины ненаправленные). Чтобы ненулевому углу со сторонами h и k придать направление, стороны h и k задаются в определенном порядке, первая сторона (пишется на первом месте) называется н а ч а л ь н о й, а вторая (пишется на втором месте) — к о н е ч н о й сторонами данного угла. С кинематической точки зрения н а п р а в л е н н ы й угол можно представить себе, как «путь», описанный лучом, вращающимся вокруг точки (вершины угла) в о п р е д е л е н н о м н а п р а в л е н и и; начальная и конечная стороны угла суть начальное и конечное положения этого луча. Для обозначения направленного угла на чертежах ставят стрелку в направлении от начальной стороны к конечной.

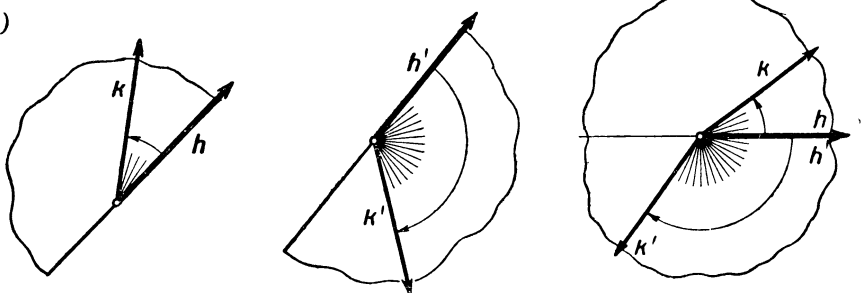
Пусть $\angle(h, k)$ и $\angle(h', k')$ — два направленных угла на плоскости; при помощи движения п е р в о г о р о д а («переворачивание» плоскости не допускается) можно совместить их начальные

стороны, тогда полуплоскости, расположенные во внутреннем направлении относительно начальных сторон данных углов, либо совместятся (черт. 22, а), либо не совместятся (черт. 22, б), оказавшись по разные стороны от прямой, на которой будут лежать лучи h и h' после их совмещения. В первом случае углы $\angle(h, k)$ и $\angle(h', k')$ называются *о д и н а к о в о* направленными (или ориентированными), а во втором — *противоположно направленными* *.

а)



б)



Черт. 22

Будем считать некоторый данный направленный угол на плоскости *п о л о ж и т е л ь н о* направленным; говорят, что тем самым на плоскости *задается положительное направление вращения*.

* Таким образом, одинаковая или противоположная ориентация углов различается по тому, каким движением первого или второго рода могут быть совмещены начальные стороны и полуплоскости, расположенные во внутреннем направлении относительно этих сторон. В элементарной геометрии считается *о ч е в и д н ы м*, что совмещение двух конгруэнтных фигур может осуществляться либо движением в плоскости без «переворачивания» (движение первого рода), либо, кроме того, для совмещения необходимо «перевернуть» плоскость «другой стороной». В основаниях геометрии, напротив, понятие одинаковой и противоположной ориентации предшествуют различию движений на движения первого и второго рода. Первое определяется как движение, *с о х р а н я ю щ е е* ориентацию треугольника, второе — как изменяющее ее на *п р о т и в о п о л о ж н у ю*. Не имея возможности входить в подробности, относящиеся к основаниям геометрии, в тексте мы сформулировали лишь окончательный результат, который получится после обоснования понятия двух родов движения.

Плоскость, на которой задано положительное направление вращения, называется *ориентированной* плоскостью. *Всякий угол, одинаково направленный с данным, также называется положительно направленным; всякий угол, противоположно направленный с данным, называется отрицательно направленным. Нулевому углу не приписывается никакого направления.*

При измерении углов на ориентированной плоскости принимают некоторый положительно направленный угол за единицу измерения. Если данный угол положительно направлен, то его величиной считается *положительное* число, равное результату измерения; если данный угол *отрицательно* направлен, то его величиной считается отрицательное число, равное результату измерения, взятому со знаком минус.

Практические потребности физики, механики, техники приводят к необходимости дальнейшего расширения понятия угла. Углы, которые мы рассматривали в предыдущих рассуждениях, по абсолютной величине не могли превосходить полного угла. С кинематической точки зрения полный (положительный или отрицательный) угол есть «путь», пройденный вращающимся около точки лучом, который, описав в плоскости полный оборот (в положительном или отрицательном направлении), вернулся в первоначальное положение. Винт, пропеллер самолета, маховое колесо машины и т. п. могут совершать любое количество полных оборотов в том или ином направлении. Исходя из сказанного, считают, что *всякое действительное число (при выбранной единице измерения углов) взаимно однозначно определяет некоторый угол*. Примем для определенности радианную систему измерения углов. Пусть φ — данное положительное число; если $\varphi \leq 2\pi$, то это число определяет тот угол, который им измеряется; если $\varphi > 2\pi$, то представим φ в виде суммы

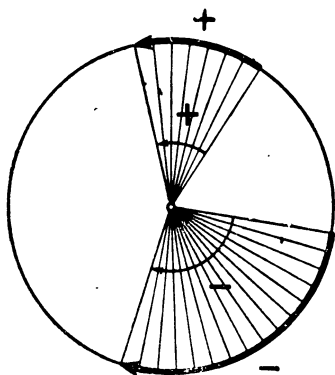
$$\varphi = 2k\pi + \alpha,$$

где $0 \leq \alpha < 2\pi$, а k — целое положительное число (это представление единственно). Тогда рассматриваем угол, определяемый числом φ , как состоящий из k положительных полных углов и угла α . Аналогично, если φ — отрицательное число и $|\varphi| > 2\pi$, то можно представить φ в том же виде $\varphi = 2k\pi + \alpha$, где $-2\pi < \alpha \leq 0$, а k — целое отрицательное число; в таком случае рассматриваем угол φ , как состоящий из k отрицательных полных углов и угла α .

Итак, *введение в рассмотрение углов любой величины позволяет поставить во взаимно однозначное соответствие множество всех действительных чисел и множество всех углов на плоскости, в силу которого всякому действительному числу соответствует некоторый угол ориентированной плоскости, и обратно — всякому углу соответствует некоторое действительное число.*

Дуги окружности также можно рассматривать как направленные величины, а именно дуга считается положительно (отрицательно)

но) направленной, если опирающийся на нее центральный угол положительно (отрицательно) направлен (черт. 23). Наконец, можно рассматривать дуги любой величины. Так, например, дугу, измеряющуюся числом $2k\pi + \alpha$ (где k — натуральное число, а $0 \leq \alpha < 2\pi$) можно представить себе как результат наматывания на окружность радиуса R нерастяжимой нити, имеющей длину, равную $(2k\pi + \alpha)R$, а дугу, измеряющуюся числом $-(2k\pi + \alpha)$ — как результат наматывания на окружность той же нити, но в противоположном направлении.



Черт. 23

Расширение понятия угла (дуги) позволяет складывать направленные углы (дуги) произвольной величины; имеем всегда

$$\angle(h_1, h_2) + \angle(h_2, h_3) + \dots + \angle(h_n, h_{n+1}) = \angle(h_1, h_{n+1}),$$

где $\angle(h_1, h_{n+1})$ есть угол со сторонами h_1, h_{n+1} , измеряющийся числом, равным с у м е (алгебраической) величин углов-слагаемых.

§ 4. Координатная плоскость

Рассмотрим плоскость, на которой задана прямоугольная декартова система координат XOY (черт. 24); такую плоскость будем называть координатной плоскостью. Всякой паре (a, b) действительных чисел взаимно однозначно соответствует точка координатной плоскости, для которой число a является абсциссой, а b — ординатой. Координатная плоскость является ориентированной, а именно: положительно направленным считается прямой угол XOY , для которого начальной стороной служит положительная полуось абсцисс, а конечной — положительная полуось ординат.

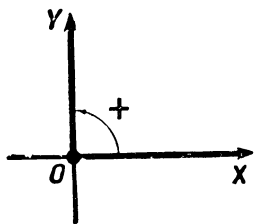
В тригонометрии нередко, в соответствии с распространенным изображением на чертежах, ось абсцисс называют горизонтальной, а ось ординат — вертикальной.

Пусть $M(a, b)$ — произвольная точка координатной плоскости; вектор OM , соединяющий начало координат с точкой M , называется радиусом-вектором этой точки.

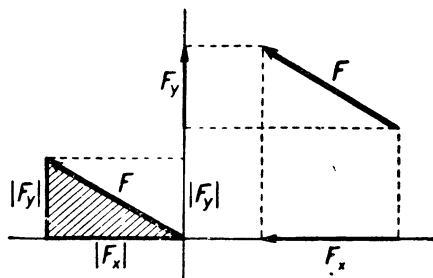
Пусть F — произвольный вектор (черт. 25) на координатной плоскости, F_x и F_y — его проекции на оси OX и OY , тогда длину данного вектора можно вычислить по формуле

$$|F| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}. \quad (1)$$

В самом деле, достаточно перенести вектор F так, чтобы его начало совпадало с началом координат, тогда $|F_x|$ и $|F_y|$ суть катеты прямоугольного треугольника, для которого $|F|$ является гипотенузой, откуда следует справедливость формулы (1). Исключение представляется лишь в случаях, когда вектор F лежит (после переноса) либо на оси абсцисс (тогда $F_x = 0$), либо на оси ординат (тогда $F_y = 0$), в этих случаях треугольник вырождается в отрезок, а справедливость формулы (1) устанавливается непосредственно.



Черт. 24



Черт. 25

Пусть $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ — две произвольные данные точки, A_x и B_x — их проекции на ось абсцисс; имеем

$$\text{пр}_x AB = OB_x - OA_x = x_2 - x_1$$

и аналогично

$$\text{пр}_y AB = y_2 - y_1.$$

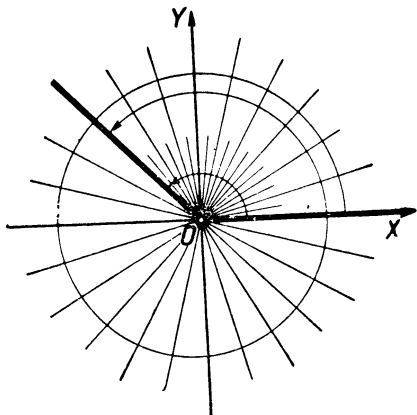
Расстояние d между точками A и B есть длина вектора AB :

$$d = |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

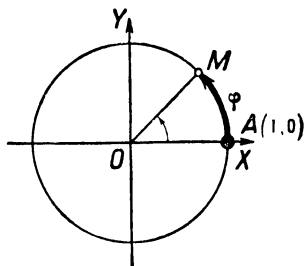
Последняя формула верна при произвольном положении точек A и B на плоскости.

Примем положительную полуось OX за начало отсчета углов, т. е. будем рассматривать множество всех углов (направленных), для которых луч OX является начальной стороной (черт. 26). *Всякому действительному числу φ соответствует некоторое вполне определенное положение конечной стороны угла, измеряющегося этим числом.* Это соответствие не является взаимно однозначным, так как двум углам, отличающимся целым числом полных углов, т. е. слагаемым $2k\pi$ (k — целое число), кратным 2π , соответствует одно и то же положение их конечных сторон, и обратно: величины двух углов с совпадающими конечными сторонами отличаются на слагаемое вида $2k\pi$.

Рассмотрим круг с центром в начале координат и с радиусом 1; на окружности этого круга примем точку $A(1, 0)$ за начало отсчета дуг и установим положительное направление, соответствующее ориентации координатной плоскости. Пусть φ — данное действительное число; отложим от точки A (в положительном либо в отрицательном направлении) дугу, величина которой равна φ , длина этой дуги равна $|\varphi|$. Центральный угол, опирающийся на эту дугу, изме-



Черт. 26



Черт. 27

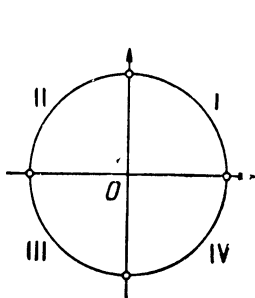
ряется (в радианной мере) тем же числом φ . Точку M — конец отложенной дуги — будем рассматривать как изображение на единичной окружности числа φ (черт. 27). Ориентированную единичную окружность, точками которой изображаются действительные числа, будем называть также *числовой окружностью*, а ограниченный ею круг — *единичным кругом*. Два различных действительных числа φ_1 и φ_2 изображаются одной и той же точкой единичной окружности в том и только в том случае, если

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi, \quad \text{т. е. если} \quad \varphi_2 = \varphi_1 + 2k\pi,$$

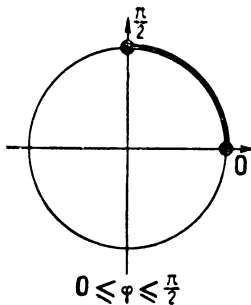
где k — целое число.

Координатные оси делят единичный круг (окружность) на четыре части: I, II, III и IV (черт. 28), называемые *четвертями* единичного круга (единичной окружности). Точки пересечения координатных осей с единичной окружностью, разделяющие ее на четыре дуги, могут причисляться, а могут не причисляться к этим дугам. В первом случае четверти единичной окружности называются *замкнутыми*, а во втором — *открытыми*. Рассмотрим, например, первую четверть единичной окружности. Числовой сегмент $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ изобразится на единичной окружности в виде замкнутой первой четверти, а числовой — интервал $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ — в виде открытой первой четверти (черт. 29).

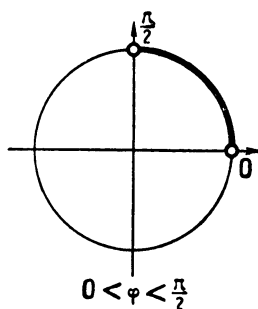
Сегменту $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$ соответствует вторая замкнутая четверть, а интервалу $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ — вторая открытая четверть и т. д. Всякий числовой интервал $2k\pi < \varphi < (2k + \frac{1}{2})\pi$ (k — произвольное целое



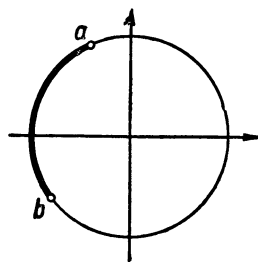
Черт. 28



Черт. 29



число) изображается на единичной окружности ее первой открытой четвертью, интервал $(2k + \frac{1}{2})\pi < \varphi < (2k + 1)\pi$ изображается второй четвертью и т. д. Первая и вторая четверти (вместе с их общей граничной точкой $\varphi = \frac{\pi}{2}$) образуют в сумме полуокружность, называемую верхней полуокружностью. Числому интервалу $0 < \varphi < \pi$ (сегменту $0 \leq \varphi \leq \pi$) соответствует открытая (замкнутая) верхняя полуокружность, к которой не причисляются ее концы. Третья и четвертая четверти образуют в сумме нижнюю полуокружность; эта полуокружность (открытая) соответствует интервалу $\pi < \varphi < 2\pi$. Аналогично определяются правая и левая полуокружности, первая соответствует интервалу $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, вторая — интервалу $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3}{2}\pi$ (для замкнутых полуокружностей надо брать соответствующие сегменты).



Черт. 30

Если конечная сторона угла (или конец дуги) содержится в некоторой четверти, то говорят, что данный угол (дуга) оканчивается в этой четверти. Пусть a и b — два действительных числа, взятые при условии $0 \leq a < b \leq 2\pi$; числовой промежуток (открытый или замкнутый), ограниченный этими числами (снизу числом a , сверху числом b), изображается на единичной окружности дугой с концами в точках, изображающих числа a и b (черт. 30).

Той же самой дугой изобразится всякий промежуток, ограниченный числами $a + 2k\pi$ и $b + 2k\pi$, где k — произвольное целое число. Сопоставим способы изображения действительных чисел точками окружности и точками прямой линии при помощи следующей наглядной иллюстрации. Представим себе числовую ось в виде тонкой нерастяжимой бесконечной нити. Совместив начальную точку прямой с начальной точкой $A(1, 0)$ единичной окружности, будем наматывать нить на окружность, тогда точки числовой прямой и точки окружности, изображающие одно и то же число, совместятся.

§ 5. О монотонных функциях

Мы предполагаем известным общее понятие функции, а также связанные с ним основные понятия учения о функциях: область определения функции, множество ее значений, ограниченность и неограниченность числовой функции, непрерывность.

В тригонометрии особо важную роль играют *м о н о т о н н ы е* функции. Как известно, *функция $f(x)$ называется возрастающей (убывающей) в данном промежутке, если при произвольных двух различных значениях аргумента, принадлежащих данному промежутку, большему значению аргумента соответствует большее (меньшее) значение функции*

$$f(x_1) < f(x_2), \text{ если } x_1 < x_2$$

для возрастающей функции, и

$$f(x_1) > f(x_2), \text{ если } x_1 < x_2$$

для убывающей функции.

Возрастающая и убывающая функции относятся к классу *м о н о т о н н ы х* функций.

При изучении *действительных функций* от *действительного аргумента* мы будем рассматривать лишь *однозначные функции*, т. е. функции, для которых *каждому значению аргумента соответствует единственное значение функции**.

Будем говорить, что *функция $f(x)$ на сегменте $a \leq x \leq b$ возрастает (убывает) от m до M* , если:

1° *функция $f(x)$ возрастает (убывает) на сегменте $[a, b]$;*

2° *в концах a и b сегмента имеет значения, равные (соответственно) m и M*

$$f(a) = m, f(b) = M;$$

* Понятие многозначной функции встретится в данной книге в гл. VIII, где идет речь об элементарных функциях от *комплексного аргумента*.

3° всякое значение c , промежуточное между m и M :

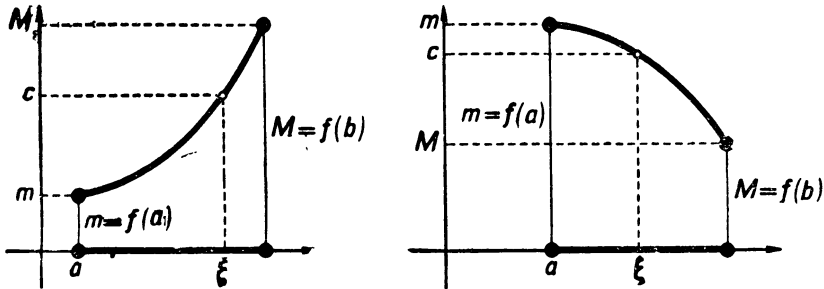
$$m < c < M \quad (\text{для возрастающей функции})$$

или

$$m > c > M \quad (\text{для убывающей функции}).$$

функция $f(x)$ имеет при некотором значении $x = \xi$ в интервале (a, b) :

$$f(\xi) = c, \text{ где } a < \xi < b \quad (\text{черт. 31}).$$



Черт. 31

В силу монотонности функции, это значение ξ единственно.

Из математического анализа известно, что если функция $f(x)$ возрастает (убывает) и непрерывна на сегменте $[a, b]$, то она возрастает (убывает) на этом сегменте от $f(a)$ до $f(b)$. Для монотонных функций справедливо и обратное:

если функция $f(x)$ возрастает (убывает) от $f(a)$ до $f(b)$ на сегменте $[a, b]$, то она непрерывна на этом сегменте.

Аналогично определяется понятие функции, возрастающей (убывающей) от m до M в интервале (a, b) ; в этом случае условие 2° заменяется следующим условием 2':

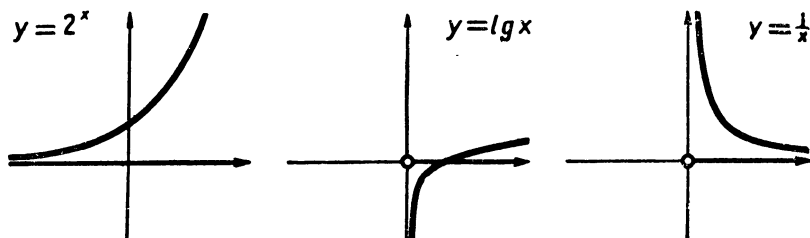
$$2'. \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = m, \quad \lim_{x \rightarrow b} f(x) = M.$$

Следует иметь в виду, что интервал (a, b) может быть как конечным, так и бесконечным, а m и M могут быть как действительными числами, так и иметь бесконечные значения $\pm\infty$. Так, например, функция 2^x в интервале $(-\infty, +\infty)$ возрастает от 0 до $+\infty$, функция $\lg x$ в интервале $(0, +\infty)$ возрастает от $-\infty$ до $+\infty$, функция $\frac{1}{x}$ в интервале $(0, 1)$ убывает от $+\infty$ до 1 (черт. 32).

В математическом анализе доказывается следующая теорема об обратной функции.

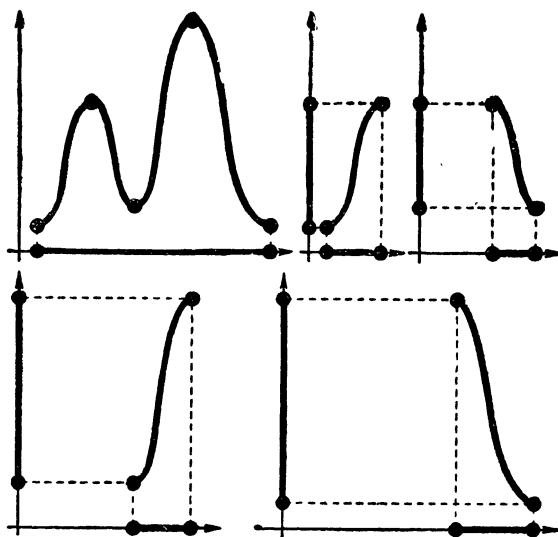
Теорема. Всякая возрастающая (убывающая) функция имеет обратную функцию. При этом обратная функция также возрастает (убывает).

Если функция $f(x)$ на сегменте $a \leq x \leq b$ возрастает (убывает) от m до M , то обратная на сегменте $m \leq y \leq M$ (на сегменте $M \leq y \leq m$)



Черт. 32

функция возрастает (убывает) от a до b (с надлежащим изменением последнее утверждение справедливо для функции, монотонной в интервале)



Черт. 33

Функция немонотонная может не иметь обратную функцию, так как данное ее значение функция может иметь при нескольких (быть может, на бесконечном множестве) значениях аргумента. и тогда каждому значению функции y нельзя поставить в соответствие единственное значение x . при котором

$$y = f(x).$$

Предположим, что область определения функции $y = f(x)$ можно разбить на промежутки монотонности, т. е. на такие промежутки, в каждом из которых она либо возрастает, либо убывает. В этом частном случае переход к обратной функции возможен в каждом данном промежутке монотонности функции $f(x)$ (черт. 33). Так, например, для функции $y = x^2$ в интервале $-\infty < x < +\infty$ невозможен переход к обратной функции, так как всякое положительное значение y функция имеет при двух различных значениях $x = \pm\sqrt{y}$. Интервал $(-\infty, +\infty)$ можно разбить на два промежутка: $-\infty < x \leq 0$ и $0 \leq x < +\infty$; в первом из этих промежутков функция $y = x^2$ убывает и имеет обратную функцию

$$x = -\sqrt{y},$$

во втором из этих промежутков функция $y = x^2$ возрастает и имеет обратную функцию

$$x = \sqrt{y}.$$

§ 6. Периодические функции

Определение. Функция $f(x)$ называется периодической, если существует положительное число l (хотя бы одно) такое, что при любом значении аргумента x значения функции $f(x)$ в точках x , $x + l$, $x - l$ равны

$$f(x) = f(x + l) = f(x - l).$$

Из этого определения следует, что если точка x принадлежит области определения функции $f(x)$, то точки $x \pm l$ также принадлежат области ее определения. На том же основании точки $x \pm 2l$, $x \pm 3l$ и вообще $x + kl$ (где k — произвольное целое число) вместе с точкой x принадлежат области определения функции $f(x)$, и имеет место равенство:

$$f(x + kl) = f(x).$$

В самом деле

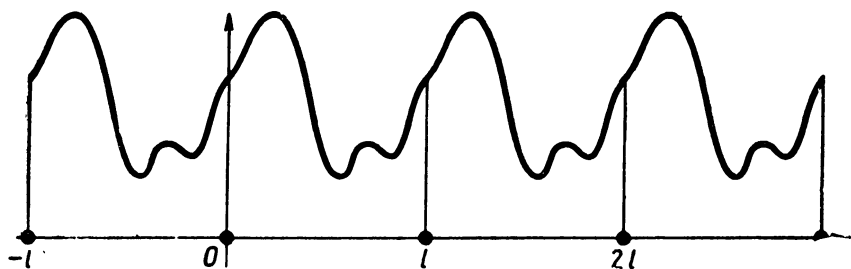
$$f(x) = f(x \pm l) = f((x \pm l) \pm l) = f(x \pm 2l) = \dots = f(x + kl).$$

Рассмотрим двустороннюю последовательность сегментов

$$\dots, [-l, 0]; [0, l]; [l, 2l]; [2l, 3l], \dots,$$

каждый из которых (кроме $[0, l]$) может быть получен из «начального» сегмента $[0, l]$ переносом вдоль оси абсцисс. График периодической функции $y = f(x)$ одинаков на каждом из этих сегментов;

в этом смысле говорят, что графиком периодической функции является линия, «повторяющаяся» бесконечное множество раз (черт. 34).



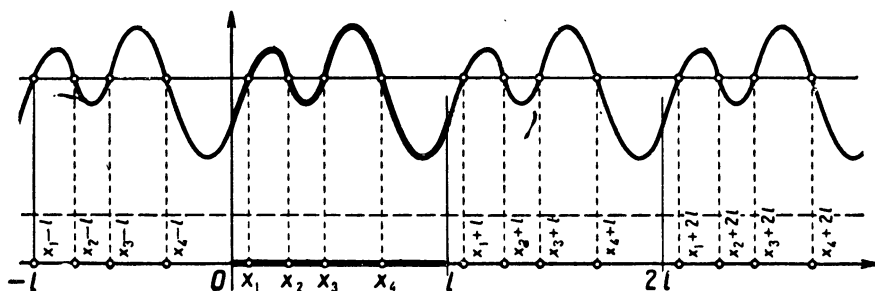
Черт. 34

Если $f(x)$ есть периодическая функция с периодом l и m — некоторое действительное число, то для отыскания множества всех значений аргумента x , при которых значение функции равно m , т. е., иными словами, для решения уравнения

$$f(x) = m \quad (1)$$

достаточно найти множество $x_1, x_2, \dots$ всех искомых значений аргумента лишь на полусегменте $0 \leq x < l$. Множество всех решений уравнения (1) получится, если к каждому найденному решению прибавить произвольное слагаемое, кратное периоду (черт. 35)

$$x_1 + k_1 l, \quad x_2 + k_2 l, \quad x_3 + k_3 l, \dots$$



Черт. 35

Следовательно, уравнение (1) либо не имеет решений, либо имеет бесконечное множество решений.

Если периодическая функция с периодом l обладает некоторыми свойствами (например, монотонна, непрерывна, ограничена) в некотором промежутке $[\alpha, \beta]$, принадлежащем начальному сегменту:

$$0 \leq \alpha < \beta \leq l,$$

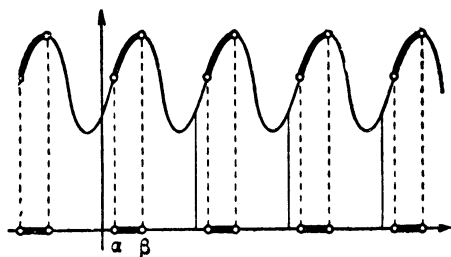
то она обладает тем же свойством в каждом из промежутков (черт. 36)

$$\dots [\alpha - l, \beta - l], [\alpha + l, \beta + l], \dots, [\alpha + kl, \beta + kl].$$

Заметим, что при исследовании свойств периодической функции вместо начального сегмента $[0, l]$ можно взять любой сегмент $[a, a + l]$, охватывающий ее полный период.

Если число l есть период функции $f(x)$, то любое из чисел $2l, 3l, \dots, nl$, также является ее периодом.

Если среди всех периодов данной функции существует наименьшее положительное число, то этот наименьший положительный период обычно кратко называется периодом*.



Черт 36

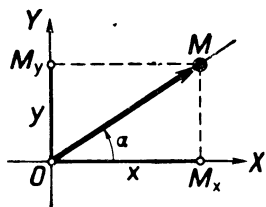
* Из курса математического анализа известно, что если для непрерывной периодической функции не существует наименьшего положительного периода, то данная функция постоянна. Таким образом, *всякая непрерывная непостоянная периодическая функция имеет наименьший положительный период.*



ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ
И СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ НИМИ

§ 7. Тригонометрические функции угла

Пусть α — произвольный данный (направленный) угол на ориентированной плоскости. Установив на плоскости произвольную декартову прямоугольную систему координат, отложим угол α , приняв начало координат за его вершину, а положительную полуось абсцисс — за начальную сторону (черт. 37).



Черт. 37

Выберем произвольную точку $M \neq O$ на конечной стороне угла α . Таким образом, OM есть произвольный радиус-вектор на координатной плоскости, образующий угол α с положительной полуосью абсцисс. Этот радиус-вектор называется также подвижным радиусом. Пусть x и y — абсцисса и ордината точки M , а $\rho = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2}$ — длина радиуса-вектора OM .

Теорема. Для произвольного радиуса-вектора, образующего данный угол α с осью абсцисс, каждое из отношений

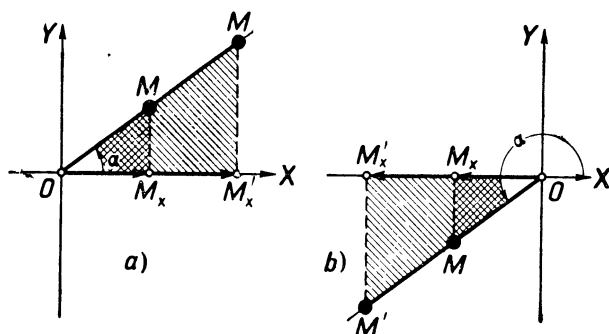
$$\frac{x}{\rho}, \frac{y}{\rho}, \frac{x}{y}, \frac{y}{x} \quad (1)$$

либо имеет одно и то же значение, либо не существует.

Р а з љ я с н е н и е. Теорема утверждает, что каждое из отношений (1) при данном угле α не зависит от длины подвижного радиуса OM и определяется исключительно величиной α .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Случай 1°. Конечная сторона угла α не принадлежит ни одной из координатных осей, т. е. $\alpha \neq k\frac{\pi}{2}$ (где k — целое число).

Возьмем на конечной стороне угла α две любые точки $M(x, y)$ и $M'(x', y')$, отличные от точки O (черт. 38, a и b). Если из точек M и M' опустить перпендикуляры на ось абсцисс, то получатся подобные прямоугольные треугольники OMM_x и $OM'M_x$. Катеты треугольника OM_xM суть абсолютные величины координат



Черт. 38

точки M , т. е. $|x|$ и $|y|$, гипотенуза равна длине ρ радиуса-вектора OM . Катеты и гипотенуза треугольника $OM'M_x$ суть $|x'|$, $|y'|$ и ρ' . Равенство

$$\frac{|x'|}{\rho'} = \frac{|x|}{\rho}$$

выражает равенство отношений сходственных катетов к гипотенузе. Векторы OM_x и OM'_x на оси OX одинаково направлены, так как лучи, соединяющие точку O с точками M_x и M'_x , совпадают между собой, являясь проекцией конечной стороны угла α на его начальную сторону. Абсциссы x и x' суть числа одного и того же знака как величины двух одинаково направленных векторов OM_x и OM'_x оси абсцисс, поэтому отношения $\frac{x}{\rho}$ и $\frac{x'}{\rho'}$ совпадают не только по абсолютной величине, но и по знаку, т. е. $\frac{x}{\rho} = \frac{x'}{\rho'}$.

Итак, отношение $\frac{x}{\rho}$ при данном угле α одно и то же, не зависимо от длины радиуса-вектора OM . Аналогично доказывается теорема и для трех остальных отношений.

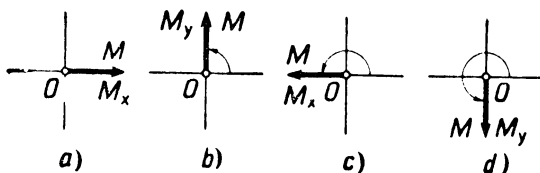
Случай 2°. Конечная сторона угла α принадлежит либо горизонтальной, либо вертикальной оси, т. е. $\alpha = k\frac{\pi}{2}$. Треугольники OMM_x и $OM'M_x$ вырождаются в отрезки; этот случай требует специального рассмотрения.

а) Если k кратно 4, т. е. $k = 4n$ и $\alpha = 2n\pi$, то какова бы ни была точка M , отличная от точки O , имеем (черт. 39, а):

$$M_x = M, \quad x = OM_x = OM = \rho, \quad y = 0,$$

и следовательно,

$$\frac{x}{\rho} = 1, \quad \frac{y}{\rho} = 0, \quad \frac{y}{x} = 0, \quad \text{а } \frac{x}{y} \text{ не существует.}$$



Черт. 39

б) Если

$$k = 4n + 1, \quad \text{то } \alpha = \frac{\pi}{2} + 2n\pi;$$

в этом случае (черт. 39, б):

$$M_x = 0, \quad x = 0, \quad y = \rho,$$

и следовательно,

$$\frac{x}{\rho} = 0, \quad \frac{y}{\rho} = 1, \quad \frac{x}{y} = 0, \quad \text{а } \frac{y}{x} \text{ не существует.}$$

с) Если

$$k = 4n + 2, \quad \text{то } \alpha = (2n + 1)\pi,$$

в этом случае

$$x = OM_x = -\rho, \quad y = 0$$

(черт. 39, с), и следовательно,

$$\frac{x}{\rho} = -1, \quad \frac{y}{\rho} = 0, \quad \frac{y}{x} = 0, \quad \text{а } \frac{x}{y} \text{ не существует.}$$

д) Если

$$k = 4n + 3, \quad \text{то } \alpha = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi,$$

в этом случае

$$M_x = 0, \quad x = 0, \quad y = -\rho$$

(черт. 39, д), и следовательно,

$$\frac{x}{\rho} = 0, \quad \frac{y}{\rho} = -1, \quad \frac{x}{y} = 0, \quad \text{а } \frac{y}{x} \text{ не существует.}$$

Итак, во всех случаях при данном угле α каждое из отношений (1) либо имеет одно и то же значение, либо не существует, независимо от выбора точки M , на конечной стороне угла α , ч. т. д.

Для двух различных углов отношения (1) (каждое) имеют, вообще говоря, различные значения.

Определения: 1°. Отношение абсциссы x конца радиуса-вектора, образующего угол α с осью абсцисс, к длине ρ радиуса-вектора называется косинусом угла α .

2°. Отношение ординаты y конца радиуса-вектора, образующего угол α с осью абсцисс, к длине ρ радиуса-вектора называется синусом угла α .

3°. Отношение ординаты y к абсциссе x конца радиуса-вектора, образующего угол α с осью абсцисс, называется тангенсом угла α .

4°. Отношение абсциссы x к ординате y конца радиуса-вектора, образующего угол α с осью абсцисс, называется котангенсом угла α .

Косинус, синус, тангенс и котангенс обозначаются (соответственно) так:

$$\cos \alpha = \frac{x}{\rho}, \quad \sin \alpha = \frac{y}{\rho}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}.$$

Значение каждого из этих отношений определяется только лишь углом α , поэтому они (отношения) суть функции угла α — эти функции называются тригонометрическими функциями угла.

Определения 3° и 4° можно заменить следующими эквивалентными определениями:

3'. Тангенс угла α есть отношение синуса этого угла к его косинусу, т. е.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

4'. Котангенс угла α есть отношение косинуса этого угла к его синусу, т. е.

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

В самом деле,

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{y}{\rho}}{\frac{x}{\rho}} = \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \alpha$$

и аналогично:

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\frac{x}{\rho}}{\frac{y}{\rho}} = \frac{x}{y} = \operatorname{ctg} \alpha.$$

Так как $|x| \leq \rho$, $|y| \leq \rho$, то при всех значениях α имеем

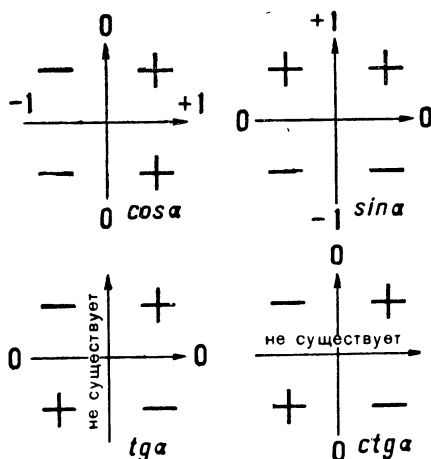
$$|\cos \alpha| \leq 1, |\sin \alpha| \leq 1.$$

Знаки тригонометрических функций (по четвертям) определяются в соответствии со знаками координат точек в различных четвертях координатной плоскости.

Косинусы углов положительны (отрицательны) для углов, оканчивающихся в той части координатной плоскости, в которой абсциссы точек положительны (отрицательны).

Следовательно, косинусы углов, оканчивающихся в правой (открытой) полуплоскости (I и IV четверти), положительны, а углов, оканчивающихся в левой (открытой) полуплоскости (II и III четверти), отрицательны.

Аналогично знак синуса определяется по знаку ординаты: синусы углов, оканчивающихся в верхней (открытой) полуплоскости (I и II четверти) положительны, а углов, оканчивающихся в нижней (открытой) полуплоскости (III и IV четверти), отрицательны.



Черт. 40

Тангенсы и котангенсы положительны (отрицательны) в тех четвертях, в которых координаты точек одинаковы (противоположны) по знаку.

Следовательно, тангенсы и котангенсы углов, оканчивающихся в I и III (открытых) четвертях, положительны, а углов, оканчивающихся во II и IV (открытых) четвертях, отрицательны (черт. 40).

Кроме указанных четырех основных тригонометрических функций, введены специальные названия и обозначения для

функций, по величине обратных косинусу и синусу. Первая называется с е к а н с о м, $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$, а вторая — к о с е к а н с о м, $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$.

Знание свойств основных тригонометрических функций позволит без труда устанавливать соответствующие свойства секанса и косеканса. Поэтому интереса для специального изучения эти функции не представляют; нередко при различных тригонометрических преобразованиях ими пользуются как удобным обозначением для $\frac{1}{\cos \alpha}$ и $\frac{1}{\sin \alpha}$.

В старых учебниках секанс и косеканс причислялись к числу основных тригонометрических функций и изучались особо, наряду с прочими функциями. Сколько и какие функции относить к числу основных является делом у с л о в н ы м. Так, например, во многих старинных руководствах, кроме шести тригонометрических функций, рассматривалась седьмая функция с и н у с - в е р с у с (обращенный синус), которая определялась следующим образом (черт. 41):

$$\sin \text{vers } \alpha = \frac{OM_1 - OA}{|OM|} = \frac{\rho - x}{\rho};$$

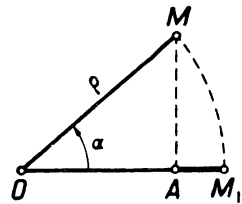
синус-версус выражается через косинус следующим образом

$$\sin \text{vers } \alpha = 1 - \cos \alpha;$$

специальное изучение функции $\sin \text{vers } \alpha$ вызвало бы лишнее загромождение курса тригонометрии вопросами, не имеющими принципиального значения.

Многочисленные теоретические и практические применения тригонометрии показали целесообразность изучения (в качестве основных) ч е т ы р е х тригонометрических функций, определения которых 1° — 4° даны в настоящем параграфе.

Практически значения тригонометрических функций находятся по таблицам, в которых с данной степенью точности даются значения тригонометрических функций от значений аргумента, взятых в некоторой арифметической прогрессии. Устройство тригонометрических таблиц изложено в § 71.



Черт. 41

§ 8. Различные определения и интерпретации тригонометрических функций

Многообразные применения тригонометрии в математических дисциплинах и в физике, механике и технике вызвали потребность в различных интерпретациях тригонометрических функций. В связи с различными интерпретациями определения тригонометрических функций могут формулироваться в различных равносильных между собой формах.

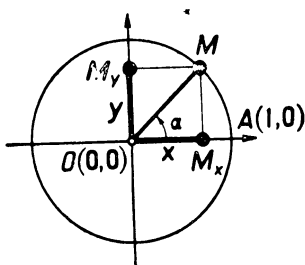
1. Определение тригонометрических функций с помощью единичного круга.

В силу независимости значений тригонометрических функций от длины радиуса-вектора можно условиться выбрать все радиусы-векторы р а в н ы м и п о д л и н е. Если (в частности) все радиусы-векторы берутся по длине равными 1, то их концы расположатся на единичной окружности. Данный угол α отложится на коорди-

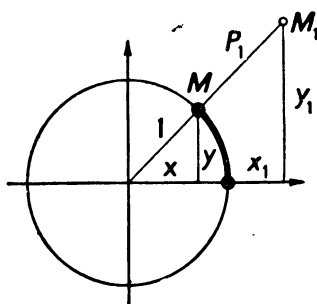
натной плоскости в виде угла, образованного двумя радиусами единичной окружности: начальным радиусом OA (черт. 42) и радиусом OM , образующим с OA угол α . Пусть x и y — координаты точки M (конца рассматриваемого радиуса); так как $\rho = |OM| = 1$, то $\frac{x}{\rho} = x$ и $\frac{y}{\rho} = y$, а потому

$$\cos \alpha = x, \quad \sin \alpha = y. \quad (1)$$

Следовательно, косинус и синус угла α суть абсцисса и ордината (соответственно) конца M радиуса единичного круга, образующего угол α с осью абсцисс.



Черт. 42



Черт. 43

Эта интерпретация получена как следствие определений 1° и 2°, принятых в предыдущем параграфе; однако она может быть принята и в качестве определения косинуса и синуса. В самом деле, положим по определению $x = \cos \alpha$, $y = \sin \alpha$; если OM_1 — произвольный радиус-вектор, образующий угол α с осью абсцисс (черт. 43), то в силу теоремы о независимости отношений $\frac{x}{\rho}$ и $\frac{y}{\rho}$ от длины ρ радиуса-вектора имеем

$$\cos \alpha = x = \frac{x}{1} = \frac{x_1}{\rho_1}, \quad \sin \alpha = y = \frac{y}{1} = \frac{y_1}{\rho_1},$$

где x_1 , y_1 и ρ_1 — координаты конца и длина радиус-вектора OM_1 .

Итак, отправляясь от равенств (1), как от определений, можно получать в качестве следствия равенства, принятые (см. предыдущий параграф) в качестве определения косинуса и синуса.

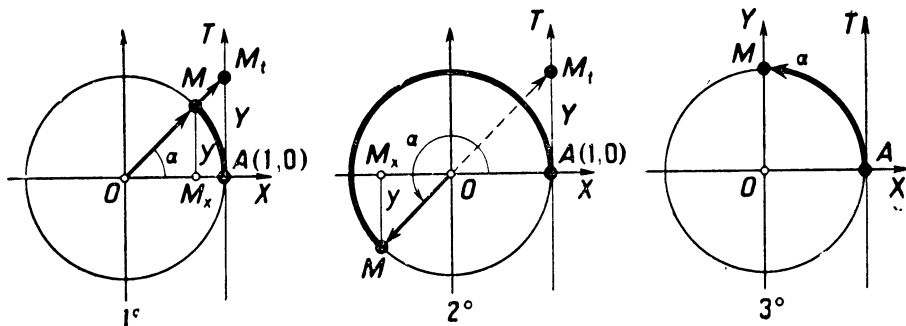
Тангенс и котангенс суть отношения ординаты к абсциссе и абсциссы к ординате конца радиуса единичного круга, образующего данный угол α с начальным радиусом.

Функциям $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$ можно дать и другую интерпретацию.

Рассмотрим ось AT , касающуюся единичной окружности в начальной точке $A(1, 0)$. На этой оси примем направление, образующее угол $\frac{\pi}{2}$ с осью абсцисс за положительное, а за начало — точ-

ку A . Ось AT называется осью тангенсов. Ось тангенсов параллельна оси ординат и одинаково с нею направлена (черт. 44).

Рассмотрим центральную проекцию M_t (из точки O) конца радиуса OM единичной окружности, образующего данный угол α с осью абсцисс. Возможны следующие три случая (черт. 43).



Черт. 44

1°. Угол α оканчивается в правой полуплоскости, в этом случае точки M и M_t расположены на одном и том же луче, исходящем из начала координат и образующем угол α с осью абсцисс. Обозначим через Y ординату точки M_t , имеем (по определению тангенса):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Y}{OA} = \frac{Y}{1} = Y.$$

С л у ч а й 2°. Угол α оканчивается в левой полуплоскости (черт. 44, 2°); в этом случае радиусы-векторы OM и OM_t противоположно направлены. Отношения

$$\frac{M_x M}{OM_x} = \frac{y}{x} \quad \text{и} \quad \frac{AM_t}{OA} = Y$$

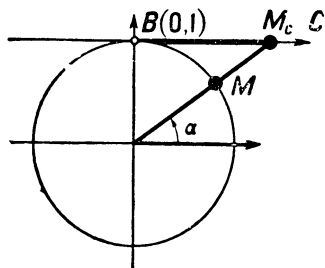
равны по абсолютной величине (в силу подобия треугольников OMM_x и OAM_t) и одинаковы по знаку (их числители и знаменатели соответственно имеют противоположные знаки); следовательно, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = Y$.

С л у ч а й 3°. $\alpha = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. В этом случае радиус OM перпендикулярен к оси OX , центральная проекция точки M на ось тангенсов не существует, $\operatorname{tg} \alpha$ также не существует (черт. 44, 3°).

Итак, при всех допустимых значениях угла α тангенс этого угла равен ординате точки, в которой ось тангенсов пересекается с продолжением радиуса единичной окружности, образующего угол α с осью абсцисс.

Эта интерпретация может быть принята в качестве определения тангенса (провести подробно рассуждения предоставляем учащимся).

Функцию $\operatorname{ctg} \alpha$ можно интерпретировать следующим образом. Рассмотрим ось BC , касающуюся единичной окружности в точке $B(0, 1)$ и одинаково направленную с осью абсцисс (черт. 45). Эта ось называется осью котангенсов. При всех допустимых значениях угла α (т. е. $\alpha \neq k\pi$) котангенс этого угла равен абсциссе X точки



Черт. 45

M_c , в которой ось котангенсов пересекается с продолжением радиуса единичной окружности: $\operatorname{ctg} \alpha = X$.

Эту интерпретацию можно принять в качестве определения котангенса.

Интерпретация с помощью единичного круга удобна при изучении свойств тригонометрических функций геометрическими средствами.

На чертеже 46 представлены единичный круг, данный угол α , соответствующая точка единичной окружности, ее координаты и точки осей тангенсов и котангенсов. Направленные отрезки OM_x , M_xM , AM_t и BM_c иногда называются соответственно линиями косинуса, синуса, тангенса и котангенса данного угла. Из изложенного следует, что значения тригонометрических функций равны величинам соответствующих тригонометрических линий.

II. Интерпретация при помощи круга произвольного радиуса.

В рассуждениях, изложенных в предыдущем пункте I, можно вместо единичного круга брать круг произвольного радиуса (т. н. тригонометрический круг). Это равносильно соглашению считать все радиусы-векторы равными по длине числу R . При такой замене единичного круга чертеж 46 претерпевает преобразование гомоте́тии с центром в точке O и с коэффициентом R и получается чертеж 47. Сказанное в предыдущем пункте остается в силе, но лишь со следующими изменениями. Имеем

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{R}, \quad \sin \alpha = \frac{y}{r} = \frac{y}{R}.$$

Следовательно, косинус и синус суть отношения абсциссы и ординаты конца радиуса-вектора OM к радиусу круга.

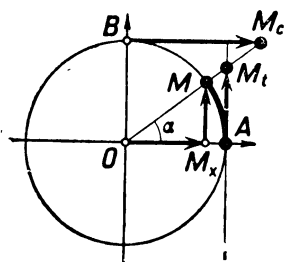
Определения тангенса и котангенса как отношений координат конца радиуса-вектора остаются прежними.

Тангенс и котангенс равны отношениям соответствующих координат точек осей тангенсов и котангенсов к радиусу R круга.

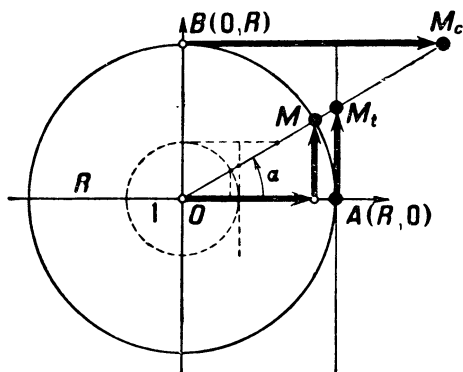
Тригонометрические функции можно определить как отношения соответствующих тригонометрических линий OM_x (линия косинуса), M_xM (линия синуса), AM_t (линия тангенса) и BM_c (линия котангенса) к радиусу R тригонометрического круга

$$\cos \alpha = \frac{OM_x}{R}, \quad \sin \alpha = \frac{M_xM}{R}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{AM_t}{R}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{BM_c}{R}.$$

В старых учебниках тригонометрический круг обычно не связывается с системой координат. В этом случае, выбрав начальный радиус и установив положительное направление отсчета углов,



Черт 46



Черт 47

надо ввести специальные соглашения относительно знаков, с которыми должны браться величины тригонометрических линий (см., например, учебник тригонометрии Н. Рыбкина). По сути дела эти соглашения представляют собой введение системы координат, но лишь в «замаскированном» виде.

III. Векторная интерпретация.

Пусть α — данный угол. Рассмотрим на координатной плоскости произвольный вектор $\overrightarrow{AB}$, образующий угол α с осью абсцисс (черт. 48). Перенесем параллельно вектор $\overrightarrow{AB}$, поместив его начало в начале координат; пусть после указанного переноса вектор $\overrightarrow{AB}$ займет положение $\overrightarrow{OM}$. Известно, что при параллельном переносе вектора его проекция на данную ось не изменяется, следовательно, спроектировав векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{OM}$ на ось абсцисс, получим: $\operatorname{pr}_x \overrightarrow{AB} = \operatorname{pr}_x \overrightarrow{OM}$. Но так как проекция радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$ на ось абсцисс равна абсциссе x его конца M , то $\operatorname{pr}_x \overrightarrow{AB} = x$. Аналогично проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось ординат равна ординате y конца радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$, т. е. $\operatorname{pr}_y \overrightarrow{AB} = y$.

Имеем далее $\rho = |\overrightarrow{OM}| = |\overrightarrow{AB}|$.

Из изложенного следует, что

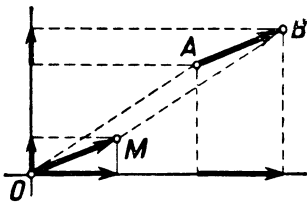
$$\cos \alpha = \frac{x}{\rho} = \frac{\operatorname{pr}_x \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}; \quad \sin \alpha = \frac{y}{\rho} = \frac{\operatorname{pr}_y \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}.$$

Итак, косинус угла α есть отношение проекции вектора, образующего угол α с осью абсцисс на эту ось, к длине вектора.

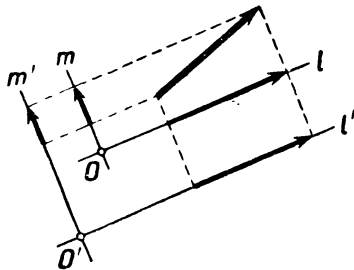
Синус α есть отношение проекции вектора на ось ординат к длине вектора.

Тангенс и котангенс суть отношения проекций:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{пр}_y \mathbf{AB}}{\operatorname{пр}_x \mathbf{AB}}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\operatorname{пр}_x \mathbf{AB}}{\operatorname{пр}_y \mathbf{AB}}.$$



Черт 48



Черт 49

Иногда векторная интерпретация тригонометрических функций формулируется в форме, не требующей предварительного введения координатной системы:

косинус угла α есть отношение проекции вектора на произвольную ось l , образующую с данным вектором угол α , к длине вектора;

синус угла α есть отношение проекции вектора на произвольную ось m , образующую угол $+\frac{\pi}{2}$ с осью l , к длине вектора:

$$\cos \alpha = \frac{\operatorname{пр}_l \mathbf{AB}}{|\mathbf{AB}|}, \quad \sin \alpha = \frac{\operatorname{пр}_m \mathbf{AB}}{|\mathbf{AB}|}.$$

Тангенс и котангенс суть отношения проекций:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{пр}_m \mathbf{AB}}{\operatorname{пр}_l \mathbf{AB}}, \quad \operatorname{ctg} = \frac{\operatorname{пр}_l \mathbf{AB}}{\operatorname{пр}_m \mathbf{AB}}.$$

Заметим, что выбор двух взаимно перпендикулярных осей l и m на ориентированной плоскости равносильно установлению координатной системы mOl , а при различных способах выбора осей l и m происходит параллельный перенос осей координат, от чего проекции вектора на оси не изменяются (черт. 49).

Последнюю формулировку можно видоизменить следующим образом:

косинус угла α есть отношение проекции произвольного вектора, направленного вдоль конечной стороны угла α на начальную сторону, к длине вектора;

синус угла α есть отношение проекции произвольного вектора, направленного вдоль конечной стороны угла α на ось, образующую угол $+\frac{\pi}{2}$ с начальной стороной, к длине вектора.

Векторная интерпретация получена исходя из координатного определения тригонометрических функций; обратно, можно принять векторную интерпретацию в качестве основного определения и получить координатное определение в качестве следствия. В самом деле, примем равенства

$$\cos \alpha = \frac{\text{пр}_x \mathbf{AB}}{|\mathbf{AB}|}, \quad \sin \alpha = \frac{\text{пр}_y \mathbf{AB}}{|\mathbf{AB}|}$$

в качестве определения; если (в частности) условиться выбирать все векторы с началом в одной и той же точке O , то свободный вектор заменится радиусом-вектором. Проекции вектора на оси координат являются координатами его конца и векторное определение тригонометрических функций получит координатную интерпретацию, принятую в § 7 в качестве основного определения.

Таким образом, *координатное и векторное определения тригонометрических функций эквивалентны.*

Векторная интерпретация имеет многочисленные применения в геометрии, в механике и в физике. Она удобна в тех случаях, когда в рассуждениях пользуются свободными векторами.

Из векторного определения тригонометрических функций вытекают нижеследующие теоремы о проекциях, имеющие многочисленные применения в геометрии и в смежных дисциплинах.

Теорема 1°. *Проекция вектора на ось равна (по величине) длине вектора, умноженной на косинус угла между осью и данным вектором:*

$$\text{пр}_l \mathbf{AB} = |\mathbf{AB}| \cos (\widehat{\mathbf{AB}, l}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, из равенства $\cos \alpha = \frac{\text{пр}_l \mathbf{AB}}{|\mathbf{AB}|}$ вытекает $\text{пр}_l \mathbf{AB} = |\mathbf{AB}| \cos \alpha$, где $\alpha = \angle (\mathbf{AB}, l)$ есть угол между данным вектором и осью l (черт. 50), ч. т. д.

Теорема 2°. *Проекция вектора $\mathbf{AB}$, расположенного на некоторой оси m , на другую ось l равна произведению величины этого вектора на косинус угла, образованного осью m с осью l .*

Теорема 2° является обобщением теоремы 1°.

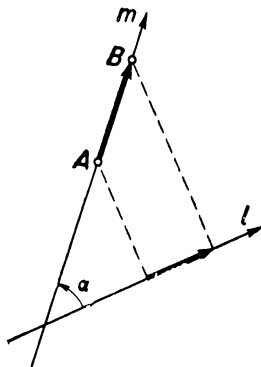
Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через α угол, который образует ось m с осью l .

Если направление вектора $\mathbf{AB}$ совпадает с направлением оси m , то его величина равна положительному числу — его длине, в этом случае $|\mathbf{AB}| = \rho$ (черт. 50). Вектор $\mathbf{AB}$ образует угол α с осью l , а потому

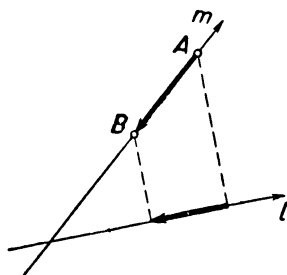
$$\text{пр}_l \mathbf{AB} = \rho \cos \alpha = |\mathbf{AB}| \cos \alpha = AB \cos \alpha.$$

Если направление вектора $\overrightarrow{AB}$ противоположно направлению оси m , то величина $\overrightarrow{AB}$ характеризуется отрицательным числом $AB = -|\overrightarrow{AB}| = -\rho$. В рассматриваемом случае направление вектора $\overrightarrow{BA}$ совпадает с направлением оси m (черт. 51). Проекции векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ на ось l равны по абсолютной величине и противоположны по знаку; имеем:

$$\text{пр}_l \overrightarrow{AB} = -\text{пр}_l \overrightarrow{BA} = -\rho \cos \alpha = AB \cos \alpha.$$



Черт. 50



Черт. 51

Таким образом, теорема справедлива при любом расположении точек A и B на оси m , ч. т. д.

Рассмотрим вектор $\overrightarrow{AB}$, образующий с некоторой координатной осью, например с осью абсцисс, угол φ . Пусть x_1 и x_2 — координаты (соответствующие данной оси) его начала и конца. В таком случае проекция вектора на данную координатную ось равна $x_2 - x_1$, но, с другой стороны, эта же проекция равна $\rho \cos \varphi$, следовательно,

$$x_2 - x_1 = \rho \cos \varphi, \quad \text{откуда} \quad x_2 = x_1 + \rho \cos \varphi.$$

Эти формулы часто применяются в аналитической геометрии.

IV. Интерпретация тригонометрических функций острого угла. Во многих геометрических и прикладных вопросах достаточно оперировать с тригонометрическими функциями лишь острых углов. Так, нередко элементы геометрической фигуры можно рассматривать как элементы ряда прямоугольных треугольников.

Пусть ABC — произвольный прямоугольный треугольник, один из острых углов которого (например, A) равен данному углу α (черт. 52). Для острого угла значения всех тригонометрических функций положительны; в этом случае имеем:

$$\frac{b}{c} = \cos \alpha, \quad \frac{a}{c} = \sin \alpha, \quad \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha, \quad \frac{b}{a} = \operatorname{ctg} \alpha.$$

Итак, определения тригонометрических функций острого угла могут быть сформулированы в следующем сокращенном и легко запоминаемом виде:

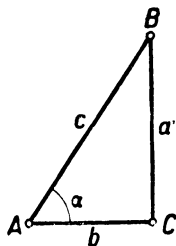
Косинус острого угла есть отношение прилежащего (к данному углу) катета к гипотенузе.

Синус есть отношение противолежащего катета к гипотенузе.

Тангенс есть отношение противолежащего катета к прилежащему.

Котангенс есть отношение прилежащего катета к противолежащему.

Если угол α заменить другим острым углом треугольника равным $\frac{\pi}{2} - \alpha$, то прилежащий катет станет противолежащим, а противолежащий — прилежащим. а потому:



Черт 52

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha,$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg} \alpha, \quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg} \alpha.$$

В дальнейшем, в зависимости от потребности, будут применяться различные интерпретации тригонометрических функций.

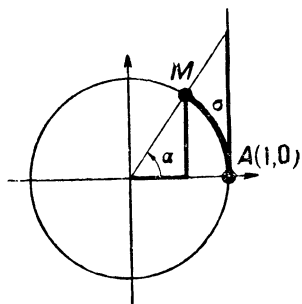
Наличие разнообразных интерпретаций для тригонометрических функций указывает на их многочисленные применения в математике и смежных дисциплинах. *Для успешного изучения и применения тригонометрии необходимо уметь пользоваться всеми этими интерпретациями.*

§ 9. Аргумент тригонометрической функции

Соответствие между углами и значениями данной тригонометрической функции позволяет всякую тригонометрическую функцию рассматривать как функцию, для которой значениями аргумента являются у г л ы, а значениями функции — ч и с л а.

Будем рассматривать дуги (ориентированные) единичного круга с общим началом отсчета в точке $A(1, 0)$. Всякой данной дуге σ взаимно однозначно соответствует опирающийся на нее (в единичном круге) центральный угол α , а этому углу соответствует значение данной тригонометрической функции (если, разумеется, угол является допустимым значением аргумента для рассматриваемой тригонометрической функции). Следовательно, всякой дуге σ может быть поставлено в соответствие значение данной тригонометрической функции от угла α (опирающегося на дугу σ). Поэтому *тригонометрические функции можно рассматривать как функции дуги.*

Соответствие между дугами и значениями тригонометрических функций может быть установлено и непосредственно без применения угла как промежуточного аргумента; для этого достаточно отложить на окружности единичного круга данную дугу от начальной точки $A(1, 0)$, построить радиус-вектор OM , соединяющий начало координат с концом M дуги и рассмотреть координаты точки M (черт. 53)



Черт 53

Пусть x — произвольное действительное число; данному числу соответствует угол (дуга) α , измеряющийся (в принятой системе измерения углов или дуг) числом x , а углу (дуге) соответствуют значения его тригонометрических функций. Таким образом, *всякому действительному числу x соответствуют значения тригонометрических функций угла, измеряющегося этим числом.*

При рассмотрении тангенса, а также котангенса предполагается, что измеряющийся числом x угол α , является допустимым значением аргумента для данной функции.

Следовательно, тригонометрические функции можно рассматривать как функции числового аргумента, именно, они суть сложные функции, для которых промежуточным аргументом является угол (дуга)

$$\begin{array}{l} \text{число} \quad \text{угол} \\ x \rightarrow \alpha \rightarrow \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ \operatorname{tg} \alpha \\ \operatorname{ctg} \alpha \end{array} \right.$$

Таким образом, в итоге получается соответствие между числами: *всякому (допустимому) действительному числу x соответствует число — значение тригонометрической функции.*

При рассмотрении тригонометрических функций как функций числового аргумента условились в качестве единицы измерения дуг и углов принимать радиан. В силу этого соглашения символ $\sin 2$ следует толковать как синус угла (дуги), радианная мера которого выражается числом 2, символ $\cos (-5)$ означает косинус дуги, радианная мера которой выражается числом -5 и т. д.

Выбор единицы измерения дуг и углов не имеет принципиального значения. Выбор радиана не диктуется необходимостью. Радиан оказывается лишь удобной единицей, так как в радианном измерении формулы математического анализа, относящиеся к тригонометрическим функциям, принимают наиболее простой вид.

Если M — точка единичной окружности, изображающая данное число x , то косинус и синус суть абсцисса и ордината точки M ,

а тангенс и котангенс — отношения ее координат. Длина дуги AM с точностью до слагаемого, кратного 2π , равна $|x|$.

Из изложенного следует, что *аргумент тригонометрической функции может быть истолкован как угол, либо как дуга, либо число — мера угла (дуги).* В различных вопросах тригонометрии и в ее приложениях все эти интерпретации находят применение. Так, например, в формулах решения треугольников под аргументами тригонометрических функций обычно подразумеваются углы, а в формуле гармонического колебания $s = A \sin at$ аргумент t есть число, измеряющее время (коэффициент a — число, характеризующее частоту колебания).

При изучении тригонометрических функций от числового аргумента нередко (для удобства) сохраняется геометрическая терминология. Называя аргумент тригонометрической функции дугой или углом, *подразумевают под ним (аргументом) не саму дугу (угол), а число, ее измеряющее.* Сохраняя геометрическую терминологию, мы позволим себе вместо, например, такой фразы «синус числа x », говорить «синус дуги x » или «синус угла x ».

В геометрической теории тригонометрических функций от числового аргумента закон соответствия между значениями аргумента и тригонометрической функции устанавливается не прямым указанием математических операций (формулой), которые надлежит выполнить над аргументом, а геометрически. Однако, чтобы иметь возможность говорить о функции, необходимо наличие закона соответствия, в силу которого каждому (допустимому) значению аргумента соответствует определенное значение функции, но не существенно, каким способом этот закон устанавливается. Определение тригонометрических функций, не зависящее от геометрии и не связанное с геометрическими интерпретациями, дается в аналитической теории тригонометрических функций (см. гл. VIII).

Построить формулы, выражающие значения тригонометрических функций посредством только лишь алгебраических действий над аргументом, невозможно (см. § 36), поэтому элементарная математика (в частности, школьный курс) вынуждена строить тригонометрию на базе геометрической теории.

Ниже приведена мотивировка целесообразности введения радианного измерения углов и дуг

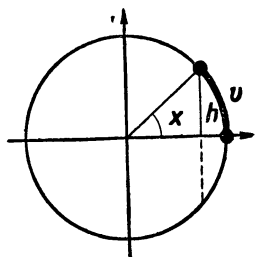
Примем за единицу углов некоторый угол e . Пусть в принятой единице положительный полный оборот (полная окружность) измеряется числом k

Известно, что предел отношения длины хорды к длине стягиваемой ею малой дуги равен 1:

$$\lim \frac{h}{v} = 1,$$

где v и h — длины дуги и соответствующей хорды.

Пусть число x является мерой угла (дуги) при единице измерения e (черт. 54). Не нарушая общности рассуждений, примем радиус окружности равным 1; тогда длина полной окружности равна 2π ; длина дуги, на которую опирается (как центральный) единичный угол e , равна $\frac{2\pi}{k}$; длина дуги, на которую опирается угол, измеряющийся числом x , равна $\frac{2\pi}{k} x$. Рассмотрим дугу, на которую опирается угол $2x$, и стягивающую ее хорду. Длины рассматриваемых дуги и хорды соответственно суть:



Черт. 54

Имеем:

$$v = \frac{2\pi}{k} \cdot 2x, \quad h = 2 \sin x.$$

откуда

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{h}{v} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\frac{2\pi}{k} x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{2\pi}{k}.$$

Вычислив производные (непосредственно путем приращений), получим:

$$\frac{d \sin x}{dx} = \frac{2\pi}{k} \cos x; \quad \frac{d \cos x}{dx} = -\frac{2\pi}{k} \sin x$$

и далее:

$$\int \sin x \, dx = -\frac{k}{2\pi} \cos x + C \quad \text{и} \quad \int \cos x \, dx = \frac{k}{2\pi} \sin x + C.$$

Соответствующие коэффициенты появятся в формулах дифференциального и интегрального исчисления, содержащих обратные тригонометрические функции. Разложения в степенные ряды косинуса и синуса примут следующий вид:

$$\cos x = 1 - \left(\frac{2\pi x}{k}\right)^2 \frac{1}{2!} + \dots; \quad \sin x = \frac{2\pi x}{k} - \left(\frac{2\pi x}{k}\right)^3 \frac{1}{3!} + \dots$$

Все эти формулы получают наиболее простой вид, если выбрать единицу измерения углов (дуг) при условии

$$\frac{2\pi}{k} = 1,$$

откуда

$$k = 2\pi.$$

Итак, мера полного оборота должна выражаться числом 2π , что имеет место, если за единицу измерения углов (дуг) принят радиан.

С изложенной точки зрения радианная система измерения углов и дуг является наиболее естественной.

В частности, если за единицу измерения углов (дуг) принять градус, то $k = 360^\circ$, а соответствующий коэффициент равен

$$\frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180} = 0,017453 \dots$$

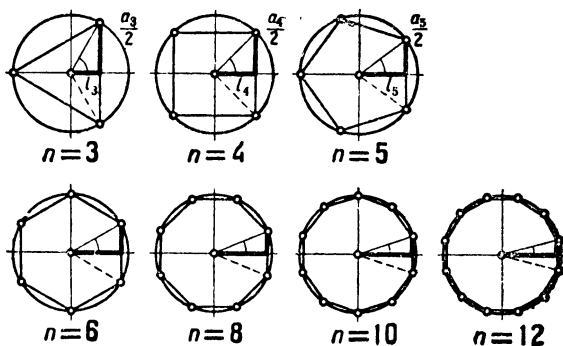
§ 10. Тригонометрические функции от некоторых частных значений аргумента

Если известна сторона a_n правильного n -угольника, вписанного в единичный круг, то легко вычислить значения тригонометрических функций от угла

$$\frac{\pi}{n} \left(= \frac{180^\circ}{n} \right).$$

Примем за начальный радиус, делящий пополам сторону вписанного n -угольника, тогда $\frac{a_n}{2}$ явится синусом угла $\frac{\pi}{n}$, а апофема $l_n = \sqrt{1 - \frac{a_n^2}{4}}$ — его косинусом:

$$\sin \frac{\pi}{n} = \frac{a_n}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{n} = \sqrt{1 - \frac{a_n^2}{4}} \quad (\text{черт. 55}).$$



Черт. 55

Воспользуемся формулами геометрии, выражающими стороны некоторых вписанных правильных многоугольников через радиус круга:

1°. При $n = 3$ имеем: $a_3 = \sqrt{3}$, $l_3 = \frac{1}{2}$ (всюду считаем радиус круга $R = 1$).

Следовательно,

$$\sin \frac{\pi}{3} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3},$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

2°. При $n = 4$ имеем: $a_4 = \sqrt{2}$, $l_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Следовательно,

$$\sin \frac{\pi}{4} = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1, \\ \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1.$$

3. При $n = 5$ имеем:

$$a_5 = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}, \quad l_5 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{4} (\sqrt{5} + 1).$$

(Применить формулу преобразования сложного квадратного радикала см. «Специальный курс элементарной алгебры», § 40.)
Следовательно,

$$\sin \frac{\pi}{5} = \sin 36^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}, \quad \cos \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}, \\ \operatorname{tg} \frac{\pi}{5} = \frac{2 \sqrt{5 - \sqrt{5}}}{\sqrt{2} (\sqrt{5} + 1)} = \frac{\sqrt{2} \sqrt{5} \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^3}}{4}.$$

4°. При $n = 6$ имеем: $a_n = 1$, $l_n = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Следовательно,

$$\sin \frac{\pi}{6} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

5°. При $n = 8$ имеем: $a_8 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$, $l_8 = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$.

Следовательно,

$$\sin \frac{\pi}{8} = \sin 22,5^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}, \\ \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}} = \sqrt{2} - 1.$$

6°. При $n = 10$ имеем: $a_n = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, $l_n = \frac{1}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$.

Следовательно,

$$\sin \frac{\pi}{10} = \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}, \quad \cos \frac{\pi}{10} = \frac{1}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}, \\ \operatorname{tg} \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{10 + 20\sqrt{5}}}.$$

7°. При $n = 12$ имеем: $a_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$, $l_n = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$.

Следовательно,

$$\sin \frac{\pi}{12} = \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},$$

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = 2 - \sqrt{3}.$$

П р и м е ч а н и е. Для найденных частных значений тригонометрических функций мы не пишем их приближенных значений в виде десятичных дробей. Эти приближенные значения даются в тригонометрических натуральных таблицах

Найденные значения тригонометрических функций дают возможность определить значения функций от ряда других углов, дополнительных до $\frac{\pi}{2}$.

8°. Так как $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{10} = 54^\circ$, то (в силу 3°):

$$\cos \frac{3\pi}{10} = \cos 54^\circ = \sin \frac{\pi}{5} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} \quad \text{и} \quad \sin \frac{3\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

9°. Так как $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10} = \frac{2\pi}{5} = 72^\circ$, то (в силу 6°):

$$\cos \frac{2\pi}{5} = \cos 72^\circ = \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4},$$

$$\sin \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4} \sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

10°. Так как $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} = \frac{5\pi}{12} = 75^\circ$, то (в силу 7°):

$$\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \quad \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Вычислив координаты вершин правильных многоугольников, расположенных в различных четвертях координатной плоскости, можно найти тригонометрические функции для ряда углов, оканчивающихся во II, III и IV четвертях.

$$11^\circ \quad \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \quad \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3};$$

$$\cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \quad \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{4\pi}{3} = \sqrt{3} \quad (\text{черт. 56}).$$

$$12^\circ \quad \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} = -1;$$

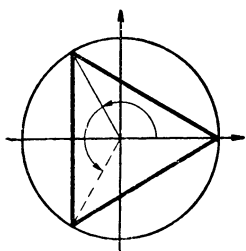
$$\sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} = 1;$$

$$\sin \frac{7\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{7\pi}{4} = -1 \quad (\text{черт. 55, } n=4).$$

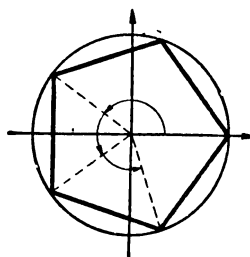
$$13^\circ. \quad \sin \frac{4\pi}{5} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}, \quad \cos \frac{4\pi}{5} = -\frac{\sqrt{5}+1}{4};$$

$$\sin \frac{6\pi}{5} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}, \quad \cos \frac{6\pi}{5} = -\frac{\sqrt{5}+1}{4};$$

$$\sin \frac{8\pi}{5} = -\frac{1}{4} \sqrt{10+2\sqrt{5}}, \quad \cos \frac{8\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \quad (\text{черт. 57}).$$



Черт. 56

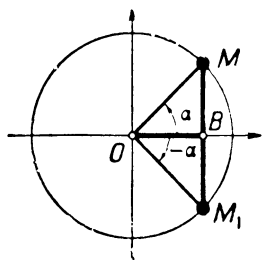


Черт. 57

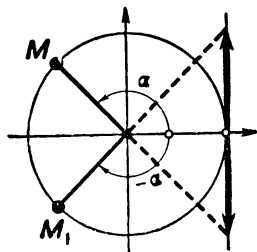
§ 11. Четность и нечетность тригонометрических функций

Теорема. Косинус является четной функцией, т. е. $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$; синус, тангенс и котангенс являются нечетными функциями, т. е.

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha, \quad \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha, \quad \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha.$$



Черт. 58



Черт. 59

Доказательство. Точки M и M_1 , единичной окружности, изображающие взаимно противоположные значения аргумента α и $-\alpha$, симметричны относительно оси OX (черт. 58). Следовательно, точки M и M_1 имеют одну и ту же абсциссу $x = OB$ и

взаимно противоположные ординаты $y = BM$ и $-y = BM_1$, откуда

$$x = \cos \alpha = \cos (-\alpha) \quad \text{и} \quad \sin (-\alpha) = -y = -\sin \alpha.$$

Для функции $\operatorname{tg} \alpha$ имеем

$$\operatorname{tg} (-\alpha) = \frac{\sin (-\alpha)}{\cos (-\alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha \quad (\text{черт. 59})$$

и аналогично: $\operatorname{ctg} (-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$, ч. т. д.

Примеры.

$$\begin{aligned} \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) &= -1, \quad \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \\ \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) &= \cos \left(\frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{6} \right) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}; \\ \sin \left(-\frac{3\pi}{4} \right) &= -\sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

§ 12. Нахождение угла (дуги)

по данному значению его тригонометрической функции

Пусть $f(\alpha)$ — данная тригонометрическая функция, а m — заданное число; требуется найти все те углы (дуги), для которых значение рассматриваемой функции $f(\alpha)$ равно m .

Иными словами, требуется найти множество всех решений уравнения

$$f(\alpha) = m.$$

Это уравнение называется **простейшим** тригонометрическим уравнением.

Мы будем рассматривать следующие четыре простейшие тригонометрические уравнения (по числу основных тригонометрических функций):

$$\cos \alpha = m, \quad \sin \alpha = m, \quad \operatorname{tg} \alpha = m, \quad \operatorname{ctg} \alpha = m.$$

Геометрическое решение.

Геометрическое решение простейшего тригонометрического уравнения заключается в построении угла (дуги) по данному значению его тригонометрической функции.

1.° Уравнение $\cos \alpha = m$. Для построения угла, косинус которого равен m , строим на оси абсцисс точку $P(m, 0)$ с абсциссой равной m (черт. 60).

При $|m| \leq 1$ точка $P(m, 0)$ лежит внутри единичного круга. Параллель оси OY , проходящая через точку P , пересечет единич-

ную окружность в двух точках M и M_1 , симметричных относительно оси абсцисс (черт. 60).

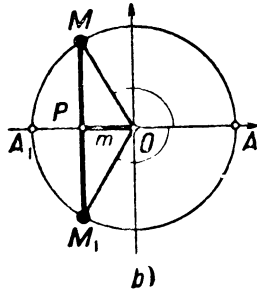
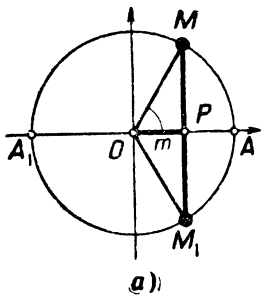
Радиусы OM и OM_1 определяют (в общем случае) два геометрически различные положения для конечной стороны искомого угла.

При $0 < m < 1$ радиусы OM и OM_1 расположены в I и IV (черт. 60, а) четвертях, а при $-1 < m < 0$ — во II и III четвертях (черт. 60, б). Все углы, косинус которых равен m , имеют конечной стороной либо радиус OM , либо радиус OM_1 .

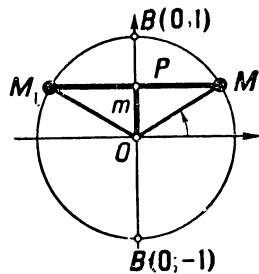
При $m = 1$ для конечной стороны искомого угла возможно лишь одно положение OA . В этом случае будем говорить, что точки M и M_1 совпали с точкой A , а радиусы OM и OM_1 совпали с радиусом OA . При $m = -1$ точки M и M_1 совпадают с точкой $A_1(-1, 0)$.

Если $|m| > 1$, то точка $P(m, 0)$ лежит вне единичного круга; в этом случае параллель оси OY через точку P не пересекает единичной окружности, а потому не существует дуг, имеющих данное значение косинуса.

Итак, простейшее уравнение $\cos \alpha = m$ имеет решения при $|m| \leq 1$ и не имеет решений при $|m| > 1$.



Черт. 60



Черт. 61

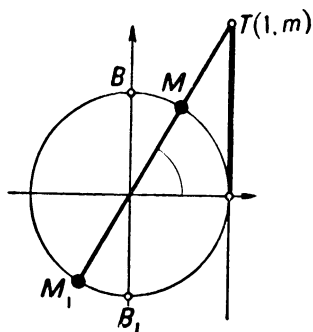
Уравнение $\sin \alpha = m$ решается аналогично предыдущему (черт. 61). Достаточно на оси ординат построить точку $P(0, m)$ и провести через нее параллель оси абсцисс. При $|m| < 1$ получим в пересечении с единичной окружностью две различные точки M и M_1 в правой и левой полуокружностях (соответственно), а для конечной стороны искомого угла два возможных положения OM и OM_1 . При $m = 1$ точки M и M_1 совпадут с точкой $B(0, 1)$, а при $m = -1$ — с точкой $B_1(0, -1)$. При $|m| > 1$ простейшее уравнение $\sin \alpha = m$ не имеет решений.

Уравнение $\operatorname{tg} \alpha = m$. Построим на оси тангенсов точку T с ординатой равной m (черт. 62). Прямая, соединяющая точку $T(1, m)$ с центром единичного круга, пересечет единичную окружность в двух диаметрально противоположных точках M и M_1 .

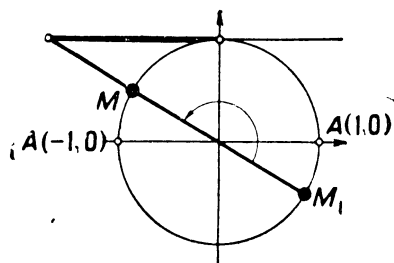
Радиусы OM и OM_1 суть геометрически различные положения конечной стороны искомого угла.

Итак, уравнение $\operatorname{tg} \alpha = t$ имеет решения при произвольном действительном t .

Уравнение $\operatorname{ctg} \alpha = t$ решается аналогично, геометрическое построение представлено на чертеже 63.



Черт. 62



Черт. 63

Главные решения и формулы общего решения

Уравнение $\cos \alpha = t$ (где $|t| \leq 1$). Все углы, имеющие косинус равный t и оканчивающиеся в верхней замкнутой полуплоскости (для этих углов OM служит конечной стороной, черт. 60), отличаются друг от друга на целое число полных оборотов. Наименьший положительный из этих углов содержится на сегменте $[0, \pi]$, этот угол называется главным решением простейшего уравнения $\cos \alpha = t$ или кратко главным углом (дугой) и обозначается символом $\arccos t$.

Итак, $\arccos t$ есть угол (дуга), содержащийся на сегменте $[0, \pi]$, косинус которого равен t

$$0 \leq \arccos t \leq \pi; \quad \cos(\arccos t) = t,$$

где $|t| \leq 1$.

При $|t| > 1$ символ $\arccos t$ не имеет смысла.

Практически для нахождения значения $\arccos t$ при заданном значении t пользуются тригонометрическими таблицами.

Примечание. При рассмотрении тригонометрических функций как функций числового аргумента неизвестное α в простейшем уравнении $\cos \alpha = t$ следует считать числом, в соответствии с этим под $\arccos t$ следует также понимать число: меру угла (дуги), а не сам угол (дугу). Однако в математической литературе принято сохранять геометрическую терминологию.

Примеры.

1. Имеем

$$\arccos 0 = \frac{\pi}{2}, \quad \arccos 1 = 0, \quad \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3};$$

$$\arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}, \quad \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}, \quad \arccos \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \frac{\pi}{5};$$

$$\arccos \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = \frac{\pi}{8}, \quad \arccos(-1) = \pi, \quad \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3};$$

$$\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3\pi}{4}, \quad \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6};$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right) = \frac{4\pi}{5};$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right) = \frac{7}{8}\pi.$$

$$2. \arccos \frac{1}{3} \approx \arccos 0,3333 \approx 70^\circ 32'.$$

Зная главное решение, можно найти множество всех решений простейшего уравнения $\cos \alpha = m$. В самом деле, все искомые дуги оканчиваются в двух точках (M —в верхней полуплоскости и M_1 —в нижней полуплоскости, черт. 64), симметричных относительно оси абсцисс (совпадение точек M и M_1 не исключается). Множество всех дуг, оканчивающихся в верхней полуплоскости, получим, прибавив к дуге $\arccos m$ любое целое число полных оборотов: $\arccos m + 2k\pi$. Множество всех дуг, оканчивающихся в нижней полуплоскости, получим, прибавив к симметричной относительно оси OX дуге $-\arccos m$ произвольное целое число полных оборотов: $-\arccos m + 2k\pi$.

Формула

$$\alpha = \pm \arccos m + 2k\pi$$

(k — произвольное целое число)дает множество всех решений простейшего уравнения $\cos \alpha = m$ **Примеры.**

Уравнение

Общее решение

$$1. \cos x = \frac{1}{2}.$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

$$2. \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$x = \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi.$$

$$3. \cos x = 1.$$

$$x = 2k\pi.$$

$$4. \cos x = -\frac{1}{2}.$$

$$x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2k\pi.$$

5. $\cos x = 0$.

$$x = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{4k \pm 1}{2} \pi = \frac{2n + 1}{2} \pi, \quad n -$$

произвольное целое число, так как $4k \pm 1$ изображает произвольное нечетное число:

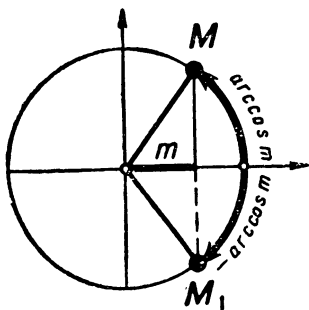
6. $\cos x = -1$.

$4k \pm 1 = 2n + 1$.
 $x = \pm \pi + 2k\pi = (2n + 1) \pi, \quad n -$ произвольное число, так как $2k \pm 1 -$ нечетное число

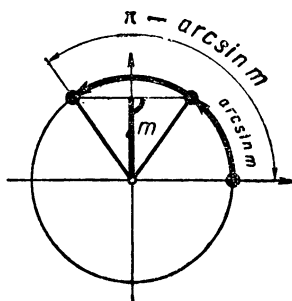
7. $\cos x = \frac{1}{3}$.

$$x = \pm \arccos \frac{1}{3} + 2k\pi = \pm 70^\circ 32' + 360^\circ n$$

(см. пример 2, стр. 52)



Черт. 64



Черт. 65

Уравнение $\sin \alpha = m$ решается аналогично предыдущему. Среди углов, служащих решением этого уравнения и оканчивающихся в правой полуплоскости, наименьший по абсолютной величине угол принадлежит сегменту $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Это решение называется главным: $\arcsin m$ (черт. 65).

Итак, $\arcsin m$ есть угол (дуга), содержащийся на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен m :

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin m \leq \frac{\pi}{2}, \quad \sin(\arcsin m) = m,$$

где $|m| \leq 1$.

При $|m| > 1$ символ $\arcsin m$ не имеет смысла.

Примеры.

1. $\arcsin 0 = 0, \quad \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}, \quad \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6};$

$$\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}, \quad \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}, \quad \arcsin \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} = \frac{\pi}{5};$$

$$\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}, \quad \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6};$$

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4} \quad \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3};$$

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\right) = -\frac{\pi}{5}.$$

$$2. \quad \arcsin\left(-\frac{3}{7}\right) \approx \arcsin(-0,4286) \approx -25^\circ 23'.$$

Угол $25^\circ 23'$, имеющий синус, равный 0,4286, находим по таблицам и пользуемся свойствами нечетности синуса.

Зная главное решение, можно найти множество всех решений уравнения $\sin \alpha = m$. Две дуги $\arcsin m$ и $\pi - \arcsin m$, оканчивающиеся в точках M и M_1 , симметричных относительно оси ординат (первая в правой полуплоскости, а вторая в левой) имеют синус равный m (по построению)

$$\sin(\arcsin m) = m, \quad \sin(\pi - \arcsin m) = m.$$

Множество всех искомых решений найдем, прибавив к каждой из этих дуг произвольное целое число полных оборотов

$$x = \begin{cases} \arcsin m + 2k\pi, \\ (\pi - \arcsin m) + 2k\pi. \end{cases}$$

Это выражение можно записать в виде одной формулы, заметив, что в верхней строке слагаемое $\arcsin m$ берется со своим знаком, а коэффициент при π — четное число $2k$; в нижней строке $\arcsin m$ берется с обратным знаком, а коэффициент при π есть нечетное число $2k + 1$.

Выражение

$$x = (-1)^n \arcsin m + n\pi$$

дает при четном $n = 2k$ верхнюю строку, а при нечетном $n = 2k + 1$ нижнюю строку.

Примеры.

У р а в н е н и е *

О б щ е е р е ш е н и е

$$1. \quad \sin x = \frac{1}{2}.$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi.$$

$$2. \quad \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + n\pi.$$

$$3. \quad \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$x = (-1)^n \left(-\frac{\pi}{3}\right) + n\pi = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{3} + n\pi.$$

$$4. \quad \sin x = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

$$x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{12} + n\pi.$$

$$5. \sin x = 1.$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{2} + n\pi = \frac{2n + (-1)^n}{2} \pi = \\ = \frac{4k+1}{2} \pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

так как при n четном $n = 2k$ и при n нечетном $n = 2k + 1$, имеем:

$$2n + (-1)^n = 4k + 1.$$

$$6. \sin x = -1.$$

$$x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{2} + n\pi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

$$7. \sin x = -\frac{3}{7}.$$

$$x = (-1)^{n+1} 25^\circ 23' + 180^\circ n$$

(см пример 2. стр. 54).

У р а в н е н и е $\operatorname{tg} \alpha = m$. Точка $B(0,1)$ и $B_1(0, -1)$, в которых оканчиваются дуги, не имеющие тангенса, разделяют единичную окружность на правую и левую (открытые) полуокружности; из двух диаметрально противоположных точек (см. черт. 62), в которых оканчиваются дуги, имеющие данный тангенс, первая расположена в правой, а вторая в левой (открытой) полуокружности. Дуга $\operatorname{arc} \operatorname{tg} m$, оканчивающаяся в правой полуокружности, имеет наименьшую абсолютную величину и называется главным решением.

Итак, $\operatorname{arc} \operatorname{tg} m$ есть угол (дуга), содержащийся в интервале $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, тангенс которого равен m

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arc} \operatorname{tg} m < \frac{\pi}{2}; \quad \operatorname{tg}(\operatorname{arc} \operatorname{tg} m) = m,$$

где $-\infty < m < \infty$.

Примеры.

$$1. \quad \operatorname{arc} \operatorname{tg} 0 = 0, \quad \operatorname{arc} \operatorname{tg} 1 = \frac{\pi}{4}, \quad \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6};$$

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} (\sqrt{2} - 1) = \frac{\pi}{8}, \quad \operatorname{arc} \operatorname{tg} (-1) = -\frac{\pi}{4};$$

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}, \quad \operatorname{arc} \operatorname{tg} (-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3};$$

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} (1 - \sqrt{2}) = -\frac{\pi}{8}.$$

$$2. \quad \operatorname{arc} \operatorname{tg} 3 \approx 71^\circ 34' \text{ (по таблицам).}$$

Общее решение простейшего уравнения $\operatorname{tg} \alpha = m$ находится по формуле

$$\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} m + k\pi$$

(где k — произвольное целое число).

В самом деле, при четном $k = 2n$ получается дуга, оканчивающаяся в той же точке, что и $\arctg m$, а при нечетном $k = 2n + 1$ (прибавляется нечетное число полуоборотов) — дуга, оканчивающаяся в диаметрально противоположной точке.

Примеры.

У р а в н е н и е	О б щ е е р е ш е н и е
1. $\operatorname{tg} x = 1.$	$x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$
2. $\operatorname{tg} x = -1.$	$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi.$
3. $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}.$	$x = \frac{\pi}{3} + k\pi.$
4. $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$	$x = -\frac{\pi}{6} + k\pi.$
5. $\operatorname{tg} x = 2.$	$x = 63^\circ 26' + 180^\circ n.$

У р а в н е н и е $\operatorname{ctg} \alpha = m$. Точка A и A_1 , в которых оканчиваются дуги не имеющие котангенса, разделяют единичную окружность на верхнюю и нижнюю (открытые) полуокружности, в соответствии с этим главное решение $\operatorname{arcc} \operatorname{ctg} m$ выбирается в верхней (открытой) полуокружности.

$\operatorname{arcc} \operatorname{ctg} m$ есть угол (дуга), содержащийся в интервале $(0, \pi)$, тангенс которого равен m :

$$0 < \operatorname{arcc} \operatorname{ctg} m < \pi, \quad \operatorname{ctg}(\operatorname{arcc} \operatorname{ctg} m) = m,$$

где $-\infty < m < \infty$.

Формула общего решения имеет вид:

$$\alpha = \operatorname{arcc} \operatorname{ctg} m + k\pi.$$

Примеры.

У р а в н е н и е	Г л а в н о е р е ш е н и е	О б щ е е р е ш е н и е
1. $\operatorname{ctg} x = 0,$	$\operatorname{arcc} \operatorname{ctg} 0 = \frac{\pi}{2},$	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$
2. $\operatorname{ctg} x = 1,$	$\operatorname{arcc} \operatorname{ctg} 1 = \frac{\pi}{4},$	$x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$
3. $\operatorname{ctg} x = -1,$	$\operatorname{arcc} \operatorname{ctg} (-1) = \frac{3\pi}{4},$	$x = \frac{3}{4}\pi + k\pi.$
4. $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3},$	$\operatorname{arcc} \operatorname{ctg} (-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6},$	$x = \frac{5}{6}\pi + k\pi.$

Теорема. Какова бы ни была система двух действительных чисел (u, v) , удовлетворяющих условию

$$u^2 + v^2 = 1,$$

существует единственная дуга в промежутке $0 \leq \alpha < 2\pi$ (т. е. в пределах первой окружности), косинус и синус которой имеют данные значения u и v :

$$\cos \alpha = u, \quad \sin \alpha = v. \quad (1)$$

Доказательство. На плоскости существует единственная точка M с абсциссой u и с ординатой v . Точка M лежит на единичной окружности, так как

$$\rho = |OM| = \sqrt{u^2 + v^2} = 1.$$

Радиус OM определяет единственный угол α в промежутке $0 \leq \alpha < 2\pi$, для которого косинус и синус имеют данные значения u и v , ч. т. д.

В поле действительных чисел существует бесконечное множество значений аргумента, удовлетворяющих условию (1); каждое из этих значений отличается от α на слагаемое вида $2k\pi$ (где k — целое число).

Следствие. Какова бы ни была система действительных чисел u, v, w, z , взятых при условиях

$$u^2 + v^2 = 1, \quad z = \frac{v}{u}, \quad w = \frac{u}{v},$$

в промежутке $0 \leq \alpha < 2\pi$ существует единственное значение аргумента α , при котором

$$\cos \alpha = u, \quad \sin \alpha = v, \quad \operatorname{tg} \alpha = z, \quad \operatorname{ctg} \alpha = w.$$

В самом деле, поставленным условиям удовлетворяет дуга, для которой выполняются равенства (1).

§ 13. Соотношения между тригонометрическими функциями, тригонометрические тождества

Мы будем рассматривать выражения вида

$$U(\cos \alpha, \sin \alpha, \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{ctg} \alpha), \quad (U)$$

получающиеся из некоторого аналитического выражения

$$U(u, v, w, z)$$

заменой его аргументов u, v, w, z посредством подстановки

$$u = \cos \alpha, \quad v = \sin \alpha, \quad w = \operatorname{tg} \alpha, \quad z = \operatorname{ctg} \alpha.$$

Для выражения

$$U(\cos \alpha, \sin \alpha, \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{ctg} \alpha) \quad (U)$$

допустимым считается произвольное значение α , при котором выполняемы все математические операции, содержащиеся в (U) (соответствующее значение U является действительным числом).

П р и м е ч а н и е. В частности, выражение (U) может не содержать некоторых тригонометрических функций, в этом случае выражение $U(u, v, w, z)$ не содержит соответствующих промежуточных аргументов.

Выражение (U) называется алгебраическим выражением от тригонометрических функций, если $U(u, v, w, z)$ есть алгебраическое выражение от промежуточных аргументов u, v, w, z . В частности, выражение (U) называется многочленом, дробным рациональным и иррациональным выражением от тригонометрических функций, если выражение $U(u, v, w, z)$ является (соответственно) многочленом, дробным или иррациональным от промежуточных аргументов.

При совместном задании двух или нескольких выражений допустимыми считаются значения аргумента, допустимые для каждого из данных выражений (в отдельности). Множество всех таких значений предполагается непустым.

Равенство

$$U(\cos \alpha, \sin \alpha, \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{ctg} \alpha) = V(\cos \alpha, \sin \alpha, \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{ctg} \alpha) \quad (I)$$

называется тригонометрическим тождеством, если оно выполняется при всех допустимых значениях α , при которых правая и левая части рассматриваются совместно.

Если выражения

$$U(\cos \alpha, \sin \alpha, \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{ctg} \alpha) \text{ и } V(\cos \alpha, \sin \alpha, \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{ctg} \alpha)$$

тождественны, то множества допустимых значений аргумента α для каждого из них в отдельности могут быть различными. В самом деле, могут существовать такие значения α , при которых одно из выражений U и V теряет смысл, а другое смысла не теряет, но вместе с тем существует непустое множество значений α , при которых оба данные выражения имеют смысл и тогда их значения равны между собой.

Замена выражения другим, ему тождественным, называется тождественным преобразованием данного выражения. При выполнении тождественного преобразования множество допустимых значений аргумента α может измениться.

Рассмотрим некоторое тригонометрическое тождество (I); возможен один из следующих случаев:

С л у ч а й 1°. Равенство (I) не является тождеством относительно промежуточных аргументов u, v, w, z .

С л у ч а й 2°. Равенство (I) является тождеством относительно промежуточных аргументов u, v, w, z

$$U(u, v, w, z) \equiv V(u, v, w, z).$$

В первом случае тригонометрическое тождество называется *нетривиальным*, а во втором — *тривиальным*.

Примерами тривиальных тождеств могут служить следующие тождества:

$$(\cos \alpha + \sin \alpha)^2 = \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha \sin \alpha + \sin^2 \alpha;$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha}.$$

В самом деле,

$$(u + v)^2 \equiv u^2 + 2uv + v^2;$$

$$\frac{1}{w} + \frac{1}{z} = \frac{w + z}{wz}.$$

Тривиальные тригонометрические тождества не представляют интереса; а потому ниже будут рассматриваться *нетривиальные* тождества.

Все изложенное выше относится (с надлежащими коррективами) к аналитическим выражениям, содержащим (в качестве промежуточных аргументов) тригонометрические функции от нескольких различных аргументов. Примером такого выражения может служить выражение

$$\frac{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + 1}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta + 1},$$

содержащее тригонометрические функции от аргумента α и от аргумента β .

Основные соотношения.

Теорема. При произвольном значении аргумента α имеет место тождество

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Доказательство. Точка с координатами

$$x = \cos \alpha, \quad y = \sin \alpha$$

расположена на единичной окружности, а потому квадрат ее расстояния до начала координат равен 1

$$x^2 + y^2 = 1, \text{ или } \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1, \text{ ч. т. д.}$$

Левую часть доказанного тождества принято называть *тригонометрической единицей*.

Присоединив к доказанному тождеству равенства, определяющие тангенс и котангенс, получим систему трех основных соотношений, связывающих значения четырех тригонометрических функций:

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}. \quad (1)$$

Из основных тождеств (1) можно в качестве следствия вывести сколько угодно других тригонометрических тождеств. Мы отметим наиболее часто встречающиеся следствия тождеств (1).

1°. Из второго и третьего тождеств следует:

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1 \quad (2)$$

при всех значениях α , для которых имеют смысл тангенс и котангенс.

2°. Разделив первое тождество (1) почленно на $\sin^2 \alpha$ (если $\sin \alpha \neq 0$), а затем на $\cos^2 \alpha$ (если $\cos \alpha \neq 0$), получим

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad \text{и} \quad \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}; \quad (3)$$

или в другом обозначении

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha \quad \text{и} \quad \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \operatorname{cosec}^2 \alpha. \quad (3')$$

Из соотношений (1) можно выразить значение произвольной тригонометрической функции через соответствующее значение любой другой функции.

Из первого тождества (1) можно выразить косинус через синус и, подставив остальные два соотношения, получить выражения для тангенса и котангенса через синус:

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}, \quad (4)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$$

(знак во всех равенствах берется либо верхний, либо нижний).

Аналогично получаются выражения тригонометрических функций через косинус:

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha &= \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}, \\ \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{\cos \alpha}{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Первое соотношение (3), являющееся следствием (1), позволяет выразить косинус через тангенс, из второго и третьего соотношений (1) найдем выражение синуса и котангенса через тангенс.

Имеем:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}, \quad \sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}. \quad (6)$$

Аналогично находятся выражения тригонометрических функций через котангенс:

$$\cos \alpha = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}, \quad \sin \alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}. \quad (7)$$

Формулы (4), (5), (6) и (7) позволяют по заданному (возможному) значению одной из тригонометрических функций найти значения других функций. Произвол в выборе знака показывает, что задача (в общем случае) имеет два решения. т. е. при данном значении одной функции возможны две различные системы значений всех четырех функций. В самом деле, по заданному значению одной из тригонометрических функций можно построить (в общем случае) два геометрически различные положения конечной стороны угла. Дополнительным условием для определения положения конечной стороны может служить указание четверти, в которой она расположена; этим условием определится знак перед радикалом.

Примеры.

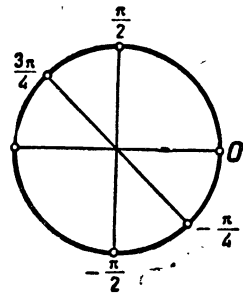
1. Найти множество допустимых значений аргумента для выражения

$$\frac{\sin \alpha + \operatorname{ctg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha}.$$

Решение. Из множества допустимых значений α следует исключить те значения, при которых:

- а) $\operatorname{tg} \alpha$ теряет смысл, т. е. значения $\frac{\pi}{2} + k\pi$;
- б) $\operatorname{ctg} \alpha$ теряет смысл, т. е. значения вида $k_1\pi$;
- в) $\operatorname{tg} \alpha = -1$, т. е. значения вида:

$$\arctg(-1) + k_2\pi = -\frac{\pi}{4} + k_2\pi.$$



Черт. 66

На чертеже 66 отмечены концы дуг, не принадлежащих множеству допустимых значений α . В частности, в пределах первой окружности $[0, 2\pi]$ данное выражение имеет смысл в следующих интервалах:

$$\left(0, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi\right), \left(\frac{3}{4}\pi, \pi\right), \left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right), \left(\frac{3}{2}\pi, \frac{7}{4}\pi\right), \left(\frac{7}{4}\pi, 2\pi\right).$$

2. Доказать тождество

$$1 - (\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha) = 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha.$$

Решение.

$$\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) (\cos^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha) =$$

(разложение на множители)

$$\begin{aligned}
&= \cos^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha = \\
&= (\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha) - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \\
&= (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)^2 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \quad (\text{выделение полного квадрата}) \\
&= 1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha.
\end{aligned}$$

откуда следует доказываемое тождество.

3. Дано

$$\sin x + \cos x = a$$

Найти

$$\sin^5 x + \cos^5 x.$$

Р е ш е н и е. Имеем

$$\begin{aligned}
\sin^5 x + \cos^5 x &= (\sin x + \cos x) (\sin^4 x - \sin^3 x \cos x + \sin^2 x \cos^2 x - \\
&\quad - \sin x \cos^3 x + \cos^4 x) = (\sin x + \cos x) [(\sin^4 x + \cos^4 x) - \\
&\quad - \sin x \cos x (\sin^2 x + \cos^2 x) + \sin^2 x \cos^2 x].
\end{aligned}$$

Возведя почленно в квадрат заданное соотношение, получим

$$(\sin^2 x + \cos^2 x) + 2 \sin x \cos x = a^2,$$

откуда

$$\sin x \cos x = \frac{a^2 - 1}{2};$$

имеем далее (выделяем полный квадрат)

$$\begin{aligned}
(\sin^4 x + \cos^4 x) &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = \\
&= 1 - \frac{(a^2 - 1)^2}{2} = \frac{1 + 2a^2 - a^4}{2}.
\end{aligned}$$

Подставив в искомое выражение, получим

$$\sin^5 x + \cos^5 x = a \left[\frac{1 + 2a^2 - a^4}{2} - \frac{a^2 - 1}{2} + \frac{(a^2 - 1)^2}{4} \right] = \frac{a}{4} (5 - a^4).$$

4. Положим

$$x_1 = \sin \varphi_1, \quad x_2 = \cos \varphi_1 \sin \varphi_2, \quad x_3 = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin \varphi_3,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_{n-1} = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \dots \cos \varphi_{n-2} \sin \varphi_{n-1}.$$

$$x_n = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \dots \cos \varphi_{n-1} \cos \varphi_n.$$

Доказать, что при всех значениях $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}$ имеет место тождество

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1.$$

Р е ш е н и е.

$$\begin{aligned}
x_{n-1}^2 + x_n^2 &= \cos^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_2 \dots \cos^2 \varphi_{n-2} (\sin^2 \varphi_{n-1} + \cos^2 \varphi_{n-1}) = \\
&= \cos^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_2 \dots \cos^2 \varphi_{n-2}.
\end{aligned}$$

Далее

$$x_{n-2}^2 + x_{n-1}^2 + x_n^2 = \cos^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_2 \dots \cos^2 \varphi_{n-3} \sin^2 \varphi_{n-2} + \\ + \cos^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_2 \dots \cos^2 \varphi_{n-3} \cos^2 \varphi_{n-2} = \cos^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_2 \dots \cos^2 \varphi_{n-3}$$

и так далее, пока не получим

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \sin^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_1 = 1.$$

5. Доказать, что если имеет место равенство

$$(1 + \cos \alpha)(1 + \cos \beta)(1 + \cos \gamma) = (1 - \cos \alpha)(1 - \cos \beta)(1 - \cos \gamma),$$

то значение каждой части равно $|\sin \alpha| \cdot |\sin \beta| \cdot |\sin \gamma|$.

Решение. Умножим обе части на $(1 + \cos \alpha)(1 + \cos \beta)(1 + \cos \gamma)$:

$$[(1 + \cos \alpha)(1 + \cos \beta)(1 + \cos \gamma)]^2 = (1 - \cos^2 \alpha)(1 - \cos^2 \beta)(1 - \cos^2 \gamma) = \\ = \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta \cdot \sin^2 \gamma.$$

Выражение

$$(1 + \cos \alpha)(1 + \cos \beta)(1 + \cos \gamma)$$

неотрицательно при любых значениях α , β и γ (так как $|\cos x| \leq 1$), следовательно:

$$(1 + \cos \alpha)(1 + \cos \beta)(1 + \cos \gamma) = |\sin \alpha| \cdot |\sin \beta| \cdot |\sin \gamma|.$$

Если $\sin \alpha$, $\sin \beta$, $\sin \gamma$ положительны, например, в случае острых углов α , β и γ , то знак абсолютной величины излишен.

6. Упростить выражение

$$U(x) = \frac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} - \frac{\sin x + \cos x}{\operatorname{tg}^2 x - 1}.$$

Решение. Преобразуем вторую дробь:

$$\frac{\sin x + \cos x}{\operatorname{tg}^2 x - 1} = \frac{\cos^2 x (\sin x + \cos x)}{\sin^2 x - \cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\sin x - \cos x}.$$

Следовательно,

$$U(x) = \frac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} - \frac{\cos^2 x}{\sin x - \cos x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x - \cos x} = \\ = \sin x + \cos x.$$

Имеем окончательно

$$\frac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} - \frac{\sin x + \cos x}{\operatorname{tg}^2 x - 1} = \sin x + \cos x.$$

Примечание. В полученном тождестве множества допустимых значений аргумента для левой и правой частей (рассматриваемых по отдельности) различны. В самом деле, выражение $\sin x + \cos x$ имеет смысл при всех значениях x , а выражение в левой части имеет смысл при всех x , кроме значений, удовлетворяющих хотя бы одному из следующих условий:

$$\sin x = \cos x, \quad \operatorname{tg} x = \pm 1, \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Так, в частности, значения: $x = \frac{\pi}{4}$; $x = \frac{3}{4}\pi$; $x = \frac{\pi}{2}$ не являются допустимыми для левой части.

Следовательно, в данном случае в результате выполнения тождественного преобразования множество допустимых значений аргумента x расширилось.

7. Выразить через tg и ctg дробь $\frac{1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}$.

Решение. Введем в числителе квадрат тригонометрической единицы:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} &= \frac{(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)^2}{\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha} = \frac{\cos^4 \alpha + 2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha} = \\ &= \frac{\cos^4 \alpha}{\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha} + 2 + \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha} = \operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha + 2. \end{aligned}$$

8. Выразить через $\operatorname{tg} \alpha$ дробь

$$P = \frac{1}{a \sin^2 \alpha + b \sin \alpha \cos \alpha + c \cos^2 \alpha}.$$

Решение. Разделим числитель и знаменатель на $\cos^2 \alpha$:

$$P = \frac{\frac{1}{\cos^2 \alpha}}{a \operatorname{tg}^2 \alpha + b \operatorname{tg} \alpha + c} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{a \operatorname{tg}^2 \alpha + b \operatorname{tg} \alpha + c}.$$

Примечание. Если $a \neq 0$, то при $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$ данное выражение не теряет смысла, но выражение, полученное в качестве окончательного результата, теряет смысл.

9. Доказать тождество

$$\frac{1 + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}{\sec^2 x + \operatorname{tg} x} - \frac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{cosec}^2 x + \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ctg}^2 x} = \sin x \cos x.$$

Решение. Преобразуем слагаемые левой части:

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{1 + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}{\sec^2 x + \operatorname{tg} x} &= \frac{1 + \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x}}{(1 + \operatorname{tg}^2 x) + \operatorname{tg} x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\cos x}{\sin x}; \\ \text{b) } \frac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{cosec}^2 x + \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ctg}^2 x} &= \frac{\operatorname{ctg} x}{(1 + \operatorname{ctg}^2 x) + \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ctg}^2 x} = \\ &= \frac{\operatorname{ctg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{\cos^3 x}{\sin x}. \end{aligned}$$

Преобразуем левую часть:

$$\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos^3 x}{\sin x} = \frac{\cos x (1 - \cos^2 x)}{\sin x} = \cos x \sin x; \quad \text{ч т д.}$$

10. Выразить

$$U(x) = \operatorname{cosec} x \sqrt{\frac{1}{1 + \cos x} + \frac{1}{1 - \cos x}} - \sqrt{2}$$

через $\operatorname{ctg} x$.

Решение. Имеем:

$$\sqrt{\frac{1}{1 + \cos x} + \frac{1}{1 - \cos x}} = \sqrt{\frac{2}{1 - \cos^2 x}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sin^2 x}} = \frac{\sqrt{2}}{|\sin x|}.$$

Следовательно

$$U(x) = \sqrt{2} \left(\frac{1}{|\sin x|} - 1 \right).$$

Для дуг, оканчивающихся в верхней полуокружности $2k\pi < x < (2k+1)\pi$, имеем $\sin x > 0$ и $|\sin x| = \sin x$, а потому

$$U(x) = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) = \sqrt{2} \operatorname{ctg}^2 x.$$

Для дуг, оканчивающихся в нижней полуокружности

$$(2k+1)\pi < x < 2(k+1)\pi,$$

имеем $\sin x < 0$ и $|\sin x| = -\sin x$, а потому

$$U(x) = -\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sin^2 x} + 1 \right) = -\sqrt{2} (\operatorname{ctg}^2 x + 2).$$

Итак,

$$U(x) = \begin{cases} \sqrt{2} \operatorname{ctg}^2 x, & \text{если } 2k\pi < x < (2k+1)\pi; \\ -\sqrt{2} (\operatorname{ctg}^2 x + 2), & \text{если } (2k+1)\pi < x < 2(k+1)\pi \end{cases}$$

11. Упростить выражение

$$P(\varphi) = \left(\sqrt{\frac{1-\sin \varphi}{1+\sin \varphi}} - \sqrt{\frac{1+\sin \varphi}{1-\sin \varphi}} \right) \left(\sqrt{\frac{1-\cos \varphi}{1+\cos \varphi}} - \sqrt{\frac{1+\cos \varphi}{1-\cos \varphi}} \right).$$

Решение. Так как $|\sin \varphi| \leq 1$ и $|\cos \varphi| \leq 1$, то все подкоренные выражения неотрицательны, а потому применимы правила действия над радикалами. Имеем:

$$\sqrt{\frac{1-\sin \varphi}{1+\sin \varphi}} - \sqrt{\frac{1+\sin \varphi}{1-\sin \varphi}} = \frac{(1-\sin \varphi) - (1+\sin \varphi)}{\sqrt{1-\sin^2 \varphi}} = -\frac{2 \sin \varphi}{|\cos \varphi|}.$$

Аналогично получим

$$\sqrt{\frac{1-\cos \varphi}{1+\cos \varphi}} - \sqrt{\frac{1+\cos \varphi}{1-\cos \varphi}} = -\frac{2 \cos \varphi}{|\sin \varphi|}.$$

Следовательно,

$$P = \frac{4 \sin \varphi \cos \varphi}{|\cos \varphi| |\sin \varphi|} = 4 \frac{\cos \varphi}{|\cos \varphi|} \frac{\sin \varphi}{|\sin \varphi|}.$$

Для дуг, оканчивающихся в верхней открытой полуокружности, имеем $\sin \varphi > 0$, а потому $|\sin \varphi| = \sin \varphi$; для дуг, оканчивающихся в нижней полуокружности, $\sin \varphi < 0$, а потому $|\sin \varphi| = -\sin \varphi$.

Для дуг, оканчивающихся в правой полуокружности, $|\cos \varphi| = \cos \varphi$, а для дуг, оканчивающихся в левой полуокружности, $|\cos \varphi| = -\cos \varphi$.

Следовательно,

$$P(\varphi) = \begin{cases} 4, & \text{если } 2k\pi < \varphi < \frac{\pi}{2} + 2k\pi & \text{(I четверть);} \\ -4, & \text{если } \frac{\pi}{2} + 2k\pi < \varphi < (2k+1)\pi & \text{(II четверть);} \\ 4, & \text{если } (2k+1)\pi < \varphi < \frac{3}{2}\pi + 2k\pi & \text{(III четверть);} \\ -4, & \text{если } \frac{3}{2}\pi + 2k\pi < \varphi < 2(k+1)\pi & \text{(IV четверть).} \end{cases}$$

График функции, определяемой выражением $P(\varphi)$, представлен на чертеже 67, точки $\varphi = k \frac{\pi}{2}$ являются точками разрыва 1 рода.

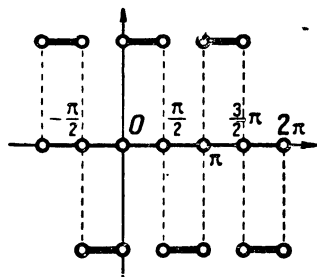
12. Исключить x из системы равенства

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = a, \quad \operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x = b.$$

Решение. Требуется найти соотношение между параметрами a и b , являющееся необходимым (но в общем случае недостаточным), существования значения x , при которых выполняются оба данные равенства.

Возведи в квадрат первое равенство, получим

$$\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x + 2 \operatorname{tg}^2 x \operatorname{ctg}^2 x = a^2.$$



Черт. 67

В силу второго равенства и основного тождества $\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x = 1$ получим искомое соотношение:

$$b + 2 = a^2.$$

13. Исключить x из системы равенств

$$\operatorname{cosec} x - \sin x = m, \quad \sec x - \cos x = n.$$

Решение. Умножим первое на $\sin x$, а второе на $\cos x$

$$1 - \sin^2 x = m \sin x, \quad 1 - \cos^2 x = n \cos x \quad (1)$$

или

$$\cos^2 x = m \sin x, \quad \sin^2 x = n \cos x. \quad (2)$$

Перемножим почленно и сократим на $\sin x \cos x^*$

$$\sin x \cos x = mn. \quad (3)$$

Умножив почленно равенства (2) на равенство (3), после сокращения получим

$$\cos^3 x = m^2 n, \quad \sin^3 x = n^2 m,$$

откуда

$$\cos^2 x = m \sqrt[3]{mn^2}, \quad \sin^2 x = n \sqrt[3]{m^2 n}.$$

Сложив почленно, получим искомое соотношение между параметрами m и n

$$m \sqrt[3]{mn^2} + n \sqrt[3]{m^2 n} = 1.$$

В некоторых случаях тригонометрические тождества могут быть интерпретированы геометрически в предположении, что аргумент является острым углом.

Примеры. 14. Доказать тождество

$$\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

и истолковать его геометрически для острого угла α .

* Значения x , при которых $\cos x = 0$ или $\sin x = 0$, не принадлежат множеству допустимых значений аргумента для левых частей равенств (1) (рассматриваемых совместно).

Решение. Для доказательства тождества преобразуем левую часть следующим образом:

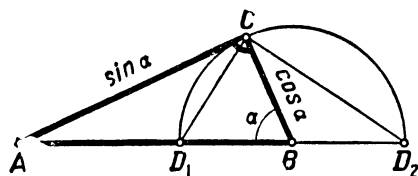
$$\frac{\sin \alpha (1 + \cos \alpha)}{(1 - \cos \alpha) (1 + \cos \alpha)} = \frac{\sin \alpha (1 + \cos \alpha)}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Предположим, что α — острый угол, построим прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой, равной 1, и с острым углом, равным α . Из построения, представленного на чертеже 68, следует, что $\triangle AD_1C \sim \triangle ACD_2$, а потому

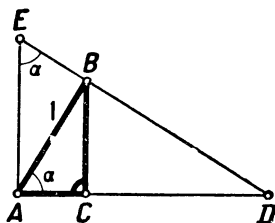
$$\frac{AC}{AD_1} = \frac{AD_2}{AC};$$

подставив $AC = \sin \alpha$, $AD_1 = 1 - \cos \alpha$, $AD_2 = 1 + \cos \alpha$, получим данное тождество.

Примечание. Изложенные геометрические рассуждения доказательством тождества служить не могут, так как тождество верно при произвольных допустимых значениях α , а в геометрических рассуждениях считается, что $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.



Черт. 68



Черт. 69

15. Истолковать геометрически тождество

$$\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sec \alpha + \operatorname{cosec} \alpha} = \sin \alpha \cos \alpha,$$

считая α острым углом.

Решение. Рассмотрим $\triangle ABC$ с гипотенузой, равной 1, и с острым углом, равным α (черт. 69). Построим $\triangle ADE$, у которого A — прямой угол и $DE \perp AB$; имеем: $\angle DEA = \angle BAC$ (углы с перпендикулярными сторонами), следовательно, $\triangle ABC \sim \triangle AED$, а потому

$$\frac{AC + BC}{AD + AE} = \frac{AB}{DE}.$$

Но $AC = \cos \alpha$, $BC = \sin \alpha$, $AB = 1$; $AD = \sec \alpha$; $AE = \operatorname{cosec} \alpha$;

$$DE = DB + BE = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}.$$

Подставив в (1), получим данное тождество.



§ 14. Теоремы сложения

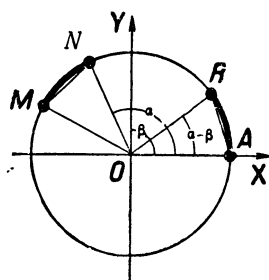
Теоремы сложения для тригонометрических функций утверждают, что *тригонометрические функции от суммы (разности) двух слагаемых выражаются алгебраически через значения тригонометрических функций от слагаемых**.

Доказательство теорем сложения заключается в установлении соответствующих формул.

Теорема сложения для косинуса. При произвольных значениях α и β имеют место теоремы сложения, выражающиеся следующими формулами:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \quad (C_{\alpha+\beta});$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta. \quad (C_{\alpha-\beta}).$$



Черт. 70

Доказательство.** Пусть M и N — точки единичной окружности, изображающие данные значения α и β . Координаты точек M и N соответственно суть (черт. 70)

$$x_M = \cos \alpha, \quad y_M = \sin \alpha;$$

$$x_N = \cos \beta, \quad y_N = \sin \beta.$$

* Не следует считать очевидным существование таких формул. Так, например, логарифм от суммы $\log(x + y)$ невозможно выразить алгебраически через $\log x$ и $\log y$. В этом смысле и следует понимать часто применяющуюся (неудачную) фразу: «сумму нельзя логарифмировать».

** За основу мною принято изложение, данное в работе П. М. Котельникова с упрощением, предложенным Н. И. Фломиным (журн. «Математика в школе» № 5, 1958).

Вычислим квадрат расстояния между точками M и N по общей формуле расстояния между двумя точками на плоскости (см. § 4):

$$MN^2 = (x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2 = (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2 = 2(1 - \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta).$$

Рассмотрим разность данных дуг α и β , это есть дуга с началом в точке N и с концом в точке M , измеряющаяся числом $\alpha - \beta$. Отложим дугу NM от начальной точки $A(1, 0)$. Пусть R — конец отложенной дуги, по построению имеем $\cup AR = \cup MN$. Хорды AR и NM , соединяющие концы равных дуг $\cup AR$ и $\cup MN$, равны между собой $AR = NM^*$.

Точка R имеет координаты

$$x = \cos(\alpha - \beta), \quad y = \sin(\alpha - \beta).$$

Вычислим квадрат расстояния между точками A и R :

$$AR^2 = [\cos(\alpha - \beta) - 1]^2 + \sin^2(\alpha - \beta) = 2[1 - \cos(\alpha - \beta)].$$

Подставив в равенство $NM^2 = AR^2$ найденные выражения для его левой и правой частей, получим формулу $(C_{\alpha - \beta})$.

Заменив β на $-\beta$ в формуле $(C_{\alpha - \beta})$, получим формулу $(C_{\alpha + \beta})$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos[\alpha - (-\beta)] = \cos \alpha \cos(-\beta) + \sin \alpha \sin(-\beta) = \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \quad \text{ч. т. д.} \end{aligned}$$

В изложенном доказательстве не налагается никаких ограничений на аргументы α и β ; это могут быть дуги произвольной величины. Формула расстояния между двумя точками на координатной плоскости верна при любом расположении данных точек, а потому приведенное доказательство носит общий характер, оно справедливо при произвольных значениях α и β^{**} .

Следствие (формулы дополнительных аргументов): *если сумма двух аргументов α и β равна $\frac{\pi}{2}$, то косинус одного из этих аргументов равен синусу другого, т. е.*

$$\text{если } \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}, \text{ то } \cos \alpha = \sin \beta, \quad \cos \beta = \sin \alpha.$$

* Каковы бы ни были дуги NM и AR , они конгруэнтны, а в конгруэнтных фигурах расстояния между соответствующими точками равны

** Мы рекомендуем учащимся построить чертеж 70, придавая α и β различные конкретные значения, например $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 150^\circ$, $\alpha = -45^\circ$, $\beta = -50^\circ$, $\alpha = 150^\circ$, $\beta = -280^\circ$ и т. п.

В самом деле, вычислим, например, $\cos \alpha = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right)$ по формуле ($C_{\alpha - \beta}$):

$$\cos \alpha = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) = \cos \frac{\pi}{2} \cos \beta + \sin \frac{\pi}{2} \sin \beta = \sin \beta.$$

Теорема сложения для синуса. При произвольных значениях α и β имеют место теоремы сложения, выражающиеся следующими формулами:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, \quad (S_{\alpha + \beta})$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta. \quad (S_{\alpha - \beta})$$

Доказательство. Синус суммы $\alpha + \beta$ равен косинусу дополнительного до $\frac{\pi}{2}$ аргумента $\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)$. Этот последний аргумент можно представить в виде разности следующим образом:

$$\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta) = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) - \beta.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \cos \left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta) \right] = \cos \left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) - \beta \right] = \\ &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \cos \beta + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \sin \beta = \\ &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

Заменив в формуле β на $-\beta$, получим формулу синуса разности

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta) = \\ &= \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta, \text{ ч. т. д.} \end{aligned}$$

Другое доказательство теорем сложения. Это доказательство опирается на основные положения теории проекций.

Выведем формулу ($C_{\alpha + \beta}$). Отложим от конечной стороны угла α угол β (черт. 71). Пусть OS есть положение конечной стороны угла β . На луче OS возьмем точку M на расстоянии, равном 1 от точки O : $|OM| = 1$. Косинус угла $\alpha + \beta$ есть проекция радиуса-вектора OM на начальную сторону OX угла α : $\text{пр}_x OM = \cos(\alpha + \beta)$. Для угла β роль горизонтальной оси играет ось OX' , совпадающая с конечной стороной угла α . Система взаимно перпендикулярных осей $X'OY'$ может быть получена из системы XOY поворотом на угол α .

Пусть ON есть проекция радиуса-вектора OM на ось OX' . Радиус-вектор OM есть замыкающая ломаной ONM . Спроектируем эту ломаную на ось OX . По теореме о проекции ломаной имеем

$$\cos(\alpha + \beta) = \text{пр}_x ON + \text{пр}_x NM. \quad (1)$$

Отрезок ON лежит на оси OX' , и его величина равна

$$ON = \text{пр}_{x'} OM = \cos \beta,$$

поэтому

$$\text{пр}_x \text{ON} = \text{ON} \cos(\widehat{XOX'}) = \cos \beta \cos \alpha.$$

Отрезок NM параллелен оси OY' , величина его равна $\text{пр}_{Y'} \text{OM} = \sin \beta$. Направление оси OY' образует с осью OX угол, равный $\alpha + \frac{\pi}{2}$:

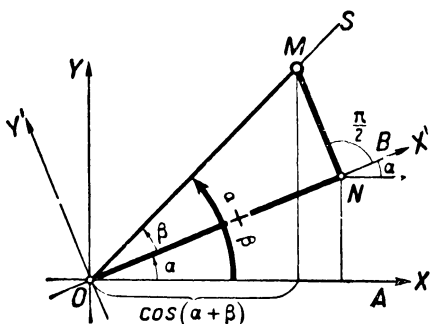
$$\angle(XOY') = \angle(XOX') + \angle(X'OY') = \alpha + \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно,

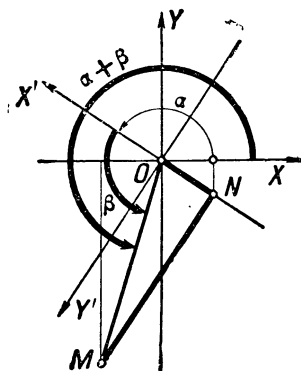
$$\text{пр}_x \text{NM} = \text{NM} \cos(XOY') = \sin \beta \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right).$$

Подставив в равенство (1), получим

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \sin \beta. \quad (2)$$



Черт. 71



Черт. 72

Положим $\alpha = \frac{\pi}{2}$ в формуле (2)

$$\cos\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \pi \sin \beta = -\sin \beta.$$

Полученное равенство справедливо при произвольном β . Заменяя в равенстве (2) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ на $-\sin \alpha$, получим формулу $(C_{\alpha+\beta})$.

Заменяя в формуле $(C_{\alpha+\beta})$ аргумент β на $-\beta$, получим формулу $(C_{\alpha-\beta})$.

Формулы $(S_{\alpha+\beta})$ и $(S_{\alpha-\beta})$ устанавливаются так же, как в первом доказательстве, ч. т. д.

Примечание. Доказательство основано на общих положениях теории проекций, а потому применимо при любых значениях аргументов α и β . В качестве упражнения рекомендуем воспроизвести доказательство формулы $(C_{\alpha+\beta})$, пользуясь чертежом 72.

Теорема сложения для тангенса. Для всех значений α и β , при которых существуют $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$, $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{tg} \beta$, имеет место формула

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}. \quad (T_{\alpha+\beta})$$

Доказательство. Воспользовавшись формулами $(S_{\alpha+\beta})$ и $(C_{\alpha+\beta})$, для всех значений α и β , для которых существует $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$, получим

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}.$$

Если существуют $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{tg} \beta$, то $\cos \alpha \neq 0$ и $\cos \beta \neq 0$. Разделив почленно числитель и знаменатель на $\cos \alpha \cos \beta$, получим формулу $(T_{\alpha+\beta})$, ч. т. д.

Следствие. Если существуют $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$, $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{tg} \beta$, то, заменив β на $-\beta$, получим формулу

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}. \quad (T_{\alpha-\beta})$$

Формулы сложения для котангенса предлагаем вывести ourselves.

Примеры.

В нижеследующих примерах даны значения тригонометрических функций некоторых таких дуг, для которых эти значения могут быть выражены в радикалах (т. е. посредством четырех арифметических действий и извлечения корня над целыми числами). Приведенные ниже формулы могут служить средством приближенного вычисления с любой степенью точности значений тригонометрических функций от ряда дуг.

1. Вычислить $\sin 3^\circ$ и $\cos 3^\circ$.

Решение. Зная, что $3^\circ = 18^\circ - 15^\circ$, и воспользовавшись найденными в § 10 значениями тригонометрических функций — углов 18° и 15° , получим

$$\begin{aligned} \sin 3^\circ &= \sin \frac{\pi}{60} = \sin 18^\circ \cos 15^\circ - \cos 18^\circ \sin 15^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{5}-1}{4} \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \right) - \frac{1}{4} \sqrt{10+2\sqrt{5}} \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \right) = \\ &= \frac{1}{16} [(\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}+\sqrt{2}) - \sqrt{10+2\sqrt{5}}(\sqrt{6}-\sqrt{2})] \approx 0,05234. \end{aligned}$$

И аналогично

$$\cos 3^\circ = \frac{1}{16} [\sqrt{10+2\sqrt{5}}(\sqrt{6}+\sqrt{2}) + (\sqrt{5}-1)(\sqrt{6}-\sqrt{2})] \approx 0,99863.$$

2. Вычислить $\sin 6^\circ$ и $\cos 6^\circ$.

Решение. Имеем: $6^\circ = 36^\circ - 30^\circ$; зная тригонометрические функции углов 36° и 30° (см. § 10), получим

$$\begin{aligned}\sin 6^\circ &= \sin 36^\circ \cos 30^\circ - \cos 36^\circ \sin 30^\circ = \\ &= \frac{1}{4} \left(\sqrt{3} \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right) = \frac{1}{8} (\sqrt{6} \sqrt{5 - \sqrt{5}} - \sqrt{5} - 1) \approx \\ &\approx 0,104528.\end{aligned}$$

И аналогично:

$$\cos 6^\circ = \frac{1}{8} [\sqrt{3}(\sqrt{5} + 1) + \sqrt{2} \sqrt{5 - \sqrt{5}}] \approx 0,99452.$$

3. Вычислить $\sin 9^\circ$ и $\cos 9^\circ$.

Решение. Решение аналогично предыдущему примеру. Исходя из равенства $9^\circ = 45^\circ - 36^\circ$, получим:

$$\sin 9^\circ = \sin \frac{\pi}{20} = \frac{1}{8} [\sqrt{2}(\sqrt{5} + 1) - 2 \sqrt{5 - \sqrt{5}}] \approx 0,15643;$$

$$\cos 9^\circ = \frac{1}{8} [\sqrt{2}(\sqrt{5} + 1) + 2 \sqrt{5 - \sqrt{5}}] \approx 0,98769.$$

4. Вычислить $\sin 12^\circ$ и $\cos 12^\circ$.

Решение. Исходя из равенства $12^\circ = 30^\circ - 18^\circ$, получим

$$\cos 12^\circ = \cos \frac{\pi}{15} = \frac{1}{8} [\sqrt{3} \sqrt{10 + 2 \sqrt{5}} + (\sqrt{5} - 1)] \approx 0,97815;$$

$$\sin 12^\circ = \frac{1}{8} [\sqrt{10 + 2 \sqrt{5}} - \sqrt{3}(\sqrt{5} - 1)] \approx 0,20791.$$

Различные интерпретации теорем сложения.

При некоторых частных предположениях относительно значений α и β формулы сложения можно установить различными способами непосредственно геометрически. Эти способы можно встретить в ряде школьных учебников и пособий. Однако надо иметь в виду, что все эти способы доказательствами теорем сложения служить не могут, так как теоремы сложения верны при произвольных значениях аргументов α и β ; а не только при тех частных предположениях, которые обусловлены применимостью данного геометрического рассуждения. Эти геометрические рассуждения следует толковать лишь как интерпретации теорем сложения при тех или иных частных предположениях*.

Ниже указаны некоторые из наиболее распространенных интерпретаций теорем сложения.

1. Предположим, что α и β суть произвольные острые углы. Рассмотрим треугольник ABC (черт. 73), у которого $\angle B = \alpha + \beta$.

* Авторы учебников, в которых некоторая геометрическая интерпретация положена в основу доказательства теорем сложения, вынуждены проводить дополнительные рассуждения, устанавливающие общность теорем сложения (см., например, школьный учебник тригонометрии Рыбкина).

причем стороны c и a образуют с высотой $h = BD$ углы α и β (этими условиями $\triangle ABC$ определяется с точностью до подобия).

С одной стороны (черт. 73)

$$\text{пл. } \triangle ABC = \frac{1}{2} ac \sin(\alpha + \beta)^*.$$

С другой стороны

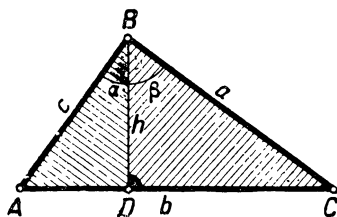
$$\text{пл. } \triangle ABC = \text{пл. } \triangle ABD + \text{пл. } \triangle DBC, \quad (1)$$

$$\text{но } \text{пл. } \triangle ABD = \frac{1}{2} ADh, \text{ пл. } \triangle DBC = \frac{1}{2} CD \cdot h.$$

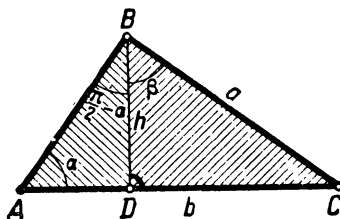
Имеем $h = a \cos \beta = c \cos \alpha$, $AD = c \sin \alpha$, $CD = a \sin \beta$. Следовательно,

$$\text{пл. } \triangle ABD = \frac{1}{2} ac \sin \alpha \cos \beta \text{ и } \text{пл. } \triangle DBC = \frac{1}{2} ac \cos \alpha \sin \beta.$$

Подставив в (1) и сократив обе части на $\frac{1}{2} ac$, получим формулу ($S_{\alpha+\beta}$).



Черт. 73



Черт. 74

II. Несколько видоизменив предыдущее построение, можно получить формулу ($S_{\alpha-\beta}$). Для этого вычислим площадь $\triangle ABC$, изображенного на чертеже 74 в предположении, что $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Имеем

$$\begin{aligned} \text{пл. } \triangle ABC &= \frac{1}{2} ac \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha + \beta \right) = \\ &= \frac{1}{2} ac \sin \left[\frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta) \right] = \frac{1}{2} ac \cos(\alpha - \beta). \end{aligned}$$

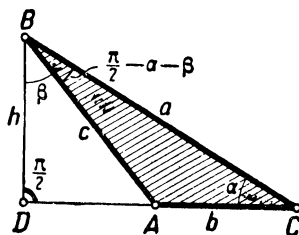
При данном построении

$$h = c \sin \alpha = a \cos \beta, \quad AD = c \cos \alpha, \quad DC = a \sin \beta.$$

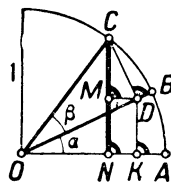
Дальнейшие рассуждения проводятся так же, как в предыдущем примере.

* Мы пользуемся известной формулой для площади треугольника по данным двум сторонам и углу между ними (см. § 61).

В виде упражнения рекомендуем учащимся получить формулу $(C_{\alpha+\beta})$, исходя из чертежа 75.



Черт. 75



Черт. 76

III. Для интерпретации теорем сложения можно исходить из непосредственного построения тригонометрических линий суммы (или разности) углов. Таково, например, распространенное в учебной литературе построение, относящееся к случаю, когда α и β — острые углы, причем $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$. Это построение представлено на чертеже 76. По построению $CD \perp OB$, $DM \perp CN$, $CN \perp OA$, следовательно, $\angle MCD = \alpha$; имеем:

$$\sin(\alpha + \beta) = CN = NM + MC. \quad (1)$$

Далее:

$$NM = DK = OD \sin \alpha = \cos \beta \sin \alpha$$

и

$$MC = CD \cos \alpha = \sin \beta \cos \alpha.$$

Подставив в (1), получим формулу $(S_{\alpha+\beta})$.

Предоставляем учащимся получить из того же чертежа формулу $(C_{\alpha+\beta})$.

IV. Теоремы сложения можно интерпретировать при помощи теоремы Птолемея, утверждающей, что произведение диагоналей вписанного четырехугольника равно сумме произведений противоположных сторон*.

Пусть α и β — данные острые углы. Рассмотрим построение, представленное на чертеже 77, где $AC = 2R$ — диаметр; имеем по теореме Птолемея

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD. \quad (1)$$

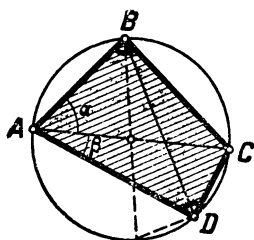
Из прямоугольных треугольников ABC и ACD найдем

$$AB = 2R \cos \alpha, \quad CD = 2R \sin \beta, \quad AD = 2R \cos \beta, \quad BC = 2R \sin \alpha.$$

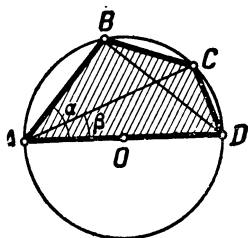
* Еще в древней Греции теорема Птолемея применялась для составления «таблиц хорд» (т. е. по сути дела тригонометрических таблиц). Подробнее см. В. П. Шереметьевский. Очерки по истории математики Учпедгиз, 1940

Из треугольника ABD получим: $BD = 2R \sin(\alpha + \beta)$ *.

Подставив в (1) и сократив обе части на $4R^2$, получим формулу $(S_{\alpha+\beta})$.



Черт. 77



Черт. 78

V. Аналогично можно интерпретировать формулу $(S_{\alpha-\beta})$; рассуждения предлагаем провести учащемуся в виде упражнения, пользуясь чертежом 78.

§ 15. Обобщение теорем сложения

Последовательным применением формул $(S_{\alpha+\beta})$, $(C_{\alpha+\beta})$, $(T_{\alpha+\beta})$ можно выразить тригонометрические функции от суммы любого числа дуг (углов) через тригонометрические функции дуг α , β и γ . Например,

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta + \gamma) &= \sin[(\alpha + \beta) + \gamma] = \sin(\alpha + \beta) \cos \gamma + \\ &+ \cos(\alpha + \beta) \sin \gamma = \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \\ &+ \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma. \end{aligned}$$

Подобным же образом найдем:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta + \gamma) &= \cos[(\alpha + \beta) + \gamma] = \cos(\alpha + \beta) \cos \gamma - \\ &- \sin(\alpha + \beta) \sin \gamma = \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \\ &- \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma, \end{aligned}$$

и, наконец,

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\sin(\alpha + \beta + \gamma)}{\cos(\alpha + \beta + \gamma)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma}.$$

Общие формулы для

$$\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) = \sin \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

* В силу известной формулы, $a = 2R \sin A$ (см. § 58).

и

$$\cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) = \cos \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

можно вывести методом математической индукции. Представим формулы для двух и трех слагаемых в следующем виде, удобном для выяснения их структуры:

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta);$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta (1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta);$$

$$\sin(\alpha + \beta + \gamma) = \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma [\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma]; \quad (S)$$

$$\cos(\alpha + \beta + \gamma) = \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma [1 - (\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma)]. \quad (C)$$

Слагаемые в квадратных скобках (объединенные в круглые скобки) суть основные симметрические функции от тангенсов данных аргументов, взятые через один и с чередующимися знаками.

Докажем, что имеют место формулы

$$\sin \sum_{i=1}^n \alpha_i = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \dots \cos \alpha_n [p_1 - p_3 + p_5 - \dots]; \quad (S)$$

$$\cos \sum_{i=1}^n \alpha_i = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \dots \cos \alpha_n [1 - p_2 + p_4 - \dots], \quad (C)$$

где

$$p_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2 + \dots + \operatorname{tg} \alpha_n;$$

$$p_2 = \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_3 + \dots + \operatorname{tg} \alpha_{n-1} \operatorname{tg} \alpha_n;$$

и вообще

$$p_k = \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 \dots \operatorname{tg} \alpha_k + \operatorname{tg} \alpha_2 \operatorname{tg} \alpha_3 \dots \operatorname{tg} \alpha_{k+1} + \dots$$

есть сумма всевозможных произведений тангенсов, взятых по k .

Применим метод математической индукции. Предположим, что формулы (S) и (C) верны при некотором n (и при произвольных α_i), докажем, что в этом предположении они верны для случая $n + 1$ произвольных слагаемых $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$.

* В силу принципа продолжения по непрерывности, наличие особых значений, при которых хотя бы один из тангенсов теряет смысл, несущественно.

Имеем:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + \alpha_{n+1}) &= \sin\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i + \alpha_{n+1}\right) = \\ &= \sin \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \cos \alpha_{n+1} + \cos \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \sin \alpha_{n+1} = \\ &= \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \dots \cos \alpha_{n+1} [p_1 - p_3 + p_5 - \dots + \\ &\quad + (1 - p_2 + p_4 - \dots) \operatorname{tg} \alpha_{n+1}] \text{ (в силу (S) и (C)).}\end{aligned}$$

Выражение, заключенное в квадратные скобки, преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned}(p_1 + \operatorname{tg} \alpha_{n+1}) - (p_3 + p_2 \operatorname{tg} \alpha_{n+1}) + \dots + \\ + (-1)^k (p_{2k+1} + p_{2k} \operatorname{tg} \alpha_{n+1}) + \dots\end{aligned}$$

Выражение $p_{2k+1} + p_{2k} \operatorname{tg} \alpha_{n+1}$ есть сумма всевозможных произведений, составленных из $\operatorname{tg} \alpha_1, \operatorname{tg} \alpha_2, \dots, \operatorname{tg} \alpha_{n+1}$, взятых по $2k+1$. В самом деле, слагаемое p_{2k+1} содержит все такие произведения, в которые не входит $\operatorname{tg} \alpha_{n+1}$, а слагаемое $p_{2k} \operatorname{tg} \alpha_{n+1}$ состоит из всех произведений, в которые входит $\operatorname{tg} \alpha_{n+1}$. Следовательно, формула (S) верна для суммы $n+1$ слагаемых $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ в предположении, что она верна для суммы n слагаемых. Аналогично (предоставляем подсчет учащимся) в том же предположении устанавливается справедливость формулы (C) для $n+1$ слагаемых. Будучи верными при $n=2$, формулы (S) и (C) верны при произвольном натуральном $n \geq 2$, ч. т. д.

Общие формулы (S) и (C) можно вывести другим способом, опираясь на правило умножения комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме*.

Рассмотрим n комплексных чисел:

$$z_1 = \cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1, \quad z_2 = \cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2, \quad \dots, \quad z_n = \cos \alpha_n + i \sin \alpha_n.$$

Перемножив эти числа, получим:

$$\begin{aligned}(\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1)(\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2) \dots (\cos \alpha_n + i \sin \alpha_n) = \\ = \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n).\end{aligned}$$

Перемножив скобки в левой части и приравняв действительную часть $\cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)$, а коэффициент при мнимой единице $\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)$, получим формулы (C) и (S).

Примеры.

1. Дано $\operatorname{tg} \alpha = a$, $\operatorname{tg} \beta = b$, $\operatorname{tg} \gamma = c$, где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, а α , β и γ — острые углы. Установить необходимое и достаточное условие, при котором сумма $S = \alpha + \beta + \gamma$ есть острый угол.

* Для умножения двух комплексных чисел это правило выводится посредством основных формул $(S_{\alpha+\beta})$ и $(C_{\alpha+\beta})$, а для любого числа сомножителей распространяется методом математической индукции.

Решение. В силу условий задачи

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$$

возможны следующие два исключаящие друг друга случая:

а) сумма $S = \alpha + \beta + \gamma$ либо принадлежит первой четверти (открытой) $0 < \alpha + \beta + \gamma < \frac{\pi}{2}$ (т. е. S — острый угол), в этом случае $\cos S > 0$;

б) сумма S принадлежит левой полуокружности (полуоткрытой) $\frac{\pi}{2} \leq S < \frac{3}{2}\pi$, в этом случае $\cos S \leq 0$.

Условия $\cos S > 0$, $\cos S \leq 0$, имеющие место в случаях а) и б), также взаимно исключают друг друга, а потому искомое необходимое и достаточное условие выражается неравенством $\cos S > 0$ или

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta + \gamma) &= \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma (1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma) = \\ &= \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma [1 - (ab + bc + ac)] > 0. \end{aligned}$$

Искомое условие принимает следующий вид:

$$ab + bc + ac < 1.$$

§ 16. Формулы приведения

Формулами приведения называются формулы, дающие выражение тригонометрических функций от аргументов

$$-\alpha, \quad \frac{\pi}{2} \pm \alpha, \quad \pi \pm \alpha, \quad \frac{3}{2}\pi \pm \alpha, \quad 2\pi \pm \alpha$$

через функции от аргумента α .

Все формулы приведения выписаны в таблицу, помещенную на странице 81. Этой таблицей пользуются следующим образом. Пусть, например, требуется вычислить $\sin\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)$; берем строку с пометкой $\frac{3}{2}\pi + \alpha$ (шестая строка) и столбец с пометкой $\sin$ (второй столбец); на пересечении взятых строки и столбца написано $-\cos \alpha$. Соответствующая формула приведения пишется так:

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = -\cos \alpha.$$

Формулы приведения, записанные в первой строке таблицы, выражают свойство четности и нечетности тригонометрических функций (доказательство см. в § 11); остальные же формулы приведения являются следствием теорем сложения для косинуса и синуса. Для образца выведем формулы для аргумента $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ (7-я строка):

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = \cos \frac{3\pi}{2} \cos \alpha + \sin \frac{3}{2}\pi \sin \alpha = -\sin \alpha,$$

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = \sin \frac{3}{2}\pi \cos \alpha - \cos \frac{3}{2}\pi \sin \alpha = -\cos \alpha.$$

Для $\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)$ формула тангенса суммы неприменима, так как $\operatorname{tg}\frac{3}{2}\pi$ не существует; поэтому выразим сначала тангенс через синус и косинус:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)} = \frac{-\cos \alpha}{-\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$$

и аналогично

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = \frac{\cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)} = \frac{-\sin \alpha}{-\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Формулы приведения, будучи следствиями теорем сложения, справедливы при произвольном (допустимом) значении аргумента α .

Геометрическая интерпретация формул приведения для случая острого угла представлена в последнем столбце таблицы; равенства, выражающие формулы приведения для косинуса и синуса, можно установить из рассмотрения равных треугольников (на чертежах заштрихованы).

При пользовании формулами приведения можно пользоваться и следующим правилом:

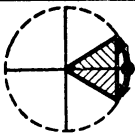
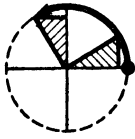
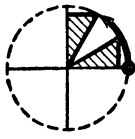
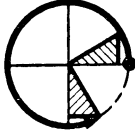
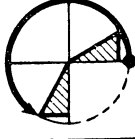
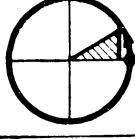
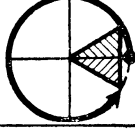
если угол α откладывается от оси абсцисс (формулы для углов $-\alpha$, $\pi \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$), то наименование приводимой функции сохраняется; если же угол α откладывается от оси ординат (формулы для углов $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$), то наименование приводимой функции заменяется сходным (синус и косинус, тангенс и котангенс).

Чтобы определить знак перед приведенной функцией, достаточно определить знак приводимой функции, считая угол α острым.

Для примера составим по этому правилу формулу для $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$. Угол α откладывается от оси ординат, поэтому косинус следует заменить синусом. Если α — острый угол, то угол $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ оканчивается в III четверти, в этой четверти косинус отрицателен, поэтому в правой части следует поставить знак минус. Итак,

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha.$$

Таблица формул приведения

Аргумент радианы (градусы)	Функция				
	cos	sin	tg	ctg	
1 $-\alpha$	$\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	
2 $\frac{\pi}{2} + \alpha \quad (90^\circ + \alpha)$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	
3 $\frac{\pi}{2} - \alpha \quad (90^\circ - \alpha)$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	
4 $\pi + \alpha \quad (180^\circ + \alpha)$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	
5 $\pi - \alpha \quad (180^\circ - \alpha)$	$-\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	
6 $\frac{3}{2}\pi + \alpha \quad (270^\circ + \alpha)$	$\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	
7 $\frac{3}{2}\pi - \alpha \quad (270^\circ - \alpha)$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	
8 $2\pi + \alpha \quad (360^\circ + \alpha)$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	
9 $2\pi - \alpha \quad (360^\circ - \alpha)$	$\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	

Не следует, однако, думать, что правая часть всегда отрицательна, так как в зависимости от значения α могут представиться разные случаи. Например, при $\alpha = \frac{5}{4}\pi$ получим

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{5}{4}\pi\right) = -\sin\frac{5}{4}\pi > 0, \text{ так как } \sin\frac{5}{4}\pi < 0.$$

Следует заметить, что в практике не всегда целесообразно пользоваться готовыми формулами приведения или применять изложенное правило. Применение формул и правила нецелесообразно, например, при преобразовании тригонометрических функций от аргумента $\pi + \alpha$. В самом деле, точки единичной окружности α и $\pi + \alpha$ диаметрально противоположны, их координаты (соответственно) равны по абсолютной величине и противоположны по знаку:

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha, \quad \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha,$$

а отношения (соответственных) координат равны

$$\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha; \quad \operatorname{ctg}(\pi + \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha.$$

Точно также непосредственно ясно, что тригонометрические функции от аргументов $2\pi + \alpha$ и α (соответственно) равны между собой, ибо дуги единичной окружности, соответствующие этим аргументам, оканчиваются в одной и той же точке. По той же причине ясно, что тригонометрические функции от аргументов α и $2k\pi + \alpha$ (где k — любое целое число) равны между собой.

$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos \alpha, \quad \sin(\alpha + 2k\pi) = \sin \alpha.$$

На практике часто формулами приведения пользуются в предположении, что α является острым углом. Пусть требуется вычислить тригонометрическую функцию произвольного аргумента β . Формулы для аргументов $2\pi + \alpha$ и $-\alpha$ позволяют заменить угол β положительным углом, содержащимся в пределах первой окружности. Поэтому можно считать, что $0 \leq \beta < 2\pi$ (или в градусной мере $0 \leq \beta < 360^\circ$). Рассмотрим два острых угла, которые образует конечная сторона β с осями координат (при этом направления осей во внимание не принимаются). Обозначим через α наименьший из них (или один из них, если оба равны 45°), тогда имеем $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$. Соответствующая формула приведения выражает тригонометрические функции угла β через тригонометрические функции угла α . Обычно заранее составляются таблицы значений тригонометрических функций (а также их логарифмов), которыми и пользуются в готовом виде. Эти таблицы обычно даются для значений углов в градусной мере. Предыдущие рассуждения показывают, что вполне достаточно составить таблицу значений тригонометрических функций лишь для углов, взятых от 0° до 45° .

Примеры.

1. Ниже даны примеры приведения тригонометрических функций различных углов к функциям угла, меньшего 45° .

а) $\sin 72^\circ = \sin (90^\circ - 18^\circ) = \cos 18^\circ$;

б) $\cos 1000^\circ = \cos (2 \cdot 360^\circ + 280^\circ) = \cos 280^\circ = \cos (270^\circ + 10^\circ) = \sin 10^\circ$;

в) $\operatorname{tg} 520^\circ = \operatorname{tg} (360^\circ + 160^\circ) = \operatorname{tg} 160^\circ = \operatorname{tg} (180^\circ - 20^\circ) = -\operatorname{tg} 20^\circ$.

2. Вычислить

$$P = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) \cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)}{\cos(2\pi - \alpha)} + \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \sin(\pi - \alpha) + \\ + \cos(\pi + \alpha) \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right).$$

Решение. Имеем:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) \cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = \sin\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = -\cos \alpha;$$

$$\cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha; \quad \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha;$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha; \quad \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha;$$

$$\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha.$$

После подстановки получим

$$P = -1 + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 0.$$

3. Доказать, что

$$\cos(x + n\pi) = (-1)^n \cos x \quad \text{и} \quad \sin(x + n\pi) = (-1)^n \sin x.$$

Решение. В самом деле, если $n = 2k$ — четное число, то

$$(-1)^n = 1 \quad \text{и} \quad \cos(x + 2k\pi) = \cos x, \quad \sin(x + 2k\pi) = \sin x;$$

если n нечетное число, то

$$\cos(x + 2k\pi + \pi) = \cos(x + \pi) = -\cos x.$$

Аналогично устанавливается второе равенство.

4. Доказать, что

$$\cos\left(\frac{n\pi}{7} - \frac{13}{14}\pi\right) + \cos\left(\frac{3}{7}n\pi - \frac{3}{14}\pi\right) + \cos\left(\frac{5}{7}n\pi - \frac{3}{14}\pi\right) = 0,$$

если целое число n при делении на 7 дает в остатке одно из следующих чисел: 1, 3, 4.

Решение. Разделим число n с остатком на 7:

$$n = 7k + r;$$

члены данной суммы имеют вид: $\cos\left(\frac{mn\pi}{7} - \alpha\right)$, где $m = 1, 3, 5$ и $\alpha = \frac{13}{14}\pi$

или $\alpha = \frac{3}{14}\pi$.

Подставив $n = 7k + r$, получим

$$\cos\left(\frac{(7k+r)m\pi}{7} - \alpha\right) = \cos\left(\frac{rm\pi}{7} + km\pi - \alpha\right) = (-1)^{km} \cos\left(\frac{rm\pi}{7} - \alpha\right).$$

Так как m — нечетное число, то для всех трех слагаемых множитель $(-1)^{km} = (-1)^k$ один и тот же. Следовательно, достаточно доказать, что

$$\cos\left(\frac{r\pi}{7} - \frac{13}{14}\pi\right) + \cos\left(\frac{3r\pi}{7} - \frac{3}{14}\pi\right) + \cos\left(\frac{5r\pi}{7} - \frac{3}{14}\pi\right) = 0$$

при $r = 1, 3, 4$.

а) Полагаем $r = 1$; преобразуем каждое слагаемое отдельно:

$$\cos\left(\frac{\pi}{7} - \frac{13}{14}\pi\right) = \cos\left(-\frac{11}{14}\pi\right) = \cos\frac{11}{14}\pi = -\cos\frac{3}{14}\pi;$$

$$\cos\left(\frac{3}{7}\pi - \frac{3}{14}\pi\right) = \cos\frac{3}{14}\pi;$$

$$\cos\left(\frac{5}{7}\pi - \frac{3}{14}\pi\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Сумма этих чисел равна нулю.

Случай б) $r = 3$ и с) $r = 4$ рассматриваются аналогично (предоставляем вычисление учащимся).

5. Преобразовать $\cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ и $\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

Решение. Если n — четное число ($n = 2k$), то

$$\cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x + k\pi) = (-1)^k \cos x = (-1)^{\frac{n}{2}} \cos x;$$

и аналогично

$$\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{\frac{n}{2}} \sin x.$$

Если n — нечетное число ($n = 2k + 1$), то:

$$\begin{aligned} \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) &= \cos\left(x + k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x + k\pi) = \\ &= (-1)^{k+1} \sin x = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \sin x; \end{aligned}$$

и аналогично

$$\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x + k\pi) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos x.$$

§ 17. Тригонометрические функции кратных дуг; полиномы Чебышева

Если в формулах сложения ($C_{\alpha+\beta}$), ($S_{\alpha+\beta}$) и ($T_{\alpha+\beta}$) положить $\beta = \alpha$, то получатся формулы, выражающие тригонометрические функции от двойного аргумента 2α через тригонометрические функции аргумента α . Имеем:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha; \quad (S_{2\alpha})$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha; \quad (C_{2\alpha})$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}. \quad (T_{2\alpha})$$

Формулы для тригонометрических функций от 3α , 4α и т. д. могут быть получены последовательным применением теорем сложения. Так, например,

$$\begin{aligned}\sin 3\alpha &= \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha = 1 - \sin^2 \alpha, \\ &= 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \sin \alpha = \\ &= 3 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha.\end{aligned}$$

Аналогично найдем

$$2 \sin^2 \alpha \cos \alpha = 2/1 - \cos^2 \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha.$$

Чтобы получить общие выражения для $\cos n\alpha$ и $\sin n\alpha$, достаточно в общих формулах сложения (C) и (S) (стр. 77) положить $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \alpha$. Тогда получим:

$$\cos n\alpha = \cos^n \alpha - C_n^2 \sin^2 \alpha \cos^{n-2} \alpha + C_n^4 \sin^4 \alpha \cos^{n-4} \alpha - \dots (C_{na})$$

(последний член равен $(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot n \cos \alpha \sin^{n-1} \alpha$ при нечетном n и $(-1)^{\frac{n}{2}} \sin^n \alpha$ при четном n);

$$\begin{aligned}\sin n\alpha &= C_n^1 \sin \alpha \cos^{n-1} \alpha - C_n^3 \sin^3 \alpha \cos^{n-3} \alpha + \\ &+ C_n^5 \sin^5 \alpha \cos^{n-5} \alpha - \dots (S_{na})\end{aligned}$$

(последний член равен $(-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin^n \alpha$ при нечетном n и $(-1)^{\frac{n-2}{2}} n \sin^{n-1} \alpha \cos \alpha$ при четном n).

Формулы (C_{na}) и (S_{na}) можно получить другим способом, воспользовавшись известной из теории комплексных чисел формулой Муавра

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha.$$

Преобразовав левую часть по формуле бинома Ньютона и приравняв действительные части и коэффициенты при i правой и левой частей, получим формулы (C_{na}) и (S_{na}) .

Формулы (C_{na}) и (S_{na}) выражают тригонометрические функции от n -кратного аргумента через степени синуса и косинуса простого аргумента. Так, например, при $n = 4$ получим

$$\cos 4\alpha = \cos^4 \alpha - 6 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha;$$

$$\underline{\sin 4\alpha = 4 \sin \alpha \cos^3 \alpha - 4 \sin^3 \alpha \cos \alpha}.$$

При $n = 5$ получим

$$\cos 5\alpha = \cos^5 \alpha - 10 \sin^2 \alpha \cos^3 \alpha + 5 \sin^4 \alpha \cos \alpha;$$

$$\sin 5\alpha = 5 \sin \alpha \cos^4 \alpha - 10 \sin^3 \alpha \cos^2 \alpha + \sin^5 \alpha.$$

Из рассмотрения левых частей тождеств (C_{na}) и (S_{na}) следует, что $\cos n\alpha$ и $\sin n\alpha$ можно преобразовать в однородные многочлены степени n относительно $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$.

Левая часть тождества (C_{na}) содержит только лишь четные степени синуса; эти степени можно выразить через косинус по формуле

$$\sin^{2k} \alpha = (1 - \cos^2 \alpha)^k.$$

Следовательно, $\cos n\alpha$ может быть представлен в виде многочлена относительно косинуса следующим образом:

$$\cos n\alpha = \cos^n \alpha - C_n^2 \cos^{n-2} \alpha (1 - \cos^2 \alpha) + \\ + C_n^4 \cos^{n-4} \alpha (1 - \cos^2 \alpha)^2 - \dots$$

Многочлен

$$T_n(x) = x^n - C_n^2 x^{n-2} (1 - x^2) + C_n^4 x^{n-4} (1 - x^2)^2 - \dots \quad (T)$$

называется n -ным полиномом Чебышева по имени великого русского ученого П. Л. Чебышева (некоторые замечательные свойства полиномов Чебышева изложены ниже, см. § 43). Формула (C_{na}) примет вид:

$$\cos n\alpha = T_n(\cos \alpha). \quad (C_{na}^*)$$

Тождество (S_{na}) можно переписать так:

$$\sin n\alpha = \sin \alpha (C_n^1 \cos^{n-1} \alpha - C_n^3 \sin^2 \alpha \cos^{n-3} \alpha + \\ + C_n^5 \sin^4 \alpha \cos^{n-5} \alpha - \dots).$$

Выражение, заключенное в скобки, содержит $\sin \alpha$ только лишь в четных степенях, а потому оно может быть представлено в виде многочлена относительно косинуса. Многочлен

$$U_n(x) = C_n^1 x^{n-1} - C_n^3 (1 - x^2) x^{n-3} + C_n^5 (1 - x^2)^2 x^{n-5} - \dots \quad (U)$$

называется n -ным полиномом Чебышева второго рода.

Формула (S_{na}) примет вид:

$$\sin n\alpha = \sin \alpha U_n(\cos \alpha). \quad (S_{na}^*)$$

Степень полинома $T_n(x)$ равна n . В самом деле, из формулы (Т) видно, что аргумент x содержится в правой части не выше, чем в степени n . Подсчитаем коэффициент при x^n

$$1 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = 2^{n-1}$$

(сумма биномиальных коэффициентов четного номера).

Так как этот коэффициент отличен от нуля, то степень $T_n(x)$ равна n .

Аналогично докажем, что полином $U_n(x)$ имеет степень $n - 1$; коэффициент при x^{n-1} равен

$$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = 2^{n-1}.$$

Примеры.

1. Ниже составлены выражения для четырех первых по порядку полиномов Чебышева.

Так как $\cos 0x = 1$, то считают $T_0(x) = 1$; имеем далее:

$$\begin{aligned}\cos 1 \cdot x &= \cos x & \text{и} & & T_1(x) &= x; \\ \cos 2x &= 2\cos^2 x - 1 & \text{и} & & T_2(x) &= 2x^2 - 1; \\ \cos 3x &= 4\cos^3 x - 3\cos x & \text{и} & & T_3(x) &= 4x^3 - 3x; \\ \cos 4x &= \cos^4 x - 6\sin^2 x \cos^2 x + \sin^4 x = \cos^4 x - 6(1 - \cos^2 x)\cos^2 x + \\ &+ (1 - \cos^2 x)^2 = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1 \text{ и } T_4 = 8x^4 - 8x^2 + 1.\end{aligned}$$

Составим выражения для четырех первых полиномов Чебышева второго рода:

$$\begin{aligned}\sin 1 \cdot x &= \sin x & \text{и} & & U_1(x) &= 1; \\ \sin 2x &= 2\sin x \cos x & \text{и} & & U_2(x) &= 2x; \\ \sin 3x &= 3\sin x \cos^2 x - \sin^3 x = \sin x (3\cos^2 x - \sin^2 x) = \\ &= \sin x (4\cos^2 x - 1) & \text{и} & & U_3(x) &= 4x^2 - 1; \\ \sin 4x &= \sin x (4\cos^3 x - 4\sin^2 x \cos x) = \\ &= \sin x (8\cos^3 x - 4\cos x) & \text{и} & & U_4(x) &= 8x^3 - 4x.\end{aligned}$$

2. Найти значения n , при которых $\cos nx$ и $\sin nx$ могут быть представлены в виде многочленов относительно синуса

Решение. Заменяя в общих формулах $(C_{n\alpha}^*)$ и $(S_{n\alpha}^*)$ α на $\frac{\pi}{2} - \alpha$, получим тождества

$$\begin{aligned}\cos\left(n\frac{\pi}{2} - nx\right) &= T_n(\sin x) \quad \text{и} \quad \sin\left(n\frac{\pi}{2} - nx\right) = \\ &= U_n(\sin x) \cos x.\end{aligned}$$

С л у ч а й 1°. $n = 2k$ — четное число; имеем:

$$\cos 2kx = (-1)^k T_{2k}(\sin x); \quad \sin 2kx = (-1)^{k+1} \cos x U_{2k}(\sin x).$$

С л у ч а й 2°. $n = 2k + 1$ — нечетное число; имеем:

$$\sin (2k + 1)x = (-1)^k T_{2k+1}(\sin x);$$

и

$$\cos (2k + 1)x = (-1)^k \cos x U_{2k+1}(\sin x).$$

Из полученных тождеств видно, что $\cos 2kx$ и $\sin (2k + 1)x$ можно представить в виде многочлена относительно синуса.

Так, в частности, имеем:

$$\begin{aligned}\cos 2x &= 1 - 2\sin^2 x; \quad \sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x; \\ \cos 4x &= \cos^4 x - 6\sin^2 x \cos^2 x + \sin^4 x = \\ &= (1 - \sin^2 x)^2 - 6\sin^2 x (1 - \sin^2 x) + \sin^4 x = 8\sin^4 x - 8\sin^2 x + 1.\end{aligned}$$

3. Вычислить произведение

$$P = \cos x \cos 2x \cos 4x \dots \cos 2^k x \dots \cos 2^n x.$$

Решив относительно $\cos \frac{\alpha}{2}$ и $\sin \frac{\alpha}{2}$, получим

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}, \quad \left(C_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}. \quad \left(S_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

А также

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}. \quad \left(T_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

Знаки перед радикалами должны выбираться в соответствии с тем, в какой четверти расположен аргумент $\frac{\alpha}{2}$.

В формулах $\left(C_{\frac{\alpha}{2}}\right)$, $\left(S_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ и $\left(T_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ тригонометрические функции от половинного аргумента $\frac{\alpha}{2}$ выражены через косинус аргумента α . Если известно значение $\cos \alpha$, то по этим формулам можно вычислить абсолютные величины тригонометрических функций

$$\left|\cos \frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

и

$$\left|\sin \frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}.$$

Заданием значения косинуса $\cos \alpha = m$ определяется бесконечное множество дуг

$$\alpha = \pm \arccos m + 2k\pi.$$

Соответствующие половинные дуги

$$\frac{\alpha}{2} = \pm \frac{\arccos m}{2} + k\pi,$$

в зависимости от выбора знака и значения k , могут в общем случае оканчиваться в л ю б о й четверти единичного круга. В самом деле, если $-1 < m < 1$, то $0 < \arccos m < \pi$, а $\frac{\arccos m}{2}$ есть острый угол. Если

выбрать знак $+$, то дуга $\frac{\alpha}{2}$ будет оканчиваться в первой или третьей четверти, в зависимости от четности или нечетности k . Если выбрать знак $-$, то получится дуга, оканчивающаяся во второй или в четвертой четверти. При $m = \pm 1$ получаются дуги, оканчивающиеся в концах горизонтального или вертикального диаметра. Следовательно, в общем случае при данном $\cos \alpha = m$ в формулах $\left(C_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ и $\left(S_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ возможна любая комбинация знаков.

Представим д а н н ы й аргумент α в виде $\alpha = \alpha_0 + 2k\pi$, где α_0 выбирается в промежутке $-\pi < \alpha_0 \leq \pi$; в таком случае формула

$\left(C_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ может быть записана в виде:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = (-1)^k \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}.$$

В самом деле, $-\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha_0}{2} \leq \frac{\pi}{2}$, а потому угол $\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha_0}{2} + k\pi$ оканчивается в правой полуокружности при четном k и в левой полуокружности при нечетном k ; в первом случае $\cos \frac{\alpha}{2} \geq 0$, а во втором $\cos \frac{\alpha}{2} \leq 0$.

Аналогично, если α представить в виде

$$\alpha = \alpha_0 + 2k\pi, \text{ где } 0 \leq \alpha_0 < 2\pi,$$

то формулу $\left(S_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ можно записать в виде

$$\sin \frac{\alpha}{2} = (-1)^k \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}.$$

В самом деле, $0 \leq \frac{\alpha_0}{2} < \pi$, а потому угол $\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha_0}{2} + k\pi$ оканчивается в верхней полуокружности при четном k и в нижней полуокружности при нечетном k ; в первом случае $\sin \frac{\alpha}{2} \geq 0$, а во втором $\sin \frac{\alpha}{2} \leq 0$.

Выражения для $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ можно получить в другом виде, а именно:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \quad \left(T'_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

и

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}. \quad \left(T''_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

Из формул $\left(T'_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ и $\left(T''_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ вытекает следствие: *тангенс половинного аргумента $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ выражается рационально через $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$.*

Из тождеств

$$2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \sin \alpha \text{ и } \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1$$

можно выразить косинус и синус половинного аргумента через $\sin \alpha$. В самом деле, складывая и вычитая, получим эквивалент-

ную систему уравнений:

$$\left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2 = 1 + \sin \alpha, \quad \left(\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2 = 1 - \sin \alpha,$$

откуда

$$\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{1 + \sin \alpha}$$

и

$$\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{1 - \sin \alpha}.$$

Складывая и вычитая, получим формулы:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\pm \sqrt{1 + \sin \alpha} \pm \sqrt{1 - \sin \alpha}}{2} \quad \left(C'_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

и

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\pm \sqrt{1 + \sin \alpha} \mp \sqrt{1 - \sin \alpha}}{2}. \quad \left(S'_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

При данном α знак перед каждым из радикалов выбирается в соответствии с тем, какие знаки имеют $\sin \frac{\alpha}{2}$ и $\cos \frac{\alpha}{2}$, при этом всегда в формулах $\left(C'_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ и $\left(S'_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ знаки перед вторым радикалом противоположны. Формулы $\left(C'_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ и $\left(S'_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ менее удобны, чем формулы $\left(C_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ и $\left(S_{\frac{\alpha}{2}}\right)$, они не имеют широкого применения.

Примечание. Формулы $\left(C'_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ и $\left(S'_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ можно получить из формул $\left(C_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ и $\left(S_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ посредством алгебраических преобразований. В самом деле, имеем

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{2}}.$$

Применив формулу преобразования сложного квадратного радикала (см. «Специальный курс элементарной алгебры», § 40), получим равенство $\left(C'_{\frac{\alpha}{2}}\right)$.

Из формулы

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

можно получить формулу, выражающую $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ через $\operatorname{tg} \alpha$. Из квадратного уравнения

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg} \alpha = 0 \quad (1)$$

найдем

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Корни уравнения (1) (за неизвестное считается $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$) обратны по абсолютной величине и противоположны по знаку. Это можно объяснить геометрически: если дано $\operatorname{tg} \alpha = m$, то $\alpha = \operatorname{arctg} m + n\pi$, откуда, при четном $n = 2k$:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg} \left(\frac{\operatorname{arctg} m}{2} + k\pi \right) = \operatorname{tg} \frac{\operatorname{arctg} m}{2};$$

или при нечетном $n = 2k + 1$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg} \left(\frac{\operatorname{arctg} m}{2} + \frac{\pi}{2} + k\pi \right) = -\operatorname{ctg} \frac{\operatorname{arctg} m}{2}.$$

Эти значения обратны по величине и противоположны по знаку, то или другое из них выбирается при данном α в зависимости от знака $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

Построение формул, выражающих тригонометрические функции, от дуги $\frac{\alpha}{n}$ через функции дуги α встречает затруднения алгебраического характера, связанные с необходимостью решать уравнения высших степеней. Если в формуле ($C_{n\alpha}^*$) (стр. 86) заменить $n\alpha$ на α , а α на $\frac{\alpha}{n}$, то для нахождения неизвестного $x = \cos \frac{\alpha}{n}$ по заданному значению $\cos \alpha$ получится уравнение

$$\cos \alpha = T_n(x).$$

Это уравнение в общем случае имеет n действительных различных корней. В самом деле, множество всех дуг, имеющих данный косинус $\cos \alpha = m$, определяется по формуле

$$\alpha = \pm \operatorname{arccos} m + 2k\pi,$$

откуда

$$\frac{\alpha}{n} = \pm \frac{\operatorname{arccos} m}{n} + \frac{2k\pi}{n}.$$

Если выбрать знак $+$, то получится бесконечное множество дуг

$$\frac{\alpha}{n} = \frac{\operatorname{arccos} m}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad (2)$$

которые оканчиваются на единичной окружности лишь в n геометрически различных точках при $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, ибо прибавление к числу k любого целого слагаемого, кратного n , вызывает прибавление к $\frac{\alpha}{n}$ слагаемого, кратного 2π (т. е. получается дуга, оканчи-

вающаяся в той же точке). Следовательно,

$$\cos\left(\frac{\arccos m}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right),$$

где $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ (в общем случае), имеет n различных значений. Аналогично, все дуги вида

$$\frac{\alpha}{n} = -\frac{\arccos m}{n} + \frac{2k\pi}{n} \quad (3)$$

оканчиваются в n геометрически различных точках. Дуги серии (2) и серии (3) попарно симметричны относительно оси абсцисс, а именно, заменив в (3) произвольное целое число k на $-k$, получим дугу, противоположную некоторой дуге серии (2), но изменение знака дуги не изменяет косинуса. Поэтому $x = \cos \frac{\alpha}{n}$ в общем случае имеет n различных действительных значений.

Например, при $n = 3$ получим кубическое уравнение

$$\cos \alpha = 4x^3 - 3x \quad \text{или} \quad x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{\cos \alpha}{4} = 0.$$

Это уравнение можно решить в радикалах, однако, здесь (в общем случае) имеет место неприводимый случай, характеризующий наличие трех действительных корней. Формула Кардано дает:

$$x = \sqrt[3]{\frac{\cos \alpha}{8} + \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha - 1}{64}}} + \sqrt[3]{\frac{\cos \alpha}{8} - \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha - 1}{64}}}.$$

Так как $\cos^2 \alpha - 1 \leq 0$, то в общем случае (при $\alpha \neq 2k\pi$) под знаками кубических радикалов содержатся мнимые числа и выразить x посредством действительных радикалов невозможно.

В частном случае при $n = 2^k$ последовательным применением формул $\left(\frac{C_\alpha}{2}\right)$ и $\left(\frac{S_\alpha}{2}\right)$ можно получить формулы, выражающие в квадратных радикалах тригонометрические функции аргумента $\frac{\alpha}{2^k}$ через функцию аргумента α .

Так, например,

$$\begin{aligned} \cos \frac{\alpha}{4} &= \cos\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\alpha}{2}}{2}} = \\ &= \pm \sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}}{2}} = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{1 + \cos \alpha}}{2\sqrt{2}}}. \end{aligned}$$

Примеры.

1 Вывести формулы $\left(\frac{T'_\alpha}{2}\right)$ и $\left(\frac{T''_\alpha}{2}\right)$, исходя из формулы $\left(\frac{T_\alpha}{2}\right)$.

Решение. Освободив в правой части равенства $\left(\frac{T_\alpha}{2}\right)$ знаменатель

от радикала. получим:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\pm \sqrt{1 - \cos \alpha}}{\sqrt{1 + \cos \alpha}} = \frac{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{1 + \cos \alpha} = \frac{\pm \sin \alpha}{1 + \cos \alpha}.$$

Из двух знаков в числителе следует взять знак $+$, так как при всех допустимых значениях α (т. е. $\alpha \neq (2k+1)\pi$) знаменатель положителен, а $\sin \alpha$ и $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ имеют одинаковые знаки. В самом деле, если $2k\pi \leq \alpha < (2k+1)\pi$, то $\sin \alpha \geq 0$, но тогда $k\pi \leq \frac{\alpha}{2} < \frac{2k+1}{2}\pi$, т. е. дуга $\frac{\alpha}{2}$ оканчивается в I или III четверти (в зависимости от четности или нечетности k), в этом случае также $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \geq 0$; аналогично, если $(2k+1)\pi \leq \alpha < 2(k+1)\pi$, то $\sin \alpha \leq 0$, в этом случае $\frac{2k+1}{2}\pi < \frac{\alpha}{2} < (k+1)\pi$, дуга $\frac{\alpha}{2}$ оканчивается во II или IV четверти, но тогда $\operatorname{tg} \alpha < 0$.

Аналогично, формула $\left(\Gamma \frac{\alpha}{2}\right)$ может быть получена из $\left(T \frac{\alpha}{2}\right)$ путем освобождения в правой части числителя от радикала.

2. Найти выражение для $\cos \frac{\pi}{2^n}$ и $\sin \frac{\pi}{2^n}$.

Решение. Имеем:

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{2^2} &= \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \sin \frac{\pi}{2^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \\ \cos \frac{\pi}{8} &= \cos \frac{\pi}{2^3} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}; \\ \sin \frac{\pi}{8} &= \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}; \\ \cos \frac{\pi}{16} &= \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{2}; \quad \sin \frac{\pi}{16} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{2}. \end{aligned}$$

Обозначим для краткости

$$R_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

где символ извлечения квадратного корня применяется n раз

В этом обозначении имеем:

$$\cos \frac{\pi}{2^3} = \frac{R_2}{2}; \quad \cos \frac{\pi}{2^4} = \frac{R_3}{2}; \quad \sin \frac{\pi}{2^3} = \frac{\sqrt{2 - R_1}}{2}; \quad \sin \frac{\pi}{2^4} = \frac{\sqrt{2 - R_2}}{2}.$$

Применим метод математической индукции. Предположим, что

$$\cos \frac{\pi}{2^n} = \frac{R_{n-1}}{2} \quad \text{и} \quad \sin \frac{\pi}{2^n} = \frac{\sqrt{2 - R_{n-2}}}{2},$$

В этом предположении имеем:

$$\cos \frac{\pi}{2^{n+1}} = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{2^n}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + R_{n-1}}}{2} = \frac{R_n}{2}$$

и аналогично

$$\sin \frac{\pi}{2^{n+1}} = \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{2^n}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - R_{n-1}}}{2},$$

т. е. формулы верны для дуги $\frac{\pi}{2^{n+1}}$. Будучи верными при $n = 3$, формулы верны при произвольном $n \geq 3$.

§ 19. Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму

Теорема. При произвольных α и β имеют место тождества:

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)}{2}; \quad (C \cdot C)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)}{2}; \quad (S \cdot S)$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)}{2}. \quad (S \cdot C)$$

Доказательство. Сложив почленно равенства $(C_{\alpha+\beta})$ и $(C_{\alpha-\beta})$, выражающие косинус суммы и косинус разности, получим:

$$\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta.$$

Откуда следует формула $(C \cdot C)$.

Если почленно вычесть равенства $(C_{\alpha+\beta})$ и $(C_{\alpha-\beta})$, то получается формула $(S \cdot S)$. Тождество $(S \cdot C)$ устанавливается почленным сложением равенств $(S_{\alpha+\beta})$ и $(S_{\alpha-\beta})$, ч. т. д.

Доказанные формулы позволяют заменить вычисление произведения синусов и косинусов вычислением суммы этих функций (но от других аргументов).

С л е д с т в и е. Последовательным применением формул $(C \cdot C)$, $S \cdot S)$ и $(S \cdot C)$ любое произведение

$$\cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2 \dots \cos \alpha_n \cdot \sin \beta_1 \cdot \sin \beta_2 \dots \sin \beta_m$$

можно преобразовать в сумму косинусов и синусов.

Геометрическая интерпретация. Пусть α — произвольный, а β — острый угол. Построим ромб, смежными сторонами которого являются радиусы единичного круга, образующие углы $\pm \beta$ с конечной стороной угла α (черт. 79). Диагональ ромба

OM есть замыкающая ломаной OLM . Спроектировав на ось абсцисс, получим:

$$\text{пр } OL + \text{пр } LM = \text{пр } OM.$$

Векторы OL и LM образуют с осью OX углы $\alpha + \beta$ и $\alpha - \beta$, поэтому:

$\text{пр } OL = \cos(\alpha + \beta)$, $\text{пр } LM = \cos(\alpha - \beta)$ и $\text{пр } OM = 2OK \cos \alpha$, где K — точка пересечения диагоналей ромба, имеем: $OK = \cos \beta$. Подставив в равенство (1) и сократив на 2, получим формулу (С·С).

Проектированием на ось ординат получим формулу (S·C).

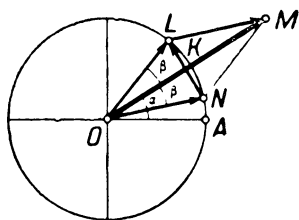
Вторая диагональ NL ромба образует с осью OX угол $\alpha + \frac{\pi}{2}$, отрезок OL служит замыкающей ломаной ONL .
Имеем:

$$\text{пр}_x NL = 2 \text{пр } NK = 2 \sin \beta \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -2 \sin \beta \sin \alpha$$

и

$$\cos(\alpha + \beta) = \text{пр}_x OL = \text{пр}_x ON + \text{пр}_x NL = \cos(\alpha - \beta) - 2 \sin \alpha \sin \beta.$$

Откуда получается формула (S·S).



Черт. 19

В качестве упражнения предлагаем выполнить построение в случае, когда β не является острым углом (например, β — тупой угол).

П р и м е ч а н и е. Изложенная интерпретация доказательством рассматриваемых формул служить не может, так как формулы верны при произвольных α и β , а не только для случая острого угла β .

Примеры.

1. Вычислить (без таблиц) произведение

$$P = \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg} 80^\circ.$$

Р е ш е н и е. Имеем:

$$P = \frac{\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ}{\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ};$$

как показано в примере, рассмотренном на стр. 88,

$$\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}.$$

Следовательно, знаменатель равен $\frac{1}{16}$. Для вычисления числителя применим формулу (S·S):

$$\sin 20^\circ \sin 40^\circ = \frac{1}{2} (\cos 20^\circ - \cos 60^\circ);$$

и далее:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\cos 20^\circ - \cos 60^\circ) \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 80^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left[\cos 20^\circ \sin 80^\circ - \frac{1}{2} \sin 80^\circ \right] = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left[\frac{\sin 100^\circ + \sin 60^\circ}{2} - \frac{1}{2} \sin 80^\circ \right] = \frac{3}{16}\end{aligned}$$

(принять во внимание, что $\sin 100^\circ = \sin 80^\circ$).

Следовательно: $P = 3$.

2. Доказать, что:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) - \cos(\beta + \gamma) \sin(\beta - \gamma) + \\ + \cos(\gamma + \delta) \sin(\gamma - \delta) + \cos(\delta + \alpha) \sin(\delta - \alpha) = 0.\end{aligned}$$

Решение. Преобразуем каждое слагаемое в сумму по формуле (С·С):

$$\sin(\alpha - \beta) \cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}(\sin 2\alpha - \sin 2\beta).$$

Написав аналогичные равенства для остальных трех слагаемых и сложив их почленно, получим нуль в правой части.

3. Преобразовать в сумму $\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$.

Решение. Применим формулу (С·С) сначала к произведению двух первых сомножителей:

$$\begin{aligned}\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma &= \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2} \cos \gamma = \\ &= \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta) \cos \gamma + \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) \cos \gamma\end{aligned}$$

снова применим формулу (С·С):

$$\begin{aligned}\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma &= \frac{1}{4} \cos(\alpha + \beta + \gamma) + \frac{1}{4} \cos(\alpha + \beta - \gamma) + \\ &+ \frac{1}{4} \cos(\alpha - \beta + \gamma) + \frac{1}{4} \cos(\alpha - \beta - \gamma)\end{aligned}$$

§ 20. Тригонометрические многочлены и их преобразование

Определение. Выражение вида

$$\begin{aligned}P(\alpha) &= a_0 + (a_1 \cos \alpha + b_1 \sin \alpha) + \dots + (a_k \cos k\alpha + b_k \sin k\alpha) + \\ &+ \dots (a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha)\end{aligned}$$

называется тригонометрическим многочленом n -го порядка; при этом предполагается, что $|a_n| + |b_n| \neq 0$ *

Иными словами, тригонометрический многочлен есть линейная комбинация, составленная из функций

$$1, \cos \alpha, \sin \alpha, \dots, \cos k\alpha, \sin k\alpha, \dots, \cos n\alpha, \sin n\alpha.$$

Примерами тригонометрических многочленов могут служить следующие выражения:

$$1 + \cos \alpha + \sin \alpha, \cos \alpha + 3 \sin 2\alpha + \cos 3\alpha \text{ и т. п.}$$

* Это условие выражает, что хотя бы один из коэффициентов a_n и b_n не равен нулю.

Теорема. Всякая целая неотрицательная степень косинуса и синуса $\cos^n x$ и $\sin^m x$, а также всякое произведение этих степеней может быть преобразовано в тригонометрический многочлен.

Доказательство. В самом деле, всякое произведение $\cos \alpha_1 \cos \alpha_2, \dots, \cos \alpha_n \sin \beta_1 \cdot \sin \beta_2, \dots, \sin \beta_m$ можно преобразовать в сумму косинусов и синусов (см. § 19, следствие), аргументами которых служат алгебраические суммы вида

$$\alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \dots \pm \alpha_n \pm \beta_1 \pm \beta_2 \pm \beta_3 \pm \dots \pm \beta_m.$$

В частности при $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_m = \alpha$ получатся формулы преобразования произведений $\cos^n \alpha \sin^m \alpha$ (в частности, может быть $n = 0$ или $m = 0$), в линейную комбинацию косинусов и синусов дуг, кратных α , т. е. в тригонометрические многочлены, и т. д.

На практике для выполнения этого преобразования целесообразно пользоваться формулами

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

в целях упрощения алгебраических выкладок (см. ниже примеры).

В элементарной математике преобразование степеней $\cos^n \alpha$, $\sin^m \alpha$ и $\cos^n \alpha \sin^m \alpha$ в тригонометрические многочлены называется также преобразованием **п о н и ж е н и я** **с т е п е н и**.

В общем виде формулы преобразования степеней $\cos^n \alpha$ и $\sin^n \alpha$ в тригонометрические многочлены удобно получить, воспользовавшись формулами **М о а в р а**.

Положим

$$u = \cos \alpha + i \sin \alpha, \quad v = \cos \alpha - i \sin \alpha;$$

тогда имеем

$$\cos \alpha = \frac{u+v}{2}, \quad \sin \alpha = \frac{u-v}{2i}, \quad uv = 1,$$

$$u^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha, \quad v^n = \cos n\alpha - i \sin n\alpha,$$

откуда

$$\cos n\alpha = \frac{1}{2} (u^n + v^n), \quad \sin n\alpha = \frac{1}{2i} (u^n - v^n).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \cos^n \alpha &= \left(\frac{u+v}{2} \right)^n = \frac{1}{2^n} (u^n + C_n^1 u^{n-1} v + C_n^2 u^{n-2} v^2 + \dots + C_n^2 u^2 v^{n-2} + \\ &+ C_n^1 u v^{n-1} + v^n) = \frac{1}{2^n} [(u^n + v^n) + C_n^1 u v (u^{n-2} + v^{n-2}) + \\ &+ C_n^2 u^2 v^2 (u^{n-4} + v^{n-4}) + \dots] = \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} [\cos n\alpha + C_n^1 \cos (n-2)\alpha + C_n^2 \cos (n-4)\alpha + \dots]. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\sin^n \alpha = \frac{1}{2^n i^n} (u - v)^n = \frac{1}{2^n i^n} [u^n - C_n^1 u^{n-1} v + C_n^2 u^{n-2} v^2 - \dots].$$

При четном $n=2k$ получим:

$$\begin{aligned} \sin^{2k} \alpha &= \frac{(-1)^k}{2^{2k}} [(u^{2k} + v^{2k}) - C_{2k}^1 uv (u^{2k-2} + v^{2k-2}) + \dots] = \\ &= \frac{(-1)^k}{2^{2k-1}} [\cos 2k\alpha - C_{2k}^1 \cos (2k-2)\alpha + C_{2k}^2 \cos (2k-4)\alpha - \dots]. \end{aligned}$$

При нечетном $n=2k+1$ получим:

$$\begin{aligned} \sin^{2k+1} \alpha &= \frac{(-1)^k}{2^{2k+1} i} [(u^{2k+1} - v^{2k+1}) - C_{2k+1}^1 uv (u^{2k-1} - v^{2k-1}) + \\ &+ C_{2k+1}^2 u^2 v^2 (u^{2k-3} - v^{2k-3}) - \dots] = \frac{(-1)^k}{2^{2k}} [\sin (2k+1)\alpha - \\ &+ C_{2k+1}^1 \sin (2k-1)\alpha + C_{2k+1}^2 \sin (2k-3)\alpha + \dots]. \end{aligned}$$

Предлагаем учащимся в виде упражнения доказать полученные равенства методом индукции, исходя из равенств:

$$\cos^{n+1} \alpha = \cos^n \alpha \cdot \cos \alpha; \quad \sin^{n+1} \alpha = \sin^n \alpha \cdot \sin \alpha;$$

из выражений (по предположению) для $\cos^n \alpha$ и $\sin^n \alpha$ и из формул (С·С), (S·C), (S·S).

Примеры.

1. Преобразовать в тригонометрический многочлен $\sin^3 \alpha$.

Решение.

$$\begin{aligned} \sin^3 \alpha &= \sin^2 \alpha \sin \alpha = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha) \sin \alpha = \frac{1}{2} \sin \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha \cos 2\alpha = \\ &= \frac{1}{2} \sin \alpha - \frac{1}{2} \frac{\sin 3\alpha + \sin (-\alpha)}{2} = \frac{3}{4} \sin \alpha - \frac{1}{4} \sin 3\alpha. \end{aligned}$$

2. Преобразовать в тригонометрический многочлен $\sin^4 \alpha$.

Решение.

$$\begin{aligned} \sin^4 \alpha &= \left(\frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (1 - 2 \cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha) = \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 2\alpha + \frac{1}{4} \frac{1 + \cos 4\alpha}{2} = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2\alpha + \frac{1}{8} \cos 4\alpha. \end{aligned}$$

3. Преобразовать в тригонометрический многочлен $\sin^3 \alpha \cos^5 \alpha$.

Решение

$$\begin{aligned} \sin^3 \alpha \cos^5 \alpha &= (\sin \alpha \cos \alpha)^3 \cos^2 \alpha = \\ &= \frac{1}{16} \sin^3 2\alpha (1 + \cos 2\alpha) = \frac{1}{16} \sin^3 2\alpha (\sin 2\alpha + \sin 2\alpha \cos 2\alpha) = \\ &= \frac{1}{32} (1 - \cos 4\alpha) \left(\sin 2\alpha + \frac{1}{2} \sin 4\alpha \right) = \\ &= \frac{1}{32} \left[\sin 2\alpha + \frac{1}{2} \sin 4\alpha - \cos 4\alpha \sin 2\alpha - \frac{1}{2} \cos 4\alpha \sin 4\alpha \right]. \end{aligned}$$

Имеем:

$$\cos 4\alpha \sin 2\alpha = \frac{\sin 6\alpha - \sin 2\alpha}{2} \quad \text{и} \quad \cos 4\alpha \sin 4\alpha = \frac{1}{2} \sin 8\alpha;$$

после подстановки получим:

$$\sin^3 \alpha \cos^5 \alpha = \frac{3}{64} \sin 2\alpha + \frac{1}{64} \sin 4\alpha - \frac{1}{64} \sin 6\alpha - \frac{1}{128} \sin 8\alpha.$$

Теорема. *Всякий тригонометрический многочлен может быть преобразован в многочлен относительно косинуса и синуса:*

$$P(\alpha) = Q(\cos \alpha, \sin \alpha),$$

где $P(\alpha)$ — тригонометрический многочлен, а $Q(x, y)$ — некоторый многочлен от двух аргументов.

При этом порядок тригонометрического многочлена $P(\alpha)$ равен степени соответствующего многочлена $Q(x, y)$.

Обратно: всякий многочлен относительно косинуса и синуса может быть преобразован в тригонометрический многочлен.

Доказательство. Пусть

$$P(\alpha) = a_0 + (a_1 \cos \alpha + b_1 \sin \alpha) + \dots + (a_k \cos k\alpha + b_k \sin k\alpha) + \dots + (a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha)$$

— данный тригонометрический многочлен; преобразуем каждый его член по формулам (см. § 17):

$$\cos k\alpha = T_k(\cos \alpha); \quad \sin k\alpha = \sin \alpha U_k(\cos \alpha);$$

просуммируем, тогда получим

$$P(\alpha) \equiv [a_0 + a_1 T_1(\cos \alpha) + \dots + a_k T_k(\cos \alpha) + \dots + a_n T_n(\cos \alpha)] + \sin \alpha [b_1 + b_2 U_2(\cos \alpha) + \dots + b_n U_n(\cos \alpha)].$$

Правая часть этого тождества есть многочлен $Q(\cos \alpha, \sin \alpha)$ относительно $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$; группа старших членов относительно $(\cos \alpha$ и $\sin \alpha)$ есть $2^{n-1} a_n \cos^n \alpha + 2^{n-1} b_n \sin \alpha \cos^{n-1} \alpha$; так как $|a_n| + |b_n| \neq 0$, то эта группа членов не может обратиться в нуль-многочлен; следовательно, степень $Q(x, y)$ равна n .

Обратно: для преобразования многочлена $Q(\cos \alpha, \sin \alpha)$ в тригонометрический многочлен достаточно преобразовать каждый его член в тригонометрический многочлен и выполнить приведение подобных членов.

Примечание. Представление тригонометрического многочлена $P(\alpha)$ в виде многочлена $Q(\cos \alpha, \sin \alpha)$ не единственно, так как всякую содержащуюся в Q четную степень косинуса (синуса) можно выразить через синус (косинус).

Примеры. 1. Преобразовать тригонометрический многочлен

$$P(\alpha) = 1 + \cos \alpha + (2 \cos 2\alpha + 3 \sin 2\alpha) + (\cos 3\alpha - \sin 3\alpha)$$

в многочлен относительно $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned} 2 \cos 2\alpha + 3 \sin 2\alpha &= 2 \cos^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha + 6 \cos \alpha \sin \alpha; \\ \cos 3\alpha - \sin 3\alpha &= (4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha) - (3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha) = \\ &= 4 \sin^3 \alpha + 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha - 3 \sin \alpha \end{aligned}$$

Подставив, получим

$$P(\alpha) = 1 - 2 \cos \alpha - 3 \sin \alpha + 2 \cos^2 \alpha + 6 \cos \alpha \sin \alpha - \\ - 2 \sin^2 \alpha + 4 \cos^3 \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

Заменив, например, $\cos^3 \alpha$ на $\cos \alpha (1 - \sin^2 \alpha)$, получим (после подстановки) другое представление $P(\alpha)$ в виде многочлена относительно косинуса и синуса.

2. Преобразовать в тригонометрический многочлен

$$Q(\cos \alpha, \sin \alpha) = 2 \cos \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \cos^3 \alpha - \sin^4 \alpha.$$

Решение. Подставив

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha, \quad \cos^3 \alpha = \frac{3}{4} \cos \alpha + \frac{\cos 3\alpha}{4};$$

$$\sin 4\alpha = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{1}{8} \cos 4\alpha$$

(см. примеры 1 и 2 на стр. 99),
получим

$$\begin{aligned} Q(\cos \alpha, \sin \alpha) &= \frac{3}{8} + \frac{11}{4} \cos \alpha + \left(\frac{1}{2} \sin 2\alpha - \frac{1}{2} \cos 2\alpha \right) + \\ &+ \frac{1}{4} \cos 3\alpha + \frac{1}{8} \cos 4\alpha. \end{aligned}$$

§ 21. Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение

Теорема. При всех значениях α и β имеют место равенства:

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}; \quad (C + C)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}; \quad (C - C)$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}; \quad (S + S)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}. \quad (S - S)$$

При всех значениях α и β , отличных от $\frac{\pi}{2} + k\pi$, имеют место равенства:

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}; \quad (T + T)$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}. \quad (T - T)$$

Доказательство. Для доказательства четырех первых формул введем вспомогательные аргументы φ и ψ , связанные с аргументами α и β линейными уравнениями:

$$\varphi + \psi = \alpha, \quad \varphi - \psi = \beta. \quad (L)$$

При всех значениях α и β уравнения (L) можно решить относительно φ и ψ

$$\varphi = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad \psi = \frac{\alpha - \beta}{2}. *$$

Формулы (L) и (L') устанавливают взаимно однозначное соответствие между множеством всевозможных пар значений аргументов α и β и множеством пар значений аргументов φ и ψ .

Имеем:

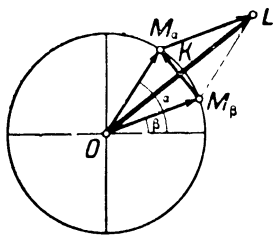
$$\begin{aligned} \cos \alpha + \cos \beta &= \cos(\varphi + \psi) + \cos(\varphi - \psi) = 2 \cos \varphi \cos \psi = \\ &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}. \end{aligned}$$

Аналогично доказываются следующие три формулы.

Равенства $(T \pm T)$ доказываются формальными преобразованиями:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \pm \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = \\ &= \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \quad \text{ч. т. д.} \end{aligned}$$

Выведенные формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведения называются также формулами приведения к логарифмическому виду. При вычислениях с таблицами логарифмов всегда удобно вместо сложения пользоваться умножением, а потому при логарифмических вычислениях целесообразно суммы представлять в виде произведений.



Черт. 80

Геометрическая интерпретация. Построим радиусы единичного круга, образующие углы α и β с горизонтальной осью; угол, образованный этими радиусами, равен $\alpha - \beta$.

Ограничимся рассмотрением случая, когда $0 < \alpha - \beta < \pi$. Диагональ OL ромба, построенного на радиусах-векторах OM_α и OM_β образует угол $\frac{\alpha + \beta}{2}$ с осью OX; ее длина равна (черт. 80)

$$|OL| = 2|OK| = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

* Точки (φ, ψ) и (α, β) посредством невырожденного аффинного преобразования (L') взаимно однозначно преобразуются друг в друга.

Спроектировав ломаную $OM_\beta L$ на ось абсцисс, получим

$$\text{пр } OM_\beta + \text{пр } M_\beta L = \text{пр } OL, \quad (1)$$

но

$$\text{пр } OM_\beta = \cos \beta, \quad \text{пр } M_\beta L = \text{пр } OM_\alpha = \cos \alpha,$$

$$\text{пр } OL = |OL| \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Подставив в равенство (1), получим формулу (C + C). Спроектировав на ось ординат, получим формулу (S + S).

Вторая диагональ $M_\beta M_\alpha$ образует с осью OX угол $\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha + \beta}{2}$, ее длина равна $2|M_\beta K| = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$, радиус-вектор OM_α есть замыкающая ломаной $OM_\beta M_\alpha$.

Имеем:

$$\text{пр } OM_\alpha = \text{пр } OM_\beta + \text{пр } M_\beta M_\alpha$$

или

$$\cos \alpha = \cos \beta + 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha + \beta}{2} \right).$$

Откуда, приняв во внимание, что

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha + \beta}{2} \right) = -\sin \frac{\alpha + \beta}{2},$$

получим формулу (C - C). Спроектировав на ось OY , получим формулу (S - S).

Пр и м е ч а н и е. Изложенная интерпретация доказательством формул приведения к логарифмическому виду служить не может (см. аналогичное примечание на стр. 96).

С л е д с т в и я из основных формул:

$$\begin{aligned} 1. \quad \cos \alpha + \sin \beta &= \cos \alpha + \cos \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) = \\ &= 2 \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha + \beta}{2} \right). \end{aligned}$$

В частности, при $\alpha = \beta$

$$\cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right).$$

2. Положим $\beta = \frac{\pi}{4}$ в (T + T) и (T - T)

$$1 + \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)}{\cos \alpha}, \quad 1 - \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)}{\cos \alpha}.$$

$$3. \quad \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \frac{2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

4. Аналогично получим:

$$\frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\cos \alpha - \cos \beta} = -\frac{\operatorname{ctg} \frac{\alpha + \beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}}, \quad \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha - \sin \beta} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}}.$$

$$5. \quad 1 + \sin \alpha = \sin \frac{\pi}{2} + \sin \alpha =$$

$$= 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right);$$

так как $\sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) = \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)$, то

$$1 + \sin \alpha = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) = 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right).$$

6. Аналогично

$$1 - \sin \alpha = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) = 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right).$$

Примеры.

1. Представить в виде произведения

$$\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta.$$

Решение. Первый способ:

$$\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = (\sin \alpha + \sin \beta) (\sin \alpha - \sin \beta) =$$

$$= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} =$$

$$= \left(2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \left(2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right) =$$

$$= \sin (\alpha + \beta) \sin (\alpha - \beta).$$

Второй способ: Применив преобразование понижения степени, получим:

$$\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \frac{1}{2} (\cos 2\beta - \cos 2\alpha) = \sin (\alpha + \beta) \sin (\alpha - \beta).$$

2. Упростить выражение

$$S = \sin^2 (\alpha - 30^\circ) + \sin^2 (\alpha + 30^\circ) - \sin^2 \alpha.$$

Решение. Применим к каждому слагаемому преобразование понижения степени:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1 - \cos (2\alpha - 60^\circ)}{2} + \frac{1 - \cos (2\alpha + 60^\circ)}{2} - \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\cos 2\alpha}{2} - \frac{\cos (2\alpha - 60^\circ) + \cos (2\alpha + 60^\circ)}{2}. \end{aligned}$$

Преобразуем числитель последней дроби в произведение:

$$\cos (2\alpha - 60^\circ) + \cos (2\alpha + 60^\circ) = 2 \cos 2\alpha \cos 60^\circ = \cos 2\alpha;$$

подставив, получим $S \equiv \frac{1}{2}$.

3. Представить в виде произведения

$$S = \sin \alpha + \cos \alpha + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha + \sin 3\alpha + \cos 3\alpha.$$

Решение. Группируем слагаемые и преобразуем после группировки в следующем порядке:

$$\sin \alpha + \sin 3\alpha = 2 \sin 2\alpha \cos \alpha; \quad \cos \alpha + \cos 3\alpha = 2 \cos 2\alpha \cos \alpha.$$

Следовательно,

$$S = (2 \sin 2\alpha \cos \alpha + \sin 2\alpha) + (2 \cos 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha).$$

Имеем:

$$\begin{aligned} 2 \sin 2\alpha \cos \alpha + \sin 2\alpha &= 2 \sin 2\alpha \left(\cos \alpha + \frac{1}{2} \right) = 2 \sin 2\alpha \left(\cos \alpha + \cos \frac{\pi}{3} \right) = \\ &= 4 \sin 2\alpha \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \cos \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \end{aligned}$$

и

$$2 \cos 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha = 4 \cos 2\alpha \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \cos \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6} \right),$$

откуда

$$\begin{aligned} S &= 4 \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \cos \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6} \right) (\sin 2\alpha + \cos 2\alpha) = \\ &= 4 \sqrt{2} \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \cos \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \cos \left(2\alpha - \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

4. Преобразовать в произведение

$$S = \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma - \sin (\alpha + \beta + \gamma).$$

Решение. Преобразуем выражение S по формулам $(S + S)$ и $(S - S)$ сгруппировав первое слагаемое со вторым, а третье — с четвертым:

$$\begin{aligned} S &= (\sin \alpha + \sin \beta) - [\sin (\alpha + \beta + \gamma) - \sin \gamma] = \\ &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \gamma \right) \sin \frac{\alpha + \beta}{2} = \\ &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \left[\cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \gamma \right) \right] = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} 2 \sin \frac{\alpha + \gamma}{2} \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma - \sin (\alpha + \beta + \gamma) = 4 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \sin \frac{\gamma + \alpha}{2}.$$

5. Преобразовать в произведение:

$$S = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma - \frac{\sin (\alpha + \beta + \gamma)}{\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}.$$

Решение.

По формуле

$$\sin (\alpha + \beta + \gamma) = \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma [\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma]$$

(стр. 76) получим

$$S = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma.$$

6. При каких условиях имеет место равенство

$$\sin x + \sin y = \sin (x + y)?$$

Решение. Преобразуем левую и правую части:

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2};$$

$$\sin(x+y) = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x+y}{2}.$$

Данное равенство можно переписать так:

$$\sin \frac{x+y}{2} \left(\cos \frac{x-y}{2} - \cos \frac{x+y}{2} \right) = 0$$

или

$$2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} = 0.$$

Приравнявая поочередно сомножители нулю получим:

$$a) \sin \frac{x+y}{2} = 0, \quad \frac{x+y}{2} = k\pi \quad x+y = 2k\pi; \quad (1)$$

$$b) \sin \frac{x}{2} = 0, \quad x = 2k\pi, \quad y - \text{произвольная дуга}; \quad (2)$$

$$c) \sin \frac{y}{2} = 0, \quad y = 2k\pi, \quad x - \text{произвольная дуга}. \quad (3)$$

Итак, для выполнения данного равенства необходимо и достаточно, чтобы пара чисел x и y удовлетворяла хотя бы одному из условий (1), (2), (3), т. е. или дуги x и y оканчиваются в точках, симметричных относительно оси абсцисс, либо одна из дуг оканчивается в точке $(1, 0)$.

§ 22. Примеры выполнения различных тригонометрических преобразований

Теоремы сложения и вытекающие из них следствия (формулы приведения, формулы тригонометрических функций от кратного и половинного аргумента, формулы преобразования произведения в сумму и суммы в произведение) вместе с основными тригонометрическими тождествами (см. § 13) служат основанием для выполнения различных тождественных преобразований аналитических выражений, содержащих тригонометрические операции. Эти тождественные преобразования как по своей цели, так и по методам выполнения могут быть весьма разнообразными. В практике выполнения тождественных преобразований основные формулы и отдельные частные приемы применяются в различных комбинациях; частные свойства преобразуемых выражений нередко позволяют рационализировать вычисления. Эти упрощающие моменты никакой общей теорией предусмотрены быть не могут. *Навыки в рациональном выполнении преобразований достигаются практикой.*

В настоящем параграфе на примерах показаны различные приемы выполнения тригонометрических преобразований.

Примеры.

В примерах 1—7 показаны различные приемы преобразования сумм в произведения и произведений в суммы.

1. Преобразовать в произведение

$$S = (\cos x + \cos y)^2 + (\sin x + \sin y)^2.$$

Решение. Преобразовав возводимые в квадрат суммы в произведения, получим:

$$S = 4 \cos^2 \frac{x+y}{2} \cos^2 \frac{x-y}{2} + 4 \sin^2 \frac{x+y}{2} \cos^2 \frac{x-y}{2} = 4 \cos^2 \frac{x-y}{2}.$$

2. Преобразовать в произведение

$$(\sin \alpha + \cos 2\alpha + \sin 3\alpha)^3 - \sin^3 \alpha - \sin^3 2\alpha - \sin^3 3\alpha.$$

Решение. Применим следующую формулу разложения на множители:

$$(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(x+y)(y+z)(z+x);$$

имеем:

$$S = 3(\sin \alpha + \sin 2\alpha)(\sin 2\alpha + \sin 3\alpha)(\sin 3\alpha + \sin \alpha) =$$

$$= 3 \cdot 2 \sin \frac{3}{2} \alpha \cos \frac{\alpha}{2} \cdot 2 \sin \frac{5}{2} \alpha \cos \frac{\alpha}{2} \cdot 2 \sin 2\alpha \cos \alpha =$$

$$= 24 \sin \frac{3}{2} \alpha \sin \frac{5}{2} \alpha \sin 2\alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cos \alpha.$$

3. Доказать тождество:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sin(a-b) \sin(a-c)} + \frac{1}{\sin(b-c) \sin(b-a)} + \frac{1}{\sin(c-a) \sin(c-b)} = \\ & = \frac{1}{2 \cos \frac{a-b}{2} \cos \frac{a-c}{2} \cos \frac{b-c}{2}}. \end{aligned}$$

Решение. Приведем к общему знаменателю левую часть:

$$\frac{1}{\sin(a-b) \sin(b-c) \sin(a-c)} [\sin(b-c) - \sin(a-c) + \sin(a-b)].$$

Преобразуем в произведение выражение, заключенное в квадратные скобки:

$$\sin(b-c) - \sin(a-c) = 2 \cos \frac{a+b-2c}{2} \sin \frac{b-a}{2}$$

и далее:

$$2 \cos \frac{a+b-2c}{2} \sin \frac{b-a}{2} + \sin(a-b) =$$

$$= 2 \sin \frac{b-a}{2} \left[\cos \frac{a+b-2c}{2} - \cos \frac{b-a}{2} \right] =$$

$$= -4 \sin \frac{b-a}{2} \sin \frac{b-c}{2} \sin \frac{a-c}{2}.$$

Преобразовав каждый из множителей в знаменателе по формуле $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$, получим после сокращения правую часть доказываемого тождества

4. Доказать тождества:

$$a) \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha-\beta) \sin(\alpha-\gamma)} + \frac{\sin \beta}{\sin(\beta-\gamma) \sin(\beta-\alpha)} + \frac{\sin \gamma}{\sin(\gamma-\alpha) \sin(\gamma-\beta)} = 0.$$

$$b) \frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha - \beta) \sin(\alpha - \gamma)} + \frac{\cos \beta}{\sin(\beta - \gamma) \sin(\beta - \alpha)} + \frac{\cos \gamma}{\sin(\gamma - \alpha) \sin(\gamma - \beta)} = 0.$$

Решение. Докажем тождество а). После приведения к общему знаменателю и сложения получим в числителе следующее выражение:

$$\sin \alpha \sin(\beta - \gamma) + \sin \beta \sin(\gamma - \alpha) + \sin \gamma \sin(\alpha - \beta),$$

в котором всякое последующее слагаемое получается из предыдущего круговой перестановкой аргументов α , β и γ . Преобразуем первое слагаемое по формуле (S·S):

$$\sin \alpha \sin(\beta - \gamma) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta + \gamma) - \cos(\alpha + \beta - \gamma)]$$

Прочие слагаемые преобразуются посредством круговой перестановки аргументов: как нетрудно проверить, сумма всех этих слагаемых тождественно равна нулю

Тождество б) получится заменой в тождестве а) аргументов α , β и γ соответственно на $\frac{\pi}{2} - \alpha$, $\frac{\pi}{2} - \beta$, $\frac{\pi}{2} - \gamma$.

5 Доказать тождество:

$$\begin{aligned} \frac{\sin 3a}{\sin(c-a) \sin(a-b)} + \frac{\sin 3b}{\sin(a-b) \sin(b-c)} + \\ + \frac{\sin 3c}{\sin(b-c) \sin(c-a)} = 4 \sin(a+b+c). \end{aligned}$$

Решение. Приведем дроби к общему знаменателю, тогда для первой дроби получим в числителе произведение, которое преобразуем в сумму:

$$\sin 3a \sin(b-c) = \frac{\cos(3a-b+c) - \cos(3a+b-c)}{2}. \quad (1)$$

Числители остальных дробей получим круговой перестановкой аргументов:

$$\sin 3b \sin(c-a) = \frac{\cos(3b-c+a) - \cos(3b+c-a)}{2}, \quad (2)$$

$$\sin 3c \sin(a-b) = \frac{\cos(3c-a+b) - \cos(3c+a-b)}{2}. \quad (3)$$

Отнеся общий множитель $\frac{1}{2}$ к знаменателю, перегруппируем слагаемые числителя следующим образом: первое слагаемое (1) сгруппируем со вторым слагаемым (2)

$$\cos(3a-b+c) - \cos(3b+c-a). \quad (4)$$

Первое слагаемое (2) сгруппируем со вторым слагаемым (3) и первое слагаемое (3) — со вторым слагаемым (1). Преобразовав разность (4) в произведение, получим:

$$-2 \sin(a+b+c) \sin(2a-2b).$$

Выполнив круговую перестановку аргументов, получим два остальных произведения. Сложив все эти произведения, получим числитель

$$-2 \sin(a+b+c) [\sin(2a-2b) + \sin(2b-2c) + \sin(2c-2a)].$$

Преобразуем в произведение сумму, заключенную в квадратные скобки:
 $[\sin(2a - 2b) + \sin(2b - 2c)] + \sin 2(c - a) =$
 $= 2 \sin(a - c) \cos(a - 2b + c) + 2 \sin(c - a) \cos(c - a) = 2 \sin(a - c) \times$
 $\times [\cos(a - 2b + c) - \cos(c - a)] = -4 \sin(c - a) \sin(b - c) \sin(a - b).$

Итак, числитель левой части доказываемого тождества равен

$$8 \sin(a + b + c) \sin(a - b) \sin(b - c) \sin(c - a)$$

Знаменатель равен $2 \sin(a - b) \sin(b - c) \sin(c - a).$

Сократив на общие множители, получим $4 \sin(a + b + c)$, ч. т. д.

6. Установить соотношения между значениями аргументов α , β и γ , при которых имеет место равенство:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 1. \quad (1)$$

Решение. Преобразуем в произведение следующую сумму:

$$S = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - 1;$$

имеем:

$$a) \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma - 1 = \cos^2 \beta - \sin^2 \gamma =$$

$$= \frac{1}{2} [\cos 2\beta + \cos 2\gamma] = \cos(\beta + \gamma) \cos(\beta - \gamma);$$

$$b) \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = \cos^2 \alpha + \cos \alpha [\cos(\beta + \gamma) + \cos(\beta - \gamma)];$$

$$c) S = \cos(\beta + \gamma) \cos(\beta - \gamma) + \cos^2 \alpha + \cos \alpha [\cos(\beta + \gamma) + \cos(\beta - \gamma)] =$$

$$= [\cos \alpha + \cos(\beta + \gamma)] [\cos \alpha + \cos(\beta - \gamma)].$$

Откуда получим

$$S = 4 \cos \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \cos \frac{-\alpha + \beta + \gamma}{2} \cos \frac{\alpha - \beta + \gamma}{2} \cos \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2}.$$

Условие (1) равносильно равенству $S = 0$. Необходимым и достаточным условием последнего равенства является обращение в нуль хотя бы одного из множителей на которые разложено выражение S . Приравняв нулю первый множитель, получим: $\cos \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = 0$, откуда

$$\alpha + \beta + \gamma = (2k_1 + 1) \pi \quad (2)$$

Аналогично, приравняв нулю поочередно прочие множители, получим:

$$-\alpha + \beta + \gamma = (2k_2 + 1) \pi; \quad (3)$$

$$\alpha - \beta + \gamma = (2k_3 + 1) \pi; \quad (4)$$

$$\alpha + \beta - \gamma = (2k_4 + 1) \pi, \quad (5)$$

где k_1, k_2, k_3, k_4 — произвольные целые числа.

Искомым необходимым и достаточным условием является существование такой системы целых чисел k_1, k_2, k_3, k_4 , при которой выполняется хотя бы одно из равенств (2) — (5).

Допустим, в частности, что α, β и γ — острые углы

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \gamma < \frac{\pi}{2}; \quad (6)$$

в этом случае ни одно из равенств (3), (4), (5) не может выполняться. В самом деле, из неравенств (6) получим

$$-\frac{\pi}{2} < -\alpha + \beta + \gamma < \pi,$$

и, следовательно, равенство (3) невозможно. Аналогично устанавливается невозможность выполнения равенств (4) и (5). Из неравенств

$$0 < \alpha + \beta + \gamma < \frac{3}{2} \pi$$

следует, что для острых углов α , β и γ может выполняться лишь условие (2) при $k_1 = 0$:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

Следовательно, для острых углов α , β и γ равенство (2) выполняется тогда и только тогда, когда α , β и γ в сумме составляют π (т. е. α , β и γ суть углы треугольника).

7. Представить в виде произведения сумму

$$\sqrt{1 - \cos x} + \sqrt{1 + \cos x}.$$

Решение. Для каждого из радикалов подкоренное выражение отрицательно. Преобразуем отдельно каждый радикал:

$$\sqrt{1 - \cos x} = \sqrt{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \sqrt{2} \left| \sin \frac{x}{2} \right|;$$

$$\sqrt{1 + \cos x} = \sqrt{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \sqrt{2} \left| \cos \frac{x}{2} \right|;$$

следовательно,

$$\sqrt{1 - \cos x} + \sqrt{1 + \cos x} = \sqrt{2} \left(\left| \sin \frac{x}{2} \right| + \left| \cos \frac{x}{2} \right| \right).$$

Дальнейшие преобразования проводятся в зависимости от того, в какой четверти оканчивается дуга $\frac{x}{2}$. Возможны следующие случаи:

а) $4k\pi \leq x \leq (4k+1)\pi$, тогда $\frac{x}{2}$ оканчивается в первой четверти:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \cos x} + \sqrt{1 + \cos x} &= \sqrt{2} \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right) = \\ &= 2 \left(\sin \frac{x}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos \frac{x}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2 \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right); \end{aligned}$$

б) $(4k+1)\pi \leq x \leq (4k+2)\pi$, тогда $\frac{x}{2}$ оканчивается во второй четверти:

$$\sqrt{1 - \cos x} + \sqrt{1 + \cos x} = \sqrt{2} \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right) = 2 \sin \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right);$$

в) $(4k+2)\pi \leq x \leq (4k+3)\pi$; дуга $\frac{x}{2}$ оканчивается в третьей четверти:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \cos x} + \sqrt{1 + \cos x} &= -\sqrt{2} \left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \right) = \\ &= -2 \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right); \end{aligned}$$

г) $(4k+3)\pi \leq x \leq 4(k+1)\pi$; дуга $\frac{x}{2}$ оканчивается в четвертой четверти:

$$\sqrt{1 - \cos x} + \sqrt{1 + \cos x} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right) = 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right).$$

В примерах 8—11 рассмотрены различные тригонометрические преобразования, связанные с исключением неизвестных из системы уравнений. Требуется найти необходимые (в общем случае недостаточные) условия в виде уравнений, которым должны удовлетворять значения параметров, чтобы данная система имела решения.

В практике исключения неизвестных надлежит руководствоваться следующими указаниями:

1) Так как ищутся лишь необходимые условия совместности системы, то допустимы преобразования уравнений, в результате которых множество всех решений системы расширяется (т. е. возможно появление посторонних решений), но недопустимы преобразования, при которых происходит потеря решений.

2) Преобразования уравнений выполняются с тем расчетом, чтобы в качестве следствий из данных уравнений получились уравнения между параметрами, не содержащие неизвестных и не обращающиеся в тождество.

Примеры.

8. Исключить x из системы уравнений:

$$\sin x + \cos x = m, \quad \sin^3 x + \cos^3 x = n.$$

Решение. Имеем:

$$\begin{aligned} \sin^3 x + \cos^3 x &= (\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x \cos x) = \\ &= m(1 - \sin x \cos x). \end{aligned}$$

Возводим обе части первого уравнения в квадрат:

$$1 + 2 \sin x \cos x = m^2.$$

В качестве следствия из данной системы получим:

$$2 \sin x \cos x = m^2 - 1, \quad m \sin x \cos x = m - n.$$

Подставив выражение для произведения $\sin x \cos x$ из первого уравнения во второе, получим в качестве следствия искомое уравнение между параметрами:

$$m^3 - 3m + 2n = 0. \quad (1)$$

Примечание. Поскольку уравнение (1) отыскивалось в качестве необходимого условия, мы не учитывали неравенств, которым должны удовлетворять значения параметров. Так, например, из первого уравнения получим

$$m = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right), \quad \text{откуда} \quad |m| \leq \sqrt{2}.$$

Мы не принимали во внимание также, что почленное возведение уравнения в квадрат может привести к посторонним решениям.

Аналогичное примечание следует иметь в виду при решении всех приведенных ниже примеров на исключение неизвестных.

9. Исключить φ из уравнений:

$$\frac{\cos(\alpha - 3\varphi)}{\cos^3 \varphi} = \frac{\sin(\alpha - 3\varphi)}{\sin^3 \varphi} = m.$$

Решение. Имеем:

$$\cos(\alpha - 3\varphi) = m \cos^3 \varphi; \quad (1)$$

$$\sin(\alpha - 3\varphi) = m \sin^3 \varphi. \quad (2)$$

Умножим уравнения (1) и (2) соответственно на $\cos 3\varphi$ и $\sin 3\varphi$ и вычтем почленно:

$$\cos(\alpha - 3\varphi) \cos 3\varphi - \sin(\alpha - 3\varphi) \sin 3\varphi = m(\cos^3 \varphi \cos 3\varphi - \sin^3 \varphi \sin 3\varphi)$$

или

$$\cos \alpha = m (\cos^3 \varphi \cos 3\varphi - \sin^3 \varphi \sin 3\varphi).$$

Имеем:

$$\begin{aligned}\cos 3\varphi &= -3 \cos \varphi + 4 \cos^3 \varphi, \\ \sin 3\varphi &= 3 \sin \varphi - 4 \sin^3 \varphi,\end{aligned}$$

откуда

$$\cos \alpha = -3m (\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi) + 4m (\cos^6 \varphi + \sin^6 \varphi) \quad (3)$$

Возведем (1) и (2) почленно в квадрат и сложим, тогда получим

$$\cos^6 \varphi + \sin^6 \varphi = \frac{1}{m^2}. \quad (4)$$

Подставив в равенство (3), получим

$$\cos \alpha = -3m (\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi) + \frac{4}{m}. \quad (5)$$

Итак, из равенств (1), (2) следуют равенства (4), (5).

Примем во внимание следующее тригонометрическое тождество:

$$\cos^6 \varphi + \sin^6 \varphi \equiv 1 - 3 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi$$

(см. пример 2, стр. 61). В силу (4) имеем:

$$\frac{1}{m^2} = 1 - 3 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \quad \text{и} \quad \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi = \frac{m^2 - 1}{3m^2}. \quad (6)$$

Имеем далее

$$\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi = 1 - 2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi = 1 - 2 \frac{m^2 - 1}{3m^2} = \frac{m^2 + 2}{3m^2}.$$

Подставив в (5), получим (после упрощения правой части) требуемый результат

$$\cos \alpha = \frac{2 - m^2}{m}.$$

10. Исключить x из уравнений:

$$\cos (x - \alpha) = a, \quad \sin (x - \beta) = b.$$

Решение. Имеем:

$$\begin{aligned}\cos x \cos \alpha + \sin x \sin \alpha &= a \begin{vmatrix} \sin \beta \\ \cos \alpha \end{vmatrix} \cos \beta; \\ \sin x \cos \beta - \cos x \sin \beta &= b \begin{vmatrix} \sin \beta \\ \cos \alpha \end{vmatrix} - \sin \alpha.\end{aligned}$$

Умножив данные уравнения (соответственно) на $\sin \beta$ и $\cos \alpha$, а затем на $\cos \beta$ и на $-\sin \alpha$, после почленного сложения получим:

$$\begin{aligned}\sin x \cos (\alpha - \beta) &= a \sin \beta + b \cos \alpha; \\ \cos x \cos (\alpha - \beta) &= a \cos \beta - b \sin \alpha.\end{aligned}$$

После почленного возведения в квадрат и сложения получим:

$$\cos^2 (\alpha - \beta) = a^2 + b^2 - 2ab \sin (\alpha - \beta).$$

11. Исключить неизвестные x и y из системы уравнений:

$$\sin x + \sin y = 2a, \quad (1)$$

$$\cos x + \cos y = 2b, \quad (2)$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2c, \quad (3)$$

где $a^2 + b^2 \neq 0$

Преобразуем левые части уравнений (1) и (2) в произведения:

$$\sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = a, \quad (1')$$

$$\cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = b. \quad (2')$$

Возведем (1') и (2') почленно в квадрат и сложим:

$$\cos^2 \frac{x-y}{2} = a^2 + b^2, \quad (4)$$

а затем вычтем

$$\left[\cos^2 \frac{x+y}{2} - \sin^2 \frac{x+y}{2} \right] \cos^2 \frac{x-y}{2} = b^2 - a^2.$$

Перейдем к аргументу $x+y$ и примем во внимание (4):

$$\cos(x+y) = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}.$$

Перемножим почленно (1') и (2'), приняв во внимание (4), найдем

$$\sin(x+y) = \frac{2ab}{a^2 + b^2}. \quad (6)$$

Преобразуем левую часть равенства (3) так:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y &= \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} = \frac{2 \sin(x+y)}{\cos(x+y) + \cos(x-y)} = \\ &= \frac{2 \sin(x+y)}{\cos(x+y) + 2 \cos^2 \frac{x-y}{2} - 1}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись равенствами (4), (5) и (6), исключим из равенства (3) аргументы x и y :

$$\frac{\frac{2ab}{a^2 + b^2}}{\frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} + 2(a^2 + b^2) - 1} = c$$

или после преобразований

$$\frac{1}{(a^2 + b^2)^2 - a^2} = c.$$

В примерах 12—15 приводятся доказательства некоторых условных равенств, т. е. равенств, имеющих место при всех значениях аргументов, удовлетворяющих одному или нескольким уравнениям.

Примеры.

12. Доказать, что

$$\frac{\sin^8 x}{a^3} + \frac{\cos^8 x}{b^3} = \frac{1}{(a+b)^3}$$

при всех значениях x , удовлетворяющих условию

$$\frac{\sin^4 x}{a} + \frac{\cos^4 x}{b} = \frac{1}{a+b}, \quad (1)$$

где $a > 0$, $b > 0$.

Решение. Равенство (1) можно переписать в следующем виде:

$$\sin^4 x + \cos^4 x + \frac{b}{a} \sin^4 x + \frac{a}{b} \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2$$

или после преобразований:

$$\left(\sqrt{\frac{b}{a}} \sin^2 x - \sqrt{\frac{a}{b}} \cos^2 x \right)^2 = 0, \text{ откуда } \sqrt{\frac{b}{a}} \sin^2 x = \sqrt{\frac{a}{b}} \cos^2 x,$$

а потому

$$\frac{\sin^2 x}{a} = \frac{\cos^2 x}{b} = \lambda.$$

Подставив в (1), получим: $\lambda = \frac{1}{a+b}$, и, следовательно,

$$\frac{\sin^6 x}{a^3} + \frac{\cos^6 x}{b^3} = \sin^2 x \left(\frac{\sin^2 x}{a} \right)^3 + \cos^2 x \left(\frac{\cos^2 x}{b} \right)^3 = \lambda^3 = \frac{1}{(a+b)^3}.$$

13. Дано:

$$a \cos \alpha + b \sin \alpha = c \quad (1)$$

и

$$a \cos \beta + b \sin \beta = c, \quad (2)$$

где $\alpha \neq \beta + 2k\pi$ и хотя бы одно из чисел a или b отлично от нуля. Доказать, что

$$\cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{c^2}{a^2 + b^2}.$$

Решение. Складывая и вычитая соотношения (1) и (2), получим

$$a \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + b \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = c; \quad (3)$$

$$-a \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} + b \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = 0. \quad (4)$$

Из условия $\alpha - \beta \neq 2k\pi$ следует, что $\sin \frac{\alpha - \beta}{2} \neq 0$. Из (4) получим

$$a \sin \frac{\alpha + \beta}{2} = b \cos \frac{\alpha + \beta}{2}. \quad (5)$$

Допустим для определенности, что $a \neq 0$; из последнего равенства найдем:

$$\sin \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{b}{a} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Докажем, что при данных условиях $\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \neq 0$. В самом деле, в противном случае $\alpha + \beta = (2k+1)\pi$, и тогда соотношение (2) примет вид:

$$-a \cos \alpha + b \sin \alpha = c; \quad (2')$$

из (1) и (2') получим $2a \cos \alpha = 0$. Так как $a \neq 0$, то $\cos \alpha = 0$, откуда $\alpha = \frac{\pi}{2} + k_1\pi$; и, следовательно,

$$\alpha - \beta = 2\alpha - (\alpha + \beta) = 2(k_1 - k)\pi,$$

что противоречит условию.

Из (5) найдем

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{b}{a}.$$

Из равенства (3) получим

$$\begin{aligned} \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} &= \frac{c^2}{\left(a \cos \frac{\alpha + \beta}{2} + b \sin \frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2} = \frac{c^2 \sec^2 \frac{\alpha + \beta}{2}}{\left(a + b \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2} = \\ &= \frac{c^2 \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)}{\left(a + b \frac{b}{a}\right)^2} = \frac{c^2}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

Геометрическая интерпретация Уравнения

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = c \quad \text{и} \quad x \cos \beta + y \sin \beta = c$$

выражают нормальные уравнения двух прямых, касающихся окружности радиуса c , с центром в начале координат; перпендикуляры, опущенные из начала координат на эти прямые, по длине равны c и образуют углы α и β с осью абсцисс. Условия (1) и (2) выражают, что данные прямые пересекаются в точке $M(a, b)$. Угол, образованный перпендикулярами на данные прямые из начала координат, равен $\alpha - \beta$. Из чертежа 81 найдем

$$\cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{c}{OM} = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

14. Доказать, что при $A+B+C=\pi$ имеют место тождества:

$$\begin{aligned} \sin^2 B + \sin^2 C - 2 \sin B \sin C \cos A &= \sin^2 A, \\ \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos B \cos C \cos A &= \sin^2 A. \end{aligned}$$

Решение. Положим

$$\begin{aligned} X &= \sin^2 B + \sin^2 C - 2 \sin B \sin C \cos A - \sin^2 A; \\ Y &= \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos B \cos C \cos A - \sin^2 A. \end{aligned}$$

Сложим и вычтем почленно эти равенства.

$$\begin{aligned} X + Y &= 2 + 2 \cos A (\cos B \cos C - \sin B \sin C) - 2 \sin^2 A = \\ &= 2 [\cos^2 A + \cos A \cos (B + C)]; \end{aligned}$$

но так как

$$\cos (B + C) = \cos (\pi - A) = -\cos A,$$

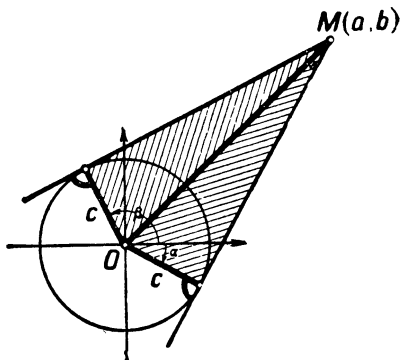
то

$$X + Y = 0;$$

$$\begin{aligned} Y - X &= (\cos^2 B - \sin^2 B) + (\cos^2 C - \sin^2 C) + 2 \cos (B - C) \cos A = \\ &= \cos 2B + \cos 2C + 2 \cos (B - C) \cos A = \\ &= 2 \cos (B + C) \cos (B - C) + 2 \cos (B - C) \cos A = \\ &= 2 \cos (B - C) \cdot [\cos (B + C) + \cos A] = 0. \end{aligned}$$

Итак, $X + Y = 0$ и $Y - X = 0$, откуда $X = Y = 0$,

ч. т. д.



Черт. 81

15. Доказать, что

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \pm \frac{1+e}{1-e}$$

при условии

$$\frac{e^2 - 1}{1 + 2e \cos \alpha + e^2} = \frac{1 + 2e \cos \beta + e^2}{e^2 - 1},$$

где $e > 1$.

Решение Заметим, что знаменатель

$$1 + 2e \cos \alpha + e^2 = (e + \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha$$

положителен при всех значениях α , так как ни при каком значении α равенства

$$\sin \alpha = e + \cos \alpha = 0$$

не могут иметь места. Составим производные пропорции, воспользовавшись следующим свойством:

$$\text{если } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad \text{то } \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d};$$

получим (после сокращения на числовые множители)

$$\frac{e + \cos \beta}{e + \cos \alpha} = \frac{-1 - e \cos \beta}{1 + e \cos \alpha}.$$

Составим вторично производную пропорцию по тому же способу:

$$\frac{(1-e)(1-\cos \beta)}{(1+e)(1+\cos \alpha)} = \frac{(1+e)(1+\cos \beta)}{(1-e)(1-\cos \alpha)}.$$

Следовательно,

$$\frac{1-\cos \beta}{1+\cos \beta} \cdot \frac{1-\cos \alpha}{1+\cos \alpha} = \left(\frac{1+e}{1-e} \right)^2, \quad \text{т. е.} \quad \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \left(\frac{1+e}{1-e} \right)^2.$$

Отсюда следует доказываемое условное равенство

§ 23. Рационализирующие подстановки

Пусть $R(\cos \alpha, \sin \alpha)$ — рациональное выражение относительно $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$. Рассмотрение функций, рациональных относительно $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$ не представляет специального интереса, так как $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$ — рационально выражаются через косинус и синус.

Примерами функций, рациональных относительно косинуса и синуса, могут служить:

$$\sin \alpha \cos \alpha, \quad \frac{1}{\cos \alpha - \sin \alpha}, \quad \frac{\sin \alpha}{2 \sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha - \cos^2 \alpha}.$$

Определение. Если функция $R(\cos \alpha, \sin \alpha)$ может быть представлена в виде сложной функции от промежуточного аргумента $t = f(\alpha)$:

$$R(\cos \alpha, \sin \alpha) = R_1(t),$$

где $R_1(t)$ — рациональная функция, то введение промежуточного аргумента t посредством формулы

$$t = f(\alpha)$$

называется рационализирующей подстановкой.

Теорема. Для всякой функции $R(\cos \alpha, \sin \alpha)$, рациональной относительно $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$, подстановка

$$t = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

является рационализирующей.

Доказательство. Достаточно доказать, что функции $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$ рационально выражаются через тангенс половинного аргумента $t = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. В самом деле, имеем:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}; \\ \sin \alpha &= 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

Положив $t = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, представим функции $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$ в виде рациональных функций от аргумента t :

$$\cos \alpha = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \text{и} \quad \sin \alpha = \frac{2t}{1 + t^2}. \quad (R)$$

Эти равенства имеют место при всех значениях $\alpha \neq (2k+1)\pi$; при $\alpha = (2k+1)\pi$ выражение $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ теряет смысл.

Заменив в данном выражении $R(\cos \alpha, \sin \alpha)$ функции $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$ их выражениями через t , получим рациональное выражение от аргумента t , ч. т. д.

Подстановка $t = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ называется универсальной, так как всякое выражение вида $R(\cos \alpha, \sin \alpha)$ она преобразует в рациональное выражение от аргумента t .

Геометрическая интерпретация. Промежуточный аргумент t изображается отрезком, отсекаемым на оси тангенсов биссектрисой угла α (черт. 82).

Универсальная подстановка обладает следующим свойством: значения промежуточного аргумента $t = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ выражаются ра-

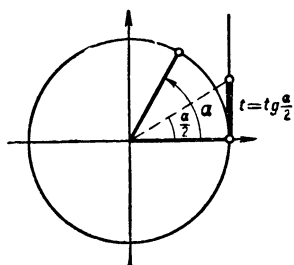
ционально через $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$. В самом деле, согласно формулам $\left(T'_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ и $\left(T''_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ § 18 (стр 90), имеем

$$t = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}. \quad (1)$$

Система функций

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad y = \frac{2t}{1 + t^2} \quad (2)$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между значениями t в интервале $-\infty < t < \infty$ и точками единичной окружности с исключенной точкой $A_1(-1, 0)$. В самом деле, всякой точке $x = \cos \alpha$, $y = \sin \alpha$ единичной окружности (где $-\pi < \alpha < \pi$ соответ-



Черт. 82

ствует значение $t = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ (формулы (1)), причем координаты этой точки выразятся формулами (2). Обратно, всякому действительному значению t соответствует дуга $\alpha = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} t$, оканчивающаяся в точке $M(\cos \alpha, \sin \alpha)$ единичной окружности.

Уравнения (2) позволяют находить на единичной окружности «рациональные точки», т. е. точки с рациональными координатами. В самом деле, всякому рациональному значению t , в силу уравнений (2), соответствует точка $M(x, y)$ окружности с рациональными координатами. Обратно, всякой рациональной точке окружности, отличной от точки $(-1, 0)$, соответствует согласно формуле $\left(T'_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ рациональное значение параметра

$$t = \frac{y}{1 + x}$$

Полученному результату можно дать другое геометрическое толкование. Примем за 1 гипотенузу a прямоугольного треугольника, тогда формулы

$$a = \frac{2}{1 + t^2}, \quad b = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

дают возможность отыскать в общем виде все прямоугольные треугольники, катеты которых соизмеримы с гипотенузой. Итак, мы получаем следующие общие выражения катетов «рациональных» прямоугольных треугольников:

$$a = \frac{2t}{1 + t^2} c, \quad b = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} c,$$

откуда

$$a : b : c = 2t : (1 - t^2) : (1 + t^2).$$

Придавая t всевозможные рациональные значения, будем получать всевозможные рациональные треугольники. Так, при $t = 2$ можно получить

$a = 4$, $b = 3$, $c = 5$ (мы получим по формуле $b < 0$, однако знак не существен, поскольку речь идет о длинах сторон треугольника), при $t = 3$ получим $a = 6$, $b = 8$, $c = 10$, при $t=0$ и $t=1$ треугольник вырождается в отрезок.

Ниже указаны случаи, в которых рационализация может быть достигнута при помощи более простых подстановок.

1°. Если выражение $R(\cos \alpha \sin \alpha)$ содержит функцию $\cos \alpha$ (или $\sin \alpha$) т о л ь к о в ч е т н ы х степенях, то можно положить $t = \sin \alpha$ (соответственно $t = \cos \alpha$). В самом деле, достаточно принять во внимание, что четные степени косинуса (синуса) рационально выражаются через синус (косинус)

$$\cos^{2k} \alpha = (1 - \sin^2 \alpha)^k = (1 - t^2)^k,$$

а потому

$$R(\cos^2 \alpha, \sin \alpha) = R(1 - t^2, t).$$

2°. Если числитель и знаменатель выражения $R(\cos \alpha, \sin \alpha)$, являющегося алгебраической дробью относительно $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$ суть однородные многочлены одной и той же степени k относительно $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$, то можно положить $t = \tg \alpha$ (либо $t = \ctg \alpha$). В самом деле, имеем

$$\sin \alpha = t \cos \alpha.$$

После этой замены все члены числителя и знаменателя будут иметь общий множитель $\cos^k \alpha$; сократив дроби на этот множитель, представим $R \cos \alpha, \sin \alpha$ в виде рациональной функции от аргумента t .

3°. Если все члены числителя и знаменателя выражения $R(\cos \alpha, \sin \alpha)$ имеют четную (либо нечетную) степень относительно $\cos x$ и $\sin x$, то можно положить $t = \tg \alpha$. В самом деле, степени двух различных членов числителя и знаменателя отличаются на четное число единиц, а потому можно заменить числитель и знаменатель тождественными однородными многочленами. Для этого достаточно умножить члены более низких степеней на некоторую степень тригонометрической единицы $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$ (см. ниже пример 4).

4°. Пусть R есть рациональное выражение относительно тригонометрических функций кратных дуг

$$R = R(\cos n_1 \alpha, \sin n_1 \alpha, \cos n_2 \alpha, \sin n_2 \alpha, \dots, \cos n_k \alpha, \sin n_k \alpha),$$

где $n_1, n_2, \dots, n_k$ — целые числа. Если тригонометрические функции кратных дуг выразить через степени $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$, то R представится в виде рациональной функции от $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ и рационализация сводится к рассмотренному случаю.

Если $n_1, n_2, \dots, n_k$ — рациональные (дробные) числа

$$n_1 = \frac{p_1}{q_1}, \quad n_2 = \frac{p_2}{q_2}, \quad \dots, \quad n_k = \frac{p_k}{q_k},$$

то, положив $\alpha = n\beta$, где n — наименьшее общее кратное знаменателей, представим тригонометрические функции, находящиеся

под знаком функции R , в виде тригонометрических функций от аргументов кратных β , т. е., получается предыдущий случай.

Теорема. Если функция $R(\cos \alpha, \sin \alpha)$ четная, то она может быть рационализирована подстановкой $t = \cos \alpha$.

Доказательство. Универсальная подстановка $t_1 = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, где $-\pi < \alpha < \pi$ преобразует данную функцию в рациональную от аргумента t_1

$$R(\cos \alpha, \sin \alpha) = R_1(t_1).$$

При замене α на $-\alpha$ значение t_1 заменится на $-t_1$, а значение R_1 не изменится (в силу условия теоремы) *.

Следовательно, $R_1(t_1)$ есть четная функция от t_1 , а потому

$$R_1(t_1) = R_2(t_1^2),$$

где R_2 — некоторое рациональное выражение.
Из равенств

$$t_1^2 = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - t}{1 + t}$$

следует, что $R_2(t_1^2) = R_2\left(\frac{1-t}{1+t}\right)$ есть рациональная функция параметра $t = \cos \alpha$, ч. т. д.

Практически рационализация выполняется описанным выше способом 1°.

Примечание. Доказательство основано на следующем положении, известном из алгебры: если рациональная функция $R(x)$ четная, то она может быть представлена в виде рациональной функции от x^2 .

В самом деле, пусть $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$. Отделим в многочленах $P(x)$ и $Q(x)$ члены с четными и с нечетными степенями x :

$$P(x) = P_1(x^2) + xP_2(x^2); \quad Q(x) = Q_1(x^2) + xQ_2(x^2)$$

(аргумент x^2 многочленов P_1, P_2, Q_1, Q_2 для краткости писать не будем). Итак,

$$R(x) = \frac{P_1 + xP_2}{Q_1 + xQ_2}.$$

Заменив x на $-x$, получим (в силу четности $R(x)$)

$$\frac{P_1 + xP_2}{Q_1 + xQ_2} \equiv \frac{P_1 - xP_2}{Q_1 - xQ_2},$$

* Заметим, что t_1 может быть произвольным действительным числом, так как по заданному значению t_1 определяется $\alpha = 2 \operatorname{arctg} t_1$.

откуда (после умножения и преобразований)

$$2x(P_1 Q_2 - Q_1 P_2) \equiv 0; \quad P_1 Q_2 \equiv Q_1 P_2 \quad \text{и} \quad \frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2} = K(x^2),$$

где K — некоторое рациональное выражение, но тогда

$$R(x) \equiv K(x^2).$$

Следствие. Если $R(\cos \alpha, \sin \alpha)$ — нечетная функция, то $\frac{1}{\sin \alpha} R(\cos \alpha, \sin \alpha)$ является четной функцией. По доказанному

$$\frac{1}{\sin \alpha} R(\cos \alpha, \sin \alpha) = R_1(\cos \alpha),$$

откуда

$$R(\cos \alpha, \sin \alpha) = \sin \alpha R_1(\cos \alpha).$$

Примеры.

1 Преобразовать выражение $P = \frac{1}{\sin x + \cos x}$
 посредством универсальной подстановки

Решение Имеем:

$$P = \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{1+t^2}{1+2t-t^2}.$$

2. Рационализировать функцию

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sin x - \cos x}$$

Решение. Положив $t = \operatorname{tg} x$, получим

$$f(x) = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x} - 1} = \frac{t}{t-1}.$$

3. Рационализировать $\frac{\operatorname{tg} x \cos^6 x}{\sin^4 x}$.

Решение. Положив $t = \operatorname{tg} x$, получим:

$$\frac{\operatorname{tg} x \cos^6 x}{\sin^4 x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^4 x \sec^2 x} = \frac{1}{t^3(1+t^2)}.$$

4. Рационализировать $S = \frac{\sin x}{\sin^3 x + \cos^3 x}$

Решение. Положив $t = \operatorname{tg} x$, получим:

$$S = \frac{\sin x (\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^3 x + \cos^3 x} = \frac{\operatorname{tg} x (\operatorname{tg}^2 x + 1)}{\operatorname{tg}^3 x + 1} = \frac{t(t^2 + 1)}{t^3 + 1}.$$

5. Рационализировать $P = \frac{\cos^2 x}{\sin x + \cos^4 x}$.

Решение. Положив $t = \sin x$, получим:

$$P = \frac{1-t^2}{t + (1-t^2)^2} = \frac{1-t^2}{t^4 - 2t^2 + t + 1}.$$

6. Дано:

$$\sin x + \sin y = a, \quad \cos x + \cos y = b;$$

вычислить $\sin(x+y)$ и $\cos(x+y)$

Решение. Введем рационализирующий параметр $t = \operatorname{tg} \frac{x+y}{2}$, тогда будем иметь:

$$\sin(x+y) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos(x+y) = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Согласно условию

$$\frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y} = \frac{a}{b} \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} \frac{x+y}{2} = \frac{a}{b} = t,$$

откуда

$$\sin(x+y) = \frac{2ab}{a^2+b^2}, \quad \cos(x+y) = \frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}.$$

7. Рационализировать выражение

$$Q = \frac{\cos \frac{x}{3}}{\cos \frac{x}{2} + 1}.$$

Решение. Положив $x = 6y$, получим:

$$Q = \frac{\sin 2y}{\cos 3y + 1} = \frac{2 \sin y \cos y}{\cos^3 y - 3 \cos y \sin^2 y + 1}.$$

Для рационализации следует применить универсальную подстановку, положив

$$\cos y = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin y = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \text{где } t = \operatorname{tg} \frac{y}{2} = \operatorname{tg} \frac{x}{12}$$

(предлагаем учащимся произвести подстановку).

8. Доказать тождество

$$2 \sin^2 \alpha \frac{1 + \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} (45^\circ - \alpha)}{\operatorname{ctg} 2\alpha \cos 2\alpha - 2 + 2 \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}^2 2\alpha \operatorname{tg}^3 (45^\circ + \alpha).$$

Решение. Заметим, что обе части доказываемого тождества рационально выражаются через $t = \operatorname{tg} \alpha$; имеем:

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha &= \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{t^2}{1 + t^2}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{t}, \quad \operatorname{ctg} (45^\circ - \alpha) = \\ &= \operatorname{tg} (45^\circ + \alpha) = \frac{1+t}{1-t}, \quad \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{1-t^2}{2t}, \\ \cos 2\alpha &= \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin 2\alpha = \frac{2t}{1+t^2}. \end{aligned}$$

Выполнив подстановку (элементарные выкладки опускаем), докажем, что обе части равны одной и той же алгебраической дроби

$$\frac{4t^2(1+t)}{(1-t)^5}.$$

§ 24. Введение вспомогательных углов и тригонометрические подстановки

Преобразование посредством введения вспомогательного угла в общем виде можно характеризовать следующим образом: *данное число или данное выражение рассматривается как значение тригонометрической функции от некоторого аргумента, называемого вспомогательным углом* (вспомогательным аргументом). Из множества всех возможных значений для вспомогательного угла выбирается одно, вполне определенное значение (например, наименьшее по абсолютной величине), этим выбором вспомогательный угол по заданному значению его тригонометрической функции вполне определяется и в дальнейших преобразованиях считается известным.

1. Переход к полярным координатам. Это преобразование основано на следующем предложении.

Если хотя бы одно из чисел a и b отлично от нуля, то в промежутке $0 \leq \varphi < 2\pi$ (или в промежутке $-\pi < \varphi \leq \pi$) существует единственное значение φ , при котором

$$a = r \cos \varphi, \quad b = r \sin \varphi, \quad (1)$$

где $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

В самом деле, построим на координатной плоскости точку $M(a, b)$ (черт. 83). Заданием точки M определяется ее расстояние до начала координат

$$r = |OM| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

и единственный угол φ между OM и осью OX , если значение φ выбирать в промежутке $[0, 2\pi)$ (или в промежутке $(-\pi, \pi]$), ч. т. д.

Точка $M'(\cos \varphi, \sin \varphi)$ есть точка пересечения луча OM с единичной окружностью.

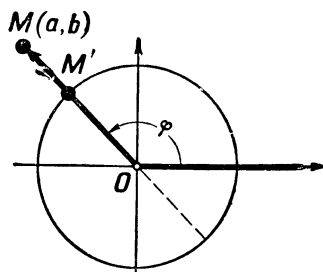
Если вместо угла φ взять угол $\varphi \pm \pi$, то формулы (1) примут вид:

$$a = r \cos \varphi, \quad b = r \sin \varphi, \quad (1')$$

где $r = -\sqrt{a^2 + b^2}$,

В этом случае направление радиуса-вектора OM заменяется противоположным. Нередко в целях единообразия в выборе вспомогательного угла φ этот угол определяют по формуле

$$\varphi = \arctg \frac{b}{a}, \quad \text{если } a \neq 0,$$



Черт. 83

и

$$\varphi = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{при } b > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{при } b < 0, \end{cases}$$

если $a = 0$.

При таком выборе имеем всегда $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Формулы (1) можно записать таким же образом:

$$a = r \cos \varphi, \quad b = r \sin \varphi,$$

при этом следует считать

$$r = \begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2}, & \text{если } a > 0, \\ -\sqrt{a^2 + b^2}, & \text{если } a < 0, \end{cases} \quad \text{где } \varphi = \arctg \frac{b}{a};$$

при $a = 0$ выбор угла φ указан выше.

В самом деле, при $a \geq 0$ точка M' принадлежит правой единичной полуокружности и за вспомогательный угол берется угол, заключенный в пределах от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, образованный OM с осью абсцисс. Если же $a < 0$, то точка M' принадлежит левой полуокружности и за вспомогательный угол берется угол, заключенный в тех же пределах, образованный продолжением OM (за точку O) с осью абсцисс.

Примечание. Если данные действительные числа a и b суть действительные и мнимые части комплексного числа $z = a + bi$, то переход к полярным координатам означает переход к тригонометрической форме комплексного числа

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

II. Преобразование суммы вида $a \sin \alpha x + b \cos \alpha x$.

Введем полярные координаты точки $M(a, b)$ по формулам (1), тогда данное выражение преобразуется следующим образом:

$$a \sin \alpha x + b \cos \alpha x = r(\cos \varphi \cos \alpha x + \sin \varphi \sin \alpha x) = r \sin(\alpha x + \varphi).$$

Если ввести полярные координаты точки $N(b, a)$, положив

$$b = r \cos \psi, \quad a = r \sin \psi, \quad \text{где } r = \sqrt{a^2 + b^2},$$

то получим

$$a \sin \alpha x + b \cos \alpha x = r \cos(\alpha x - \psi).$$

Это преобразование часто применяется в физике (см. § 34).

III. Различные приемы преобразования алгебраических сумм в произведения. Ниже указаны некоторые приемы введения вспомогательного угла, посредством которых алгебраическую сумму можно представить в виде произведения, содержащего в качестве множителей известные числа и тригонометрические функции от вспомогательного аргумента.

1°. Дана сумма $a + b$; введем вспомогательный аргумент, положив $\alpha = \arctg \frac{b}{a}$ (слагаемые предполагаются отличными от нуля), тогда, приняв во внимание, что $1 = \tg \frac{\pi}{4}$, получим:

$$a + b = a \left(1 + \frac{b}{a} \right) = a (1 + \tg \alpha) = \frac{\sqrt{2} a \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)}{\cos \alpha}.$$

2°. Разность $a - b$ можно преобразовать аналогично:

$$a - b = \frac{\sqrt{2} a \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)}{\cos \alpha},$$

где $\alpha = \arctg \frac{b}{a}$.

3°. Если a и b — числа одного знака, то $\frac{b}{a} > 0$, и для преобразования суммы $a \pm b$ можно положить $\alpha = \arctg \sqrt{\frac{b}{a}}$, тогда получим:

$$\begin{aligned} a + b &= a (1 + \tg^2 \alpha) = a \sec^2 \alpha; \\ a - b &= a (1 - \tg^2 \alpha) = \frac{a \cos 2\alpha}{\sec^2 \alpha}. \end{aligned}$$

4°. Отношение $\frac{a-b}{a+b}$ посредством подстановки $\alpha = \arctg \frac{b}{a}$ преобразуется следующим образом:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{1 - \tg \alpha}{1 + \tg \alpha} = \tg \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right).$$

5°. Разность $a^2 - b^2$, где $|b| \leq |a|$, можно преобразовать посредством вспомогательного угла $\alpha = \arcsin \frac{b}{a}$, тогда получим:

$$a^2 - b^2 = a^2 \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) = a^2 (1 - \sin^2 \alpha) = a^2 \cos^2 \alpha.$$

Можно также положить $\beta = \arccos \frac{b}{a}$, тогда получим

$$a^2 - b^2 = a^2 \sin^2 \beta.$$

6°. Разность $a^2 - b^2$, где $|b| \leq |a|$, можно посредством подстановки $\beta = \arccos \frac{b}{a}$ преобразовать также и следующим образом:

$$a^2 - b^2 = b^2 \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right) = b^2 (\sec^2 \beta - 1) = b^2 \tg^2 \beta.$$

7°. Сумма $a^2 + b^2$ преобразуется подстановкой $\alpha = \arctg \frac{b}{a}$ (пункт 3°):

$$a^2 + b^2 = a^2 \sec^2 \alpha.$$

Для различных сумм более сложного вида могут применяться самые разнообразные и нередко искусственные способы введения вспомогательных углов.

В старых руководствах, в которых логарифмическим вычислениям придавалось большое значение, преобразование сумм в произведения или «приведение к логарифмическому виду» играло существенную роль. При современной вычислительной технике подобные преобразования (с целью производства вычислений) утратили свою ценность.

Введением вспомогательного аргумента пользуются для преобразования некоторых иррациональных выражений в рациональные выражения относительно тригонометрических функций от вспомогательного аргумента.

Рассмотрим, например, функцию

$$R(x, \sqrt{a^2 - x^2}), \quad (R)$$

где $a > 0$, $R(u, v)$ — рациональная функция от аргументов u и v . Функция (R) имеет действительные значения лишь на сегменте $-a \leq x \leq a$. Согласно подстановке 5°, положим

$$x = a \cos t, \quad \text{где } t = \arccos \frac{x}{a},$$

тогда получим

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2(1 - \cos^2 t)} = a |\sin t| = a \sin t$$

(следует принять во внимание, что значение t находится в верхней полуокружности, но тогда $\sin t \geq 0$).

Тригонометрическая подстановка

$$x = a \cos t, \quad t = \arccos \frac{x}{a}$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между сегментами $-a \leq x \leq a$ и $0 \leq t \leq \pi$.

Данное выражение (R) представится в виде выражения $R(a \cos t, a \sin t)$, рационального относительно $\cos t$ и $\sin t$.

Для выражения вида

$$R(x, \sqrt{x^2 - a^2}), \quad \text{где } |x| \geq a,$$

согласно подстановке 6°, можно положить $t = \arccos \frac{a}{x}$ или $x = a \sec t$, и тогда

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a |\operatorname{tg} t| = \begin{cases} a \operatorname{tg} t & \text{в промежутке } a \leq x < +\infty, \\ -a \operatorname{tg} t & \text{в промежутке } -\infty < x \leq -a. \end{cases}$$

Для выражения вида $R(x, \sqrt{x^2 + a^2})$, согласно подстановке 7°, можно положить $t = \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$, откуда $x = a \operatorname{tg} t$ и $\sqrt{x^2 + a^2} = a \sec t$.

Указанные подстановки применяются в математическом анализе при интегрировании выражений, содержащих радикалы вида $\sqrt{\pm a^2 \pm x^2}$.

Примеры.

1. Имеем:

$$a) \sqrt{3} \sin x + \cos x = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x \right) = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right).$$

$$b) \sin x - \sqrt{3} \cos x = 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right);$$

$$c) 2 \sin x - 3 \cos x = \sqrt{13} \left(\frac{2}{\sqrt{13}} \sin x - \frac{3}{\sqrt{13}} \cos x \right) = \sqrt{13} \sin (x - \alpha).$$

В случае c) вспомогательный угол определяется из условий $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$, $\sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$, положим $\alpha = \arcsin \frac{3}{\sqrt{13}}$. Пользуясь четырехзначными таблицами найдем: $\alpha \approx 56^\circ 18'$; итак,

$$2 \sin x - 3 \cos x = \sqrt{13} \sin (x - 56^\circ 18').$$

На примерах 2 и 3 показано применение преобразования перехода к полярным координатам к исследованию функций двух аргументов.

2. Доказать, что $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} = 0$.

Решение. Положив $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, получим:

$$\left| \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \right| = r^2 |\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi| < 2r^2.$$

Следовательно, неравенство

$$\left| \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \right| < \varepsilon$$

выполняется, если r — расстояние точки $M(x, y)$ до начала координат меньше $\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$.

3. Доказать, что функция $\frac{2xy}{x^2 + y^2}$ не имеет предела в точке $O(0, 0)$.

Решение. Преобразовав к полярным координатам, получим:

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2} = 2 \cos \varphi \sin \varphi = \sin 2\varphi.$$

При данном значении φ функция $f(x, y)$ постоянна, т. е. она постоянна на любом данном луче, исходящем из начала координат. Однако вдоль различных лучей, исходящих из точки O , значения $f(x, y)$ различны при этих условиях (как известно из теории пределов) предел $\lim f(x, y)$ в точке $O(0, 0)$ не существует.

4. Дано:

$$a_1^2 + b_1^2 = 1, \quad a_2^2 + b_2^2 = 1, \quad a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0.$$

Доказать, что

$$a_1^2 + a_2^2 = 1, \quad b_1^2 + b_2^2 = 1, \quad a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0.$$

Решение. Введем вспомогательные углы α и β из условий:

$$\cos \alpha = a_1, \quad \sin \alpha = b_1, \quad \cos \beta = a_2, \quad \sin \beta = b_2,$$

тогда третье условие примет вид

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 = \cos(\beta - \alpha) = 0,$$

откуда

$$\beta - \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{и} \quad \beta = \alpha + \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

и, следовательно,

$$a_2 = \cos \beta = \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{2} + k\pi \right) = (-1)^{k+1} \sin \alpha;$$

$$b_2 = \sin \beta = \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{2} + k\pi \right) = (-1)^k \cos \alpha.$$

Справедливость доказываемых равенств устанавливается проверкой.

5. Формулы корней кубического уравнения в неприводимом случае.

Как известно (из курса высшей алгебры), приведенное кубическое уравнение с действительными коэффициентами

$$x^3 + px + q = 0$$

при $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$ имеет три действительных корня, однако, эти корни не могут быть выражены через коэффициенты посредством действительных радикалов. Рассмотрим формулу Кардано

$$x = u + v,$$

где

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \quad v = -\frac{p}{3u} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Представим подкоренное выражение первого кубического радикала в тригонометрической форме положив

$$-\frac{q}{2} = \rho \cos \varphi, \quad \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -\rho^2 \sin^2 \varphi,$$

и, следовательно,

$$\rho = \sqrt[3]{-\frac{p^3}{27}}, \quad \cos \varphi = -\frac{q}{2\rho}, \quad \varphi = \arccos \left(\frac{-q}{2\rho} \right);$$

имеем: $u = \sqrt[3]{\rho (\cos \varphi + i \sin \varphi)}$, а для v следует брать комплексно сопряженные значения:

$$u_1 = \sqrt[3]{\rho} \left(\cos \frac{\varphi}{3} + i \sin \frac{\varphi}{3} \right), \quad v_1 = \sqrt[3]{\rho} \left(\cos \frac{\varphi}{3} - i \sin \frac{\varphi}{3} \right);$$

$$u_2 = \sqrt[3]{\rho} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi}{3} \right), \quad v_2 = \sqrt[3]{\rho} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi}{3} - i \sin \frac{\varphi + 2\pi}{3} \right);$$

$$u_3 = \sqrt[3]{\rho} \left(\cos \frac{\varphi + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\varphi + 4\pi}{3} \right), \quad v_3 = \sqrt[3]{\rho} \left(\cos \frac{\varphi + 4\pi}{3} - i \sin \frac{\varphi + 4\pi}{3} \right);$$

откуда

$$x_1 = 2\sqrt[3]{\rho} \cos \frac{\varphi}{3}, \quad x_2 = 2\sqrt[3]{\rho} \cos \frac{\varphi + 2\pi}{3}, \quad x_3 = 2\sqrt[3]{\rho} \cos \frac{\varphi + 4\pi}{3}$$

§ 25. Вычисление некоторых тригонометрических сумм и произведений

В настоящем параграфе показаны на ряде примеров методы суммирования некоторых конечных рядов (о суммировании конечных рядов в общем виде см. «Специальный курс элементарной алгебры», § 114) и вычисления произведений, членами которых являются тригонометрические функции

1. Вычисление суммы косинусов и синусов дуг, образующих арифметическую прогрессию.

Первый способ. Рассмотрим сумму

$$\begin{aligned} \cos a + \cos(a+h) + \cos(a+2h) + \dots + \cos(a+nh) = \\ = \sum_{k=0}^n \cos(a+kh); \end{aligned}$$

имеем:

$$\begin{aligned} \sin \frac{h}{2} \cos a &= \frac{1}{2} \left[\sin \left(a + \frac{h}{2} \right) - \sin \left(a - \frac{h}{2} \right) \right]; \\ \sin \frac{h}{2} \cos(a+h) &= \frac{1}{2} \left[\sin \left(a + \frac{3}{2} h \right) - \sin \left(a + \frac{h}{2} \right) \right]; \\ &\dots \dots \dots \\ \sin \frac{h}{2} \cos(a+nh) &= \frac{1}{2} \left[\sin \left(a + \frac{2n+1}{2} h \right) - \sin \left(a + \frac{2n-1}{2} h \right) \right]; \end{aligned}$$

сложив почленно и разделив на $\sin \frac{h}{2}$ получим:

$$\sum_{k=0}^n \cos(a+kh) = \frac{1}{2 \sin \frac{h}{2}} \left[\sin \left(a + \frac{2n+1}{2} h \right) - \sin \left(a - \frac{h}{2} \right) \right].$$

Откуда окончательно:

$$\sum_{k=1}^n \cos(a+kh) = \frac{\cos \left(a + \frac{n}{2} h \right) \sin \frac{n+1}{2} h}{\sin \frac{h}{2}}. \quad (\Sigma_1)$$

Если в этой формуле заменить a на $\frac{\pi}{2} - a$ и h на $-h$, то получим

$$\sum_{k=0}^n \sin(a+kh) = \frac{\sin \left(a + \frac{n}{2} h \right) \sin \frac{n+1}{2} h}{\sin \frac{h}{2}}. \quad (\Sigma'_1)$$

Второй способ. Вычислим по формуле Муавра k -ю степень комплексного числа $z = \cos h + i \sin h$ и умножим ее на число $\cos a + i \sin a$:

$$(\cos a + i \sin a) z^k = (\cos a + i \sin a) (\cos kh + i \sin kh) = \\ = \cos(a + kh) + i \sin(a + kh).$$

Искомые суммы (Σ) и (Σ') суть действительная и мнимая части суммы $n+1$ членов геометрической прогрессии:

$$(\cos a + i \sin a)(1 + z + z^2 + \dots + z^n) = \\ = (\cos a + i \sin a) \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1};$$

имеем:

$$\begin{aligned} \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} &= \frac{\cos(n+1)h - 1 + i \sin(n+1)h}{\cos h - 1 + i \sin h} = \\ &= \frac{\sin \frac{n+1}{2}h}{\sin \frac{h}{2}} \cdot \frac{-\sin \frac{n+1}{2}h + i \cos \frac{n+1}{2}h}{-\sin \frac{h}{2} + i \cos \frac{h}{2}} = \\ &= \frac{\sin \frac{n+1}{2}h}{\sin \frac{h}{2}} \left(\sin \frac{n+1}{2}h - i \cos \frac{n+1}{2}h \right) \left(\sin \frac{h}{2} + i \cos \frac{h}{2} \right) = \\ &= \frac{\sin \frac{n+1}{2}h}{\sin \frac{h}{2}} \left(\cos \frac{n}{2}h + i \sin \frac{n}{2}h \right). \end{aligned}$$

Умножив на $\cos a + i \sin a$, получим в произведении:

$$\frac{\sin \frac{n+1}{2}h}{\sin \frac{h}{2}} \cos\left(a + \frac{n}{2}h\right) + i \frac{\sin \frac{n+1}{2}h}{\sin \frac{h}{2}} \sin\left(a + \frac{n}{2}h\right).$$

Действительная часть есть сумма (Σ_1) , а коэффициент при i — сумма (Σ_1') .

С л е д с т в и е. Положим, в частности, $a = 0$, тогда получим:

$$1 + \cos h + \cos 2h + \dots + \cos nh = \frac{\cos \frac{n}{2}h \sin \frac{(n+1)h}{2}}{\sin \frac{h}{2}}, \quad (\Sigma_1^*)$$

$$\sin h + \sin 2h + \dots + \sin nh = \frac{\sin \frac{n}{2}h \sin \frac{(n+1)h}{2}}{\sin \frac{h}{2}}. \quad (\Sigma_1^{**})$$

2. Разделив почленно (Σ_1^{**}) на (Σ_1^*) , получим

$$\frac{\sin h + \sin 2h + \dots + \sin nh}{1 + \cos h + \cos 2h + \dots + \cos nh} = \operatorname{tg} \frac{n}{2} h. \quad (\Sigma_2)$$

3. Вычислить сумму

$$\sum_{k=1}^n \cos kx = \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx. \quad (\Sigma_3)$$

Имеем:

$$\sum_{k=1}^n \cos kx = \sum_{k=0}^n \cos kx - 1.$$

Воспользовавшись формулой (Σ_1^*) , получим (после преобразований):

$$\sum_{k=1}^n \cos kx = \frac{\cos \frac{n}{2} x \sin \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} - 1 = \frac{\cos \frac{n+1}{2} x \sin \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Так, в частности,

$$\begin{aligned} \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} &= \frac{\cos \frac{4\pi}{7} \sin \frac{3\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} = \\ &= - \frac{\cos \frac{3\pi}{7} \sin \frac{3\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} = - \frac{\sin \frac{6\pi}{7}}{2 \sin \frac{\pi}{7}} = - \frac{1}{2}; \\ \cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{2\pi}{n} + \dots + \cos \frac{(n-1)\pi}{n} &= \\ &= \frac{\cos \frac{n}{2} \cdot \frac{\pi}{n} \cdot \sin \frac{n-1}{2n} \pi}{\sin \frac{\pi}{2n}} = 0. \end{aligned}$$

4. Вычислить суммы:

$$\sin x + \sin 3x + \dots + \sin (2n-1)x = \sum_{k=1}^n \sin (2k-1)x \quad (\Sigma_4)$$

$$\cos x + \cos 3x + \dots + \cos (2n-1)x = \sum_{k=1}^n \cos (2k-1)x. \quad (\Sigma'_4)$$

Решение. Положив в формулах (Σ_1) и (Σ'_1) $a = x$, $h = 2x$ и заменив n на $n-1$, получим:

$$\sum_{k=1}^n \sin(2k-1)x = \frac{\sin[x + (n-1)x] \sin nx}{\sin x} = \frac{\sin^2 nx}{\sin x}$$

и

$$\sum_{k=1}^n \cos(2k-1)x = \frac{\cos nx \sin nx}{\sin x} = \frac{\sin 2nx}{2 \sin x}.$$

5. Вычислить сумму

$$1 - \cos x + \cos 2x - \cos 3x + \dots + (-1)^n \cos nx.$$

Решение. Достаточно в формуле (Σ_1^*) положить $h = x + \pi$:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \cos kx = \frac{\cos\left(\frac{nx}{2} + \frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n+1}{2}x + \frac{(n+1)}{2}\pi\right)}{\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Преобразуем числитель в сумму:

$$\begin{aligned} & \sin\left(\frac{n+1}{2}x + \frac{n+1}{2}\pi\right) \cos\left(\frac{nx}{2} + \frac{n\pi}{2}\right) = \\ & = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x + \frac{2n+1}{2}\pi\right)}{2} + \frac{\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)}{2} = \\ & = \frac{1}{2} \left[(-1)^n \cos \frac{2n+1}{2}x + \cos \frac{x}{2} \right], \end{aligned}$$

откуда

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \cos kx = \frac{(-1)^n \cos \frac{2n+1}{2}x + \cos \frac{x}{2}}{2 \cos \frac{x}{2}}. \quad (\Sigma_5)$$

Примечание. Этим же способом вычисляется сумма

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \sin kh$$

(предоставляем вычисления учащимся).

6. Вычислить суммы:

$$\sin^2 a + \sin^2(a+h) + \sin^2(a+2h) + \dots + \sin^2(a+nh) = \sum_{k=0}^n \sin^2(a+kh)$$

и

$$\cos^2 a + \cos^2(a+h) + \dots + \cos^2(a+nh) = \sum_{k=0}^n \cos^2(a+kh).$$

Решение. Выразим каждое слагаемое через косинус двойного аргумента. Имеем:

$$\sum_{k=0}^n \sin^2(a + kh) = \sum_{k=0}^n \frac{1 - \cos(2a + 2kh)}{2} = \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \cos(2a + 2kh)$$

Для вычисления последней суммы достаточно в формуле (Σ_1) заменить a на $2a$, h на $2h$, тогда получим:

$$\sum_{k=0}^n \cos(2a + 2kh) = \frac{\cos(2a + nh) \sin(n+1)h}{\sin h}$$

и, следовательно,

$$\sum_{k=0}^n \sin^2(a + kh) = \frac{n+1}{2} - \frac{\cos(2a + nh) \sin(n+1)h}{2 \sin h}. \quad (\Sigma_6)$$

В частности,

$$\sin^2 x + \sin^2 2x + \dots + \sin^2 nx = \frac{n+1}{2} - \frac{\cos nx \sin(n+1)x}{2 \sin x}.$$

Посредством несложных тригонометрических преобразований правой части получим другую формулу для этой же суммы

$$\sum_{k=1}^n \sin^2 kx = \frac{n}{2} - \frac{\cos(n+1)x \sin nx}{2 \sin x}. \quad (\Sigma_6^*)$$

Подобным же образом вычисляется вторая сумма

$$\sum_{k=0}^n \cos^2(a + kh) = \frac{n+1}{2} + \frac{\cos(2a + nh) \sin(n+1)h}{2 \sin h}. \quad (\Sigma_6')$$

Примечание. Зная одну из рассматриваемых сумм, нетрудно найти другую, так как:

$$\sum_{k=0}^n \sin^2(a + kh) + \sum_{k=0}^n \cos^2(a + kh) = n+1.$$

Пример. Решить линейную систему:

$$x_1 \sin \frac{\pi}{n} + x_2 \sin 2 \frac{\pi}{n} + \dots + x_{n-1} \sin(n-1) \frac{\pi}{n} = a_1;$$

$$x_1 \sin \frac{2\pi}{n} + x_2 \sin 2 \frac{2\pi}{n} + \dots + x_{n-1} \sin(n-1) \frac{2\pi}{n} = a_2;$$

.....

$$x_1 \sin \frac{n-1}{n} \pi + x_2 \sin 2 \frac{n-1}{n} \pi + \dots + x_{n-1} \sin(n-1) \frac{n-1}{n} \pi = a_{n-1}.$$

Решение. Умножим данные уравнения соответственно на множители

$$\sin k \frac{\pi}{n}, \quad \sin k \frac{2\pi}{n}, \dots, \quad \sin k \frac{n-1}{n} \pi$$

и сложим почленно. Коэффициент при x_m в полученном уравнении равен:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sin k \frac{i\pi}{n} \sin m \frac{i\pi}{n}.$$

Если $k = m$, то получим:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sin^2 i \frac{k\pi}{n} = \frac{n-1}{2} - \frac{\cos n \frac{k\pi}{n} \sin \frac{(n-1)k\pi}{n}}{2 \sin \frac{k\pi}{n}} = \frac{n}{2}. \quad (\text{формула } \Sigma_6^*)$$

Если $k \neq m$, то получим:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sin i \frac{k\pi}{n} \sin i \frac{m\pi}{n} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \cos i \frac{k-m}{n} \pi - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \cos i \frac{k+m}{n} \pi = 0. \quad (\text{применить формулу } \Sigma_3)$$

Таким образом, выводное уравнение примет вид:

$$\frac{n}{2} x_k = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \sin i \frac{k\pi}{n}, \quad \text{откуда } x_k = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} a_i \sin i \frac{k\pi}{n}.$$

7. Вычисление сумм вида:

$$\sum_{k=0}^n \cos^p kh \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^n \sin^p kh \quad (\text{где } p \text{ — натуральное число}).$$

Обозначим через S'_p и S''_p следующие суммы:

$$S'_p = 1 + \cos ph + \cos 2ph + \dots + \cos nph;$$

$$S''_p = \sin ph + \sin 2ph + \dots + \sin nph.$$

Эти суммы вычисляются по формулам (Σ_1^*) и (Σ_1^{**}) (заменить h на ph):

$$S'_p = \frac{\cos \frac{nph}{2} \sin \frac{(n+1)ph}{2}}{\sin \frac{ph}{2}} \quad \text{и} \quad S''_p = \frac{\sin \frac{nph}{2} \sin \frac{(n+1)ph}{2}}{\sin \frac{ph}{2}}.$$

Для вычисления суммы

$$\sum_{k=0}^n \cos^p k\pi = 1 + \cos^p h + \cos^p 2h + \dots + \cos^p kh + \dots + \cos^p nh$$

выразим степени косинуса посредством тригонометрических функций кратных дуг (см. § 20, стр. 98):

$$\cos^p kh = \frac{1}{2^{p-1}} \left[\cos pkh + C_p^1 \cos (p-2)kh + C_p^2 \cos (p-4)kh + \dots \right];$$

Полагая $k = 1, 2 \dots n$ и суммируя получим:

$$S' = \frac{n}{2 \sin \frac{x}{2}} \sin \frac{2n+1}{2} x - \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \sum_{k=1}^n \sin \left(-\frac{1}{2} x + kx \right).$$

Вычисляем сумму:

$$\sum_{k=1}^n \sin \left(kx - \frac{1}{2} x \right) = \sin \frac{x}{2} + \sin \frac{3}{2} x + \dots + \sin \frac{2n-1}{2} x = \frac{\sin^2 \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \quad (\text{формула } (\Sigma_4))$$

Следовательно,

$$S' = \frac{n \sin \frac{2n+1}{2} x}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{\sin^2 \frac{nx}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{(n+1) \cos nx - n \cos (n+1) x - 1}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} \quad (\Sigma_8)$$

Тем же методом вычисляется вторая сумма (вычисления предоставляем учащимся):

$$S'' = \frac{(n+1) \sin nx - n \sin (n+1) x}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} \quad (\Sigma'_8)$$

Второй способ. Рассмотрим сумму

$$z + 2z^2 + 3z^3 + \dots + nz^n = \frac{nz^{n+1}}{z-1} - \frac{z^{n+1} - z}{(z-1)^2}$$

(см. «Специальный курс элементарной алгебры», 114)

Положим $z = \cos x + i \sin x$, тогда имеем:

$$z^k = \cos kx + i \sin kx,$$

и, следовательно,

$$S' + iS'' = \frac{nz^{n+1}}{z-1} - \frac{z^{n+1} - z}{(z-1)^2}.$$

Вычисляем правую часть последнего равенства

$$a) \quad z - 1 = \cos x - 1 + i \sin x = -2 \sin \frac{x}{2} \left(\sin \frac{x}{2} - i \cos \frac{x}{2} \right);$$

$$\begin{aligned} b) \quad \frac{nz^{n+1}}{z-1} &= \frac{n [\cos (n+1) x + i \sin (n+1) x]}{-2 \sin \frac{x}{2} \left[\sin \frac{x}{2} - i \cos \frac{x}{2} \right]} = \\ &= \frac{n [\cos (n+1) x + i \sin (n+1) x] \left[\sin \frac{x}{2} + i \cos \frac{x}{2} \right]}{-2 \sin \frac{x}{2}} = \\ &= \frac{n}{2 \sin \frac{x}{2}} \left[\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x - i \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x \right]; \end{aligned}$$

$$c) \quad z(z^n - 1) = -2 \sin \frac{nx}{2} (\cos x + i \sin x) \left(\sin \frac{nx}{2} - i \cos \frac{nx}{2} \right);$$

$$d) \quad (z - 1)^2 = \left[-2 \sin \frac{x}{2} \left(\sin \frac{x}{2} - i \cos \frac{x}{2} \right) \right]^2 = \\ = -4 \sin^2 \frac{x}{2} (\cos x + i \sin x);$$

$$e) \quad \frac{z^{n+1} - z}{(z - 1)^2} = \frac{\sin \frac{nx}{2} \left(\sin \frac{nx}{2} - i \cos \frac{nx}{2} \right)}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \sin^2 \frac{nx}{2} - i \sin nx}{4 \sin^2 \frac{x}{2}}.$$

Следовательно,

$$S' + S'' i = \frac{n \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{\sin^2 \frac{nx}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} + i \left(\frac{\sin nx}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} - \frac{\cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x}{2 \sin \frac{x}{2}} \right).$$

Отсюда найдем выражения для S' и S'' .

9. Вычислить суммы:

$$S_1 = 1 + a \cos x + a^2 \cos 2x + \dots + a^n \cos nx;$$

$$S_2 = a \sin x + a^2 \sin 2x + \dots + a^n \sin nx.$$

Решение. Рассмотрим сумму $n + 1$ первых членов геометрической прогрессии

$$1 + az + a^2 z^2 + \dots + a^n z^n = \frac{a^{n+1} z^{n+1} - 1}{az - 1}.$$

Если положить $z = \cos x + i \sin x$, то последнее равенство примет вид:

$$S_1 + i S_2 = \frac{a^{n+1} z^{n+1} - 1}{az - 1}.$$

Вычислим правую часть последнего равенства:

$$\frac{a^{n+1} z^{n+1} - 1}{az - 1} = \frac{a^{n+1} \cos (n+1) x - 1 + i a^{n+1} \sin (n+1) x}{a \cos x - 1 + i a \sin x} = \\ = \frac{[a^{n+1} \cos (n+1) x - 1 + i a^{n+1} \sin (n+1) x] (a \cos x - 1 - i a \sin x)}{a^2 - 2a \cos x + 1}.$$

Действительная часть полученного выражения равна S_1 , а коэффициент при i равен S_2 :

$$S_1 = \frac{a^{n+2} \cos nx - a^{n+1} \cos (n+1) x - a \cos x + 1}{a^2 - 2a \cos x + 1}; \quad (\Sigma_9)$$

$$S_2 = \frac{a^{n+2} \sin nx - a^{n+1} \sin (n+1) x + a \sin x}{a^2 - 2a \cos x + 1}. \quad (\Sigma_9')$$

Различные частные приемы вычисления сумм показаны на примерах 10—13.

10. Вычислить сумму

$$\sin \frac{h}{3} + 3 \sin^3 \frac{h}{3^2} + \dots + 3^{n-1} \sin^3 \frac{h}{3^n} = \sum_{k=1}^n 3^{k-1} \sin^3 \frac{h}{3^k}.$$

Решение. Исходим из тождества

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x.$$

Полагая последовательно $x = \frac{h}{3}, \frac{h}{3^2}, \dots, \frac{h}{3^{n-1}}$, получим:

$$\begin{array}{lcl} \sin h = 3 \sin \frac{h}{3} - 4 \sin^3 \frac{h}{3} & \left| \right. & 1 \\ \sin \frac{h}{3} = 3 \sin \frac{h}{3^2} - 4 \sin^3 \frac{h}{3^2} & \left| \right. & 3 \\ \sin \frac{h}{3^2} = 3 \sin \frac{h}{3^3} - 4 \sin^3 \frac{h}{3^3} & \left| \right. & 3^2 \\ \dots & \left| \right. & \dots \\ \sin \frac{h}{3^{n-1}} = 3 \sin \frac{h}{3^n} - 4 \sin^3 \frac{h}{3^n} & \left| \right. & 3^{n-1} \end{array}$$

Умножив последовательно эти равенства на $1, 3, 3^2, \dots, 3^{n-1}$ и сложив почленно, получим после сокращения:

$$\sin h = 3^n \sin \frac{h}{3^n} - 4 \sum_{k=1}^n 3^{k-1} \sin^3 \frac{h}{3^k},$$

откуда

$$\sum_{k=1}^n 3^{k-1} \sin^3 \frac{h}{3^k} = \frac{1}{4} 3^n \sin \frac{h}{3^n} - \frac{1}{4} \sin h. \quad (\Sigma_{10})$$

11. Вычислить суммы:

$$S_1 = \cos x + C_n^1 \cos 2x + C_n^2 \cos 3x + \dots + C_n^n \cos (n+1)x;$$

$$S_2 = \sin x + C_n^1 \sin 2x + C_n^2 \sin 3x + \dots + C_n^n \sin (n+1)x.$$

Решение. Рассмотрим равенство:

$$z + C_n^1 z^2 + C_n^2 z^3 + \dots + C_n^n z^{n+1} = z(1+z)^n.$$

При $z = \cos x + i \sin x$ это равенство примет вид:

$$S_1 + iS_2 = (\cos x + i \sin x)(\cos x + 1 + i \sin x)^n;$$

но

$$[(\cos x + 1) + i \sin x]^n = 2^n \cos^n \frac{x}{2} \left[\cos \frac{nx}{2} + i \sin \frac{nx}{2} \right].$$

Следовательно,

$$S_1 + iS_2 = 2^n \cos^n \frac{x}{2} \left[\cos \frac{n+2}{2} x + i \sin \frac{n+2}{2} x \right],$$

откуда

$$S_1 = 2^n \cos^n \frac{x}{2} \cos \frac{n+2}{2} x, \quad S_2 = 2^n \cos^n \frac{x}{2} \sin \frac{n+2}{2} x.$$

12. Найти сумму

$$S = \frac{1}{\cos \alpha \cos (\alpha + \beta)} + \frac{1}{\cos (\alpha + \beta) \cos (\alpha + 2\beta)} + \dots + \frac{1}{\cos [\alpha + (n-1)\beta] \cos (\alpha + n\beta)}.$$

Решение. Имеем:

$$\operatorname{tg} (\alpha + \beta) - \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \beta}{\cos \alpha \cos (\alpha + \beta)};$$

$$\operatorname{tg} (\alpha + 2\beta) - \operatorname{tg} (\alpha + \beta) = \frac{\sin \beta}{\cos (\alpha + \beta) \cos (\alpha + 2\beta)};$$

.....

$$\operatorname{tg} (\alpha + n\beta) - \operatorname{tg} [\alpha + (n-1)\beta] = \frac{\sin \beta}{\cos [\alpha + (n-1)\beta] \cos (\alpha + n\beta)}.$$

Сложив почленно, получим:

$$\operatorname{tg} (\alpha + n\beta) - \operatorname{tg} \alpha = S \cdot \sin \beta,$$

откуда

$$S = \frac{\sin n\beta}{\sin \beta \cos \alpha \cos (\alpha + n\beta)}.$$

13. Вычислить сумму

$$S = \frac{1}{\cos x + \cos 3x} + \frac{1}{\cos x + \cos 5x} + \dots + \frac{1}{\cos x + \cos (2n+1)x}.$$

Решение. Преобразуем в знаменателях суммы в произведения:

$$S = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\cos x \cos 2x} + \frac{1}{\cos 2x \cos 3x} + \dots + \frac{1}{\cos nx \cos (n+1)x} \right).$$

Положив в предыдущем примере $\alpha = \beta = x$, получим:

$$S = \frac{\sin nx}{\sin 2x \cos (n+1)x}.$$

14. Доказать что

$$\operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{x}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^n} \operatorname{ctg} \frac{x}{2^n} - 2 \operatorname{ctg} 2x$$

Решение. Имеем:

$$2 \operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} \alpha = -\operatorname{tg} \alpha.$$

Заменив в этом тождестве последовательно α на $x, \frac{x}{2}, \frac{x}{4}, \dots$, получим следующие равенства:

$$\begin{array}{l|l} 2 \operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg} x & 1 \\ 2 \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = -\operatorname{tg} \frac{x}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} \frac{x}{4} = -\operatorname{tg} \frac{x}{4} & \frac{1}{4} \\ \dots & \dots \\ 2 \operatorname{ctg} \frac{x}{2^{n-1}} - \operatorname{ctg} \frac{x}{2^n} = -\operatorname{tg} \frac{x}{2^n} & \frac{1}{2^n} \end{array}$$

Умножив эти равенства на $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^n}$ и сложив почленно, получим:

$$2 \operatorname{ctg} 2x - \frac{1}{2^n} \operatorname{ctg} \frac{x}{2^n} = - \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \lg \frac{x}{2^k}$$

откуда и следует подлежащее доказательству равенство.

В рассмотренных ниже примерах показаны приемы вычисления различных тригонометрических произведений. На первых двух примерах иллюстрирован один из простейших приемов. В последующих примерах вычисление произведений основано на теоремах о разложении многочлена на множители.

Вычислить произведение:

$$\begin{aligned} P &= (2 \cos x - 1) (2 \cos 2x - 1) \dots (2 \cos 2^{n-1} x - 1) = \\ &= \prod_{k=0}^{n-1} (2 \cos 2^k x - 1). \end{aligned}$$

Решение. Предположив, что $\cos x \neq -\frac{1}{2}$, умножим обе части на $2 \cos x + 1$, тогда получим:

$$(2 \cos x + 1) P = (2 \cos x + 1) (2 \cos x - 1) (2 \cos 2x - 1) \dots (2 \cos 2^{n-1} x - 1). \quad (1)$$

Примем во внимание следующее тождество:

$$\begin{aligned} (2 \cos 2^k x + 1) (2 \cos 2^k x - 1) &= 4 \cos^2 2^k x - 1 = \\ &= 2 (\cos 2^{k+1} x + 1) - 1 = 2 \cos 2^{k+1} x + 1 \end{aligned}$$

Выполнив последовательно умножения в правой части равенства (1), получим:

$$(2 \cos x + 1) P = 2 \cos 2^n x + 1.$$

Итак, имеем окончательно:

$$P = \frac{2 \cos 2^n x + 1}{2 \cos x + 1}.$$

16. Вычислить произведение:

$$\begin{aligned} P &= \prod_{k=1}^n \left(\cos \frac{a}{2^k} + \cos \frac{b}{2^k} \right) = \\ &= \left(\cos \frac{a}{2} + \cos \frac{b}{2} \right) \left(\cos \frac{a}{4} + \cos \frac{b}{4} \right) \dots \left(\cos \frac{a}{2^n} + \cos \frac{b}{2^n} \right). \end{aligned}$$

Решение. Умножив обе части на $\cos \frac{a}{2^n} - \cos \frac{b}{2^n}$ получим:

$$\begin{aligned} \left(\cos \frac{a}{2} + \cos \frac{b}{2} \right) \dots \left(\cos \frac{a}{2^n} + \cos \frac{b}{2^n} \right) \left(\cos \frac{a}{2^n} - \cos \frac{b}{2^n} \right) &= \\ &= \left(\cos \frac{a}{2^n} - \cos \frac{b}{2^n} \right) P. \end{aligned}$$

Приняв во внимание тождество

$$\begin{aligned} \left(\cos \frac{a}{2^k} + \cos \frac{b}{2^k} \right) \left(\cos \frac{a}{2^k} - \cos \frac{b}{2^k} \right) &= \cos^2 \frac{a}{2^k} - \cos^2 \frac{b}{2^k} = \\ &= \left(\cos \frac{a}{2^{k-1}} - \cos \frac{b}{2^{k-1}} \right) \cdot \frac{1}{2} \end{aligned}$$

и выполнив умножения, получим:

$$\left(\cos \frac{a}{2^n} - \cos \frac{b}{2^n} \right) P = (\cos a - \cos b) \frac{1}{2^n},$$

откуда

$$P = \prod_{k=1}^n \left(\cos \frac{a}{2^k} - \cos \frac{b}{2^k} \right) = \frac{\cos a - \cos b}{2^n \left(\cos \frac{a}{2^n} - \cos \frac{b}{2^n} \right)}.$$

17. Вычислить произведение:

$$\begin{aligned} [1 - \cos \varphi] \left[1 - \cos \left(\varphi + \frac{2\pi}{n} \right) \right] \dots \left[1 - \cos \left(\varphi + \frac{2\pi(n-1)}{n} \right) \right] &= \\ = \prod_{k=0}^{n-1} \left[1 - \cos \left(\varphi + \frac{2\pi k}{n} \right) \right]. \end{aligned}$$

Решение. Уравнение $T_n(x) = \cos \alpha$,

где

$$T_n(x) = x^n - C_n^2(1-x^2)x^{n-2} + C_n^4(1-x^2)x^{n-4} - \dots$$

— полином Чебышева (см. § 17) служит для определения всех возможных значений $x = \cos u$, при этом дуга u определяется из условий $\cos nu = \cos \alpha$. Положив $\alpha = n\varphi$ получим уравнение

$$T_n(x) - \cos n\varphi = 0,$$

корнями которого служат значения $x = \cos u$, где дуга u определяется из условия

$$\cos nu = \cos n\varphi;$$

последнее условие переписывается так:

$$nu = \pm n\varphi + 2k\pi,$$

откуда

$$u = \pm \varphi + \frac{2k\pi}{n}.$$

Для $x = \cos u$ возможны n следующих различных (в общем случае) значений:

$$\begin{aligned} x_0 = \cos \varphi, \quad x_1 = \cos \left(\varphi + \frac{2\pi}{n} \right), \quad x_2 = \cos \left(\varphi + \frac{4\pi}{n} \right), \dots, \\ x_{n-1} = \cos \left[\varphi + 2 \frac{(n-1)\pi}{n} \right]. \end{aligned}$$

Следовательно, имеет место разложение на множители:

$$\begin{aligned} T_n(x) - \cos n\varphi &= 2^{n-1} (x - x_0) (x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) = \\ &= 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left[x - \cos \left(\varphi + \frac{2k\pi}{n} \right) \right]; \end{aligned}$$

(коэффициент при x^n равен 2^{n-1} , см. § 17).

Положив в этом тождестве $x = 1$, получим искомое произведение

$$\prod_{k=0}^{n-1} \left[1 - \cos \left(\varphi + \frac{2k\pi}{n} \right) \right] = \frac{1 - \cos n\varphi}{2^{n-1}}. \quad (\Pi_{17})$$

18. Вычислить произведение

$$\begin{aligned} \sin \left(x + \frac{\pi}{n} \right) \sin \left(x + \frac{2\pi}{n} \right) \dots \sin \left(x + \frac{(n-1)\pi}{n} \right) &= \\ &= \prod_{k=1}^{n-1} \sin \left(x + \frac{k\pi}{n} \right). \end{aligned}$$

Решение. Положив в формуле (Π_{17}) предыдущего примера $\varphi = 2x$, преобразуем в произведение правую часть, а также каждый двучленный сомножитель в левой части; тогда получим:

$$2^n \prod_{k=0}^{n-1} \sin^2 \left(x + \frac{k\pi}{n} \right) = \frac{2 \sin^2 nx}{2^{n-1}},$$

откуда (извлекая корень) получим:

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \left(x + \frac{k\pi}{n} \right) = \frac{\sin nx}{2^{n-1} \sin x}. \quad (\Pi_{18})$$

19. Вычислить следующие произведения:

$$\begin{aligned} \text{a) } \prod_{k=0}^{n-1} \cos \left(x + \frac{k\pi}{n} \right); \\ \text{b) } \prod_{k=1}^n \sin \left(x + \frac{2k-1}{2n} \pi \right); \quad \text{c) } \prod_{k=0}^{2n-1} \sin \left(x + \frac{k\pi}{n} \right). \end{aligned}$$

Решение. а) Если в формуле предыдущего примера заменить x на $x + \frac{\pi}{2}$, то общий член произведения преобразуется следующим образом:

$$\sin \left(x + \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{n} \right) = \cos \left(x + \frac{k\pi}{n} \right),$$

а потому

$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos \left(x + \frac{k\pi}{n} \right) = \cos x \cos \left(x + \frac{\pi}{n} \right) \cdot \cos \left(x + \frac{(n-1)\pi}{n} \right) =$$

$$= \frac{\sin \left(nx + n \frac{\pi}{2} \right)}{2^{n-1}} = \begin{cases} \frac{(-1)^m \sin 2m\pi}{2^{2m-1}}, & \text{если } n = 2m, \\ \frac{(-1)^m \cos (2m+1)\pi}{2^{2m}}, & \text{если } n = 2m+1. \end{cases}$$

б) Если в формуле предыдущего примера заменить x на $x + \frac{\pi}{2n}$, то общий член произведения преобразуется следующим образом:

$$\sin \left(x + \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \right) = \sin \left(x + \frac{2k+1}{2n} \pi \right),$$

а потому

$$\prod_{k=1}^n \sin \left(x + \frac{2k-1}{2n} \pi \right) = \sin \left(x + \frac{\pi}{2n} \right) \sin \left(x + \frac{3\pi}{2n} \right) \sin \left(x + \frac{5\pi}{2n} \right) \dots$$

$$\sin \left(x + \frac{2n-1}{n} \pi \right) = \sin \left(x + \frac{\pi}{2n} \right) \sin \left(x + \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n} \right) \times$$

$$\times \sin \left(x + \frac{\pi}{2n} + \frac{2\pi}{n} \right) \dots \sin \left(x + \frac{\pi}{2n} + \frac{n-1}{n} \pi \right) =$$

$$= \prod_{k=0}^{n-1} \sin \left(x + \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \right) = \frac{\sin \left(nx + \frac{\pi}{2} \right)}{2^{n-1}} = \frac{\cos nx}{2^{n-1}}.$$

с) Разобьем члены произведения $\prod_{k=0}^{2n-1} \sin \left(x + \frac{k\pi}{n} \right)$ на две группы, одна

из этих групп выписана в верхней строчке, а другая — в нижней следующим образом:

$$\sin x \quad \sin \left(x + \frac{\pi}{n} \right) \quad \sin \left(x + \frac{2\pi}{n} \right) \dots \sin \left(x + \frac{n-1}{n} \pi \right)$$

$$\sin \left(x + \frac{n\pi}{n} \right) \sin \left(x + \frac{n+1}{n} \pi \right) \sin \left(x + \frac{n+2}{n} \pi \right) \dots \sin \left(x + \frac{2n-1}{n} \pi \right).$$

Члены, подписанные друг под другом, взаимно противоположны

$$\sin \left(x + \frac{n+k}{n} \pi \right) = \sin \left(x + \frac{k\pi}{n} + \pi \right) = -\sin \left(x + \frac{k\pi}{n} \right),$$

следовательно,

$$\prod_{k=0}^{2n-1} \sin \left(x + \frac{k\pi}{n} \right) = (-1)^n \left[\prod_{k=0}^{n-1} \sin \left(x + \frac{k\pi}{n} \right) \right]^2 = \frac{(-1)^n \sin^2 nx}{2^{2n-2}}.$$

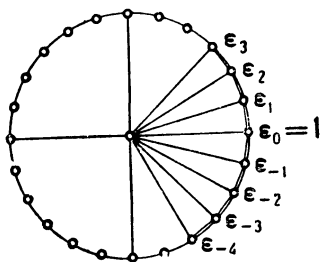
20. Вычислить произведение

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(x^2 - 2x \cos \frac{k\pi}{n} + 1 \right).$$

Решение. Найдем корни уравнения $x^{2n} - 1$. Искомыми корнями служат значения комплексных корней степени $2n$ из 1. Занумеруем эти корни следующим образом (черт. 84):

$$\varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_1 = \cos \frac{\pi}{n} + i \sin \frac{\pi}{n}, \quad \varepsilon_2 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}, \quad \dots,$$

$$\varepsilon_n = -1, \quad \varepsilon_{-1} = \cos \frac{\pi}{n} - i \sin \frac{\pi}{n}, \quad \varepsilon_{-2} = \cos \frac{2\pi}{n} - i \sin \frac{2\pi}{n}, \quad \dots$$



Черт. 84

Разложим двучлен $x^{2n} - 1$ на действительные множители; для этого сгруппируем попарно линейные комплексно сопряженные множители, на которые разлагается этот двучлен.

$$x^{2n} - 1 = (x^2 - 1)(x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_{-1}) \times \\ \times (x - \varepsilon_2)(x - \varepsilon_{-2}) \dots (x - \varepsilon_{n-1})(x - \varepsilon_{-n+1}).$$

Так как

$$(x - \varepsilon_k)(x - \varepsilon_{-k}) = \left(x - \cos \frac{k\pi}{n} - i \sin \frac{k\pi}{n} \right) \left(x - \cos \frac{k\pi}{n} + i \sin \frac{k\pi}{n} \right) = \\ = x^2 - 2x \cos \frac{k\pi}{n} + 1,$$

то имеем:

$$x^{2n} - 1 = (x^2 - 1) \left(x^2 - 2x \cos \frac{\pi}{n} + 1 \right) \left(x^2 - 2x \cos \frac{2\pi}{n} + 1 \right) \dots \\ \dots \left(x^2 - 2x \cos \frac{(n-1)\pi}{n} + 1 \right) = (x^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(x^2 - 2x \cos \frac{k\pi}{n} + 1 \right).$$

Откуда найдем искомое произведение:

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(x^2 - 2x \cos \frac{k\pi}{n} + 1 \right) = \frac{x^{2n} - 1}{x^2 - 1} = x^{2n-2} + x^{2n-4} + \dots + 1. \quad (\Pi_{20})$$

21. Вычислить произведение

$$\prod_{k=0}^{n-1} \left(x^2 - 2x \cos \frac{2k+1}{2n} \pi + 1 \right).$$

Решение. Поступим также, как в предыдущем примере: разложим двучлен $x^{2n} + 1$ на действительные множители

$$x^{2n} + 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left[x - \left(\cos \frac{2k+1}{2n} \pi + i \sin \frac{2k+1}{2n} \pi \right) \right] \left[x - \left(\cos \frac{2k+1}{2n} \pi - i \sin \frac{2k+1}{2n} \pi \right) \right].$$

Откуда

$$\prod_{k=0}^{n-1} \left(x^2 - 2x \cos \frac{2k+1}{2n} \pi + 1 \right) = x^{2n} + 1. \quad (\Pi_{21})$$

Аналогично получаются следующие формулы:

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n \left(x^2 - 2x \cos \frac{2k\pi}{2n+1} + 1 \right) &= \frac{x^{2n+1} - 1}{x - 1} = \\ &= x^{2n} + x^{2n-1} + \dots + 1; \end{aligned} \quad (\Pi'_{21})$$

$$\prod_{k=1}^n \left(x^2 + 2x \cos \frac{2k\pi}{2n+1} + 1 \right) = \frac{x^{2n+1} + 1}{x + 1} = x^{2n} - x^{2n-1} + \dots + 1. \quad (\Pi''_{21})$$

Формула (Π'_{21}) получится разложением на множители двучлена $x^{2n+1} - 1$.

Для получения формулы (Π''_{21}) разложим на множители двучлен $x^{2n+1} + 1$:

$$\frac{x^{2n+1} + 1}{x + 1} = \prod_{k=0}^{n-1} \left(x^2 - 2x \cos \frac{2k+1}{2n+1} \pi + 1 \right); \quad (\Pi''_{21})$$

далее замечаем, что

$$\cos \frac{2k+1}{2n+1} \pi = -\cos \left(\pi - \frac{2k+1}{2n+1} \pi \right) = -\cos \frac{2(n-k)}{2n+1} \pi;$$

полагая $k = 0, 1, \dots, n-1, n$, получим для $n-k$ множество тех же значений $n-k = n, n-1, \dots, 1, 0$, следовательно, произведения (Π'_{21}) и (Π''_{21}) равны.

22. Доказать справедливость следующих равенств:

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n} = \sin \frac{\pi}{2n} \cdot \sin \frac{2\pi}{2n} \dots \sin \frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}; \quad (\Pi_{22})$$

$$\prod_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{2n+1} = \sin \frac{\pi}{2n+1} \sin \frac{2\pi}{2n+1} \dots \sin \frac{n\pi}{2n+1} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}; \quad (\Pi'_{22})$$

$$\prod_{k=1}^n \sin \frac{(2k-1)\pi}{4n} = \sin \frac{\pi}{4n} \sin \frac{3\pi}{4n} \dots \sin \frac{(2n-1)\pi}{4n} = \frac{\sqrt{2}}{2^n}; \quad (\Pi''_{22})$$

$$\prod_{k=1}^n \cos \frac{(2k-1)\pi}{4n} = \cos \frac{\pi}{4n} \cos \frac{3\pi}{4n} \dots \cos \frac{(2n-1)\pi}{4n} = \frac{\sqrt{2}}{2n}; \quad (\Pi_{22}''')$$

$$\prod_{k=1}^n \cos \frac{2k\pi}{2n+1} = \cos \frac{2n}{2n+1} \cos \frac{4\pi}{2n+1} \dots \cos \frac{2n\pi}{2n+1} =$$

$$= \begin{cases} \frac{(-1)^m}{2^{2m+1}} & \text{при } 2m+1=n; \\ \frac{(-1)^m}{2^{2m}} & \text{при } n=2m. \end{cases} \quad (\Pi_{20}^{IV})$$

Решение. Для вычисления (Π_{22}) положим в формуле (Π_{20}) $x=1$, тогда получим:

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(4 \sin^2 \frac{k\pi}{2n} \right) = n \quad \text{или} \quad 2^{2(n-1)} \left[\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n} \right]^2 = n,$$

откуда следует справедливость формулы (Π_{22}) .

Аналогично доказываются прочие формулы (Π_{22}') , (Π_{22}'') , (Π_{22}''') , (Π_{22}^{IV}) . Следует положить (соответственно) $x=1$ в формуле (Π_{21}') ; $x=1$ в формуле (Π_{21}) ; $x=-1$ в формуле (Π_{21}) ; $x=i$ в формуле (Π_{21}'') .

23. Доказать, что при четном n имеет место тождество

$$\sin nx = n \sin x \cos x \prod_{k=1}^{\frac{n-2}{2}} \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{k\pi}{n}} \right). \quad (\Pi_2)_3$$

Решение. Рассмотрим формулу

$$\sin nx = C_n^1 \sin x \cos^{n-1} x - C_n^3 \sin^3 x \cos^{n-3} x +$$

$$+ C_n^5 \sin^5 x \cos^{n-5} x - \dots + (-1)^{\frac{n-2}{2}} n \sin^{n-1} x \cos x \quad (S_n)$$

или

$$\sin nx = \sin x \cos x \left(C_n^1 \cos^{n-2} x - C_n^3 \sin^2 x \cos^{n-4} x + \dots \right.$$

$$\left. \dots + (-1)^{\frac{n-2}{2}} C_n^{n-1} \sin^{n-2} x \right).$$

Так как четные степени косинуса выражаются через четные степени синуса (в виде многочленов от этих степеней), то

$$\sin nx = \sin x \cos x \cdot P(\sin^2 x)$$

или, положив $z = \sin x$, получим

$$\sin nx = \sin x \cos x P(z^2)$$

где

$$P(z^2) = C_n^1 (1 - z^2)^{\frac{n-2}{2}} - C_n^3 z^2 (1 - z^2)^{\frac{n-4}{2}} + \dots + (-1)^{\frac{n-2}{2}} C_n^{n-1} z^{n-2}.$$

Всякое значение $z = \sin x$, при котором $\sin nx = 0$, но $\sin x \neq 0$ и $\cos x \neq 0$, служит корнем многочлена $P(z^2)$.

Из условия $\sin nx = 0$ найдем:

$$x = \frac{k\pi}{n}, \quad \text{где } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \frac{n-2}{2}, \frac{n}{2}.$$

При $k=0$ и $k=\frac{n}{2}$ множители $\sin x$ и $\cos x$ обращаются в нуль, а при прочих значениях k эти множители в нуль не обращаются. Следовательно:

$$z_1 = \sin \frac{\pi}{n}, \quad z_2 = \sin \frac{2\pi}{n}, \dots, \quad z_{\frac{n-2}{2}} = \sin \frac{(n-2)\pi}{2n},$$

$$z_{-1} = -\sin \frac{\pi}{n}, \quad z_{-2} = -\sin \frac{2\pi}{n}, \dots, \quad z_{-\frac{n-2}{2}} = -\sin \frac{(n-2)\pi}{2n}$$

суть $n-2$ различных корни многочлена $P(z^2)$ степени $n-2$; следовательно, имеет место разложение

$$\begin{aligned} P(z^2) &= A(z-z_1)(z-z_{-1}) \dots \left(z-z_{\frac{n-2}{2}}\right) \left(z-z_{-\frac{n-2}{2}}\right) = \\ &\quad (A - \text{коэффициент при старшем члене } P(z^2)) \\ &= (-1)^{\frac{n-2}{2}} A(z_1^2 - z^2)(z_2^2 - z^2) \dots \left(z_{\frac{n-2}{2}}^2 - z^2\right) = \\ &\quad \text{(так как } z_k = -z_{-k}) \\ &= (-1)^{\frac{n-2}{2}} A z_1^2 z_2^2 \dots z_{\frac{n-2}{2}}^2 \left(1 - \frac{z^2}{z_1^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{z_2^2}\right) \dots \left(1 - \frac{z^2}{z_{\frac{n-2}{2}}^2}\right) = \\ &= n \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{\pi}{n}}\right) \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{2\pi}{n}}\right) \dots \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{(n-2)\pi}{2n}}\right). \quad (*) \end{aligned}$$

(так как $z = \sin x$).

В самом деле,

$$(-1)^{\frac{n-2}{2}} z_1^2 z_2^2 \dots z_{\frac{n-2}{2}}^2 = z_1 z_{-1} \dots z_{\frac{n-2}{2}} z_{-\frac{n-2}{2}}$$

есть произведение корней $P(z^2)$, равное свободному члену, деленному на A , т. е.

$$(-1)^{\frac{n-2}{2}} z_1^2 z_2^2 \dots z_{\frac{n-2}{2}}^2 = \frac{P(0)}{A} = \frac{n}{A}.$$

Подставив в равенство (*), получим доказываемое тождество. Аналогично доказываются следующие тождества:

$$\cos nx = \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}} \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{(2k-1)\pi}{2n}}\right); \quad (n - \text{четное})$$

$$\sin nx = n \sin x \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{k\pi}{n}}\right); \quad (n - \text{нечетное})$$

$$\cos nx = \cos x \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{(2k-1)\pi}{2n}}\right); \quad (n - \text{нечетное})$$

ИССЛЕДОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ЧИСЛОВОГО АРГУМЕНТА

В настоящей главе будут рассматриваться тригонометрические функции от числового аргумента. В соответствии с условием, принятым в § 9, значения тригонометрических функций от числового аргумента x определяются как ее значения от угла, *р а д и а н н а я* мера которого равна числу x .

Ряд свойств тригонометрических функций был уже установлен в предыдущих главах; в настоящей главе эти свойства будут сформулированы в функциональной терминологии.

§ 26. Области определения и множества значений тригонометрических функций

1°. *Областью определения функций $\cos x$ и $\sin x$ является множество всех действительных чисел, т. е. интервал $(-\infty, \infty)$.*

В самом деле, будучи координатами конца дуги, измеряющейся числом x , эти функции имеют определенное значение, каково бы ни было действительное число x .

2°. *Областью определения функции $\operatorname{tg} x$ является бесконечное множество интервалов*

$$\dots, \left(-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}\right), \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right), \dots, \\ \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), \dots$$

В самом деле, функция $\operatorname{tg} x$ имеет смысл для любых дуг, кроме дуг, оканчивающихся в точках $B(0, 1)$ и $B_1(0, -1)$; эти последние дуги измеряются числами $\frac{\pi}{2} + k\pi$. Исключив числа

$\frac{\pi}{2} + k\pi$ из множества всех действительных чисел, получим бесконечное множество интервалов $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$.

Аналогично устанавливается, что

3°. Областью определения функции $\operatorname{ctg} x$ является бесконечное множество интервалов $(k\pi, (k+1)\pi)$.

4°. Множеством значений функции $\cos x$, а также функции $\sin x$ является сегмент $[-1, 1]$.

В самом деле, в § 12 установлено, что при заданном значении m косинуса (синуса) соответствующий угол существует в том и только в том случае, если $-1 \leq m \leq 1$. Иными словами, косинус (синус) может принимать любое действительное значение, принадлежащее сегменту $[-1, 1]$.

5°. Множеством значений функции $\operatorname{tg} x$, а также функции $\operatorname{ctg} x$ является множество всех действительных чисел $(-\infty, \infty)$.

В самом деле, в § 12 установлено, что при заданном значении m тангенса (котангенса), соответствующий угол может быть построен, каково бы ни было действительное число m . Иными словами, тангенс (котангенс) может принимать любое действительное значение.

Из изложенного следует, что функции $\cos x$ и $\sin x$ ограничены, так как $|\cos x| \leq 1$, $|\sin x| \leq 1$, а функции $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ неограничены (в соответствующей области определения).

Примеры.

1 Областью определения каждой из следующих функций

$$\sin x^2, \cos 2^x, \cos(\sin x), \sin(x + x^2)$$

является множество всех действительных чисел.

Рассмотрим, например, функцию $\sin x^2$. Представим ее в виде сложной функции $\sin u$ с промежуточным аргументом $u = x^2$. Областью определения промежуточного аргумента $u = x^2$ является интервал $-\infty < x < \infty$, функция $\sin u$ определена при всех значениях u , следовательно, сложная функция определена при всех значениях x .

2. Установить (в общем случае) область определения следующих сложных функций $\sin u(x)$ и $\cos u(x)$.

Р е ш е н и е.

Выражение $\sin u$ или $\cos u$ имеет смысл при всех значениях аргумента, при которых промежуточный аргумент u имеет смысл. Следовательно, область определения функции $\sin u(x)$ или $\cos u(x)$ совпадает с областью определения $u(x)$

На основании сказанного, имеем:

функция	промежуточный аргумент	область определения
1) $\cos \lg x$	$u = \lg x$	$0 < x < \infty$
2) $\sin \frac{1}{x}$	$u = \frac{1}{x}$	$(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$
3) $\sin(\operatorname{ctg} x)$	$u = \operatorname{ctg} x$	$k\pi < x < (k+1)\pi$
4) $\cos \lg \sqrt{1-x^2}$	$u = \lg \sqrt{1-x^2}$	$-1 < x < 1$

3) Установить область определения функции $\operatorname{tg} u(x)$.

Решение. Область определения находится из следующих условий: 1) промежуточный аргумент имеет смысл и 2) значение промежуточного аргумента должно принадлежать области определения тангенса, т. е.

$$u(x) \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi:$$

а) $y = \operatorname{tg} \sin x$, промежуточный аргумент $u = \sin x$ имеет смысл при $-\infty < x < \infty$. Так как $|\sin x| \leq 1$, то $\sin x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. Область определения: интервал $-\infty < x < \infty$;

б) $y = \operatorname{ctg} \cos x$, промежуточный аргумент $u = \cos x$ определен при $-\infty < x < \infty$. Если $u = k\pi$, то y теряет смысл; решаем уравнение $\cos x = k\pi$; так как при $|k| > 0$ имеем $|k\pi| > 1$, то это уравнение имеет решения лишь при $k = 0$, соответствующие значения $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ (n — целое число) следует исключить из множества всех действительных чисел. Область определения есть бесконечное множество интервалов

$$\left(-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right);$$

с) функция $\operatorname{tg} \frac{1}{x}$, промежуточный аргумент $u = \frac{1}{x}$ имеет смысл при $x \neq 0$. Если $u = \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, откуда $x = \frac{2}{(2k+1)\pi}$, то $y = \operatorname{tg} x$ теряет смысл. Исключив из множества всех действительных чисел числа $x = 0$ и $x = \frac{2}{(2k+1)\pi}$, найдем область определения функции $y = \operatorname{tg} \frac{1}{x}$ в виде бесконечного множества интервалов

$$\left(\frac{2}{\pi}, +\infty\right), \left(\frac{2}{3\pi}, \frac{2}{\pi}\right), \left(\frac{2}{5\pi}, \frac{2}{3\pi}\right), \dots, \left(\frac{2}{(2k+3)\pi}, \frac{2}{(2k+1)\pi}\right), \dots, \\ \left(-\infty, -\frac{2}{\pi}\right), \left(-\frac{2}{\pi}, -\frac{2}{3\pi}\right), \left(-\frac{2}{3\pi}, -\frac{2}{5\pi}\right), \dots$$

4. Найти множество значений функций:

а) $y = \sin^2 x$. Так как множество значений $\sin x$ есть сегмент $[-1, 1]$, то множество значений $\sin^2 x$ есть сегмент $0 \leq y \leq 1$;

б) $y = \operatorname{tg}^2 x$. Так как множество значений $\operatorname{tg} x$ есть множество всех действительных чисел, то множество значений $\operatorname{tg}^2 x$ есть множество всех неотрицательных чисел $0 \leq y < \infty$;

с) $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$. Так как $\cos x$ может иметь произвольное значение, не большее по абсолютной величине, чем 1, то $|\sec x| \geq 1$. Множество значений состоит из двух промежутков $-\infty < y \leq -1$ и $1 \leq y < \infty$;

д) $y = 2^{\sin x}$. Имеем $y = 2^u$, где $u = \sin x$. Множество значений промежуточного аргумента $u = \sin x$ есть сегмент $-1 \leq u \leq 1$, а множество значений функции y есть сегмент $\frac{1}{2} \leq y \leq 2$.

§ 27. Периодичность тригонометрических функций

Теорема 1°. Функции $\cos x$ и $\sin x$ периодические, их наименьший положительный период равен 2π .

Р а з ъ я с н е н и е. Из изложенного выше (см., например, § 16, стр. 82) вытекает, что всякое число вида $2k\pi$ (в частности 2π),

где k — произвольное целое число, есть период косинуса и синуса, ибо

$$\cos(x + 2k\pi) \equiv \cos x, \quad \sin(x + 2k\pi) \equiv \sin x$$

(дуги x и $x + 2k\pi$ оканчиваются в одной и той же точке).

Докажем, что *никаких других периодов функции $\cos x$ и $\sin x$ не имеют*.

Доказательство. Число $l \neq 0$ служит периодом функции $\cos x$ в том и только в том случае, если имеет место тождество (по определению периода)

$$\cos(x + l) \equiv \cos x \quad \text{или} \quad \cos(x + l) - \cos x \equiv 0.$$

Преобразовав в произведение левую часть последнего тождества, получим:

$$-2 \sin\left(x + \frac{l}{2}\right) \sin \frac{l}{2} \equiv 0. \quad (1)$$

Так как сомножитель $\sin\left(x + \frac{l}{2}\right)$ не равен тождественно нулю, то тождество (1) выполняется в том и только в том случае, если $\sin \frac{l}{2} = 0$, откуда $l = 2k\pi$. Следовательно, периодами синуса являются числа $2k\pi$; среди этих чисел наименьшим положительным является 2π .

Для функции $\sin x$ теорема доказывается аналогично, ч. т. д.

Теорема 2°. *Функции $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ периодические, их наименьший положительный период равен π .*

Доказательство. Число l является периодом тангенса в том и только в том случае, если при всех допустимых значениях аргумента x имеет место равенство:

$$\operatorname{tg}(x + l) \equiv \operatorname{tg} x \quad \text{или} \quad \frac{\sin l}{\cos(x + l) \cos x} \equiv 0.$$

Последнее равенство выполняется тождественно в том и только в том случае, если $\sin l = 0$, откуда $l = k\pi$. Если x принадлежит области определения тангенса, то число $x + l = x + k\pi$ также принадлежит этой области. В самом деле, в противном случае $x + k\pi$ было бы числом вида $x + k\pi = \frac{\pi}{2} + n\pi$ (n — целое число), но тогда и число $x = \frac{\pi}{2} + (n - k)\pi$ не принадлежало бы (вопреки условию) области определения тангенса.

Итак, всякое число вида $k\pi$ является периодом функции $\operatorname{tg} x$, наименьшее из этих чисел есть π .

Для функции $\operatorname{ctg} x$ теорема доказывается аналогично, ч. т. д.

Теорема. *Всякая функция вида*

$$f(x) = U(\cos x, \sin x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x)$$

есть периодическая функция аргумента x , одним из периодов которой является 2π .

Доказательство. В самом деле, при замене значения аргумента x на $x + 2k\pi$ значения промежуточных аргументов

$$u = \cos x, \quad v = \sin x, \quad w = \operatorname{tg} x, \quad z = \operatorname{ctg} x$$

не меняются, а потому не меняется значение функции $f(x)$, ч. т. д.

Заметим, что число 2π , будучи периодом функции $f(x)$, может не быть ее наименьшим положительным периодом.

Так, например, функция $f(x) = \sin x \cos x$ периодическая, но 2π не является ее наименьшим периодом. В самом деле,

$$\begin{aligned} f(x + \pi) &= \sin(x + \pi) \cos(x + \pi) = (-\sin x)(-\cos x) = \\ &= \sin x \cos x = f(x). \end{aligned}$$

Следовательно, число π является периодом функции $f(x)$.

Примеры.

1. Нижеследующие функции, будучи сложными функциями от периодических функций, являются периодическими:

$$\sin x + \operatorname{tg} x, \quad 2^{\sin x}, \quad \lg \cos x, \quad \sin^3 x + 3 \sin^2 x + 1, \quad \frac{1}{\sin x + \operatorname{tg} x - \cos x}.$$

2. Доказать, что функция $|\sin x|$ периодическая и найти ее наименьший положительный период.

Решение. Число π является периодом данной функции так как

$$|\sin(x + \pi)| = |-\sin x| = |\sin x|.$$

Докажем, что это число есть наименьший положительный период. В самом деле, если бы число $0 < l < \pi$ было бы периодом, то имело бы место тождество $|\sin(x + l)| = |\sin x|$, положив в частности $x = 0$, получим $|\sin l| = 0$, что невозможно, так как при $0 < l < \pi$ имеем $\sin l > 0$.

3. Доказать, что функции а) $x + \sin x$ и б) $\sin x^2$ непериодические

Доказательство. а) Если функция $x + \sin x$ периодическая, то существует число $l \neq 0$ такое, что

$$(x + l) + \sin(x + l) \equiv x + \sin x \quad \text{или} \quad l + 2 \cos\left(x + \frac{l}{2}\right) \sin \frac{l}{2} \equiv 0. \quad (1)$$

$$\text{Если } \sin \frac{l}{2} \neq 0 \text{ (т. е. } l \neq 2k\pi), \text{ то } \cos\left(x + \frac{l}{2}\right) = -\frac{l}{2 \sin \frac{l}{2}} = \text{const},$$

что на самом деле не имеет места; если же $\sin \frac{l}{2} = 0$, то из (1) найдем $l = 0$, что противоречит условию, $l \neq 0$.

б) Рассуждаем аналогично: тождество

$$\sin(x + l)^2 \equiv \sin x^2 \quad \text{или} \quad 2 \cos\left(x^2 + lx + \frac{l^2}{2}\right) \sin\left(lx + \frac{l^2}{2}\right) \equiv 0$$

не имеет места, так как ни один из сомножителей тождественно не равен нулю, а каждый из них обращается в нуль лишь на множестве изолированных точек.

Можно рассуждать иначе: если бы данная функция была периодической, то множество корней уравнения $\sin x^2 = 0$ также было бы периодическим. Ре-

шим это уравнение. Получим последовательность (двустороннюю) корней $x = \pm \sqrt{k\pi}$. Найдем расстояние между двумя «соседними» корнями

$$\sqrt{(k+1)\pi} - \sqrt{k\pi} = \frac{\pi}{\sqrt{(k+1)\pi} + \sqrt{k\pi}} \rightarrow 0, \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Это показывает, что точки $\pm \sqrt{k\pi}$ расположены непериодически на числовой оси.

§ 28. Интервалы знакопостоянства тригонометрических функций

Функция $\cos x$. В § 7 установлено, что косинус положителен (отрицателен) для дуг, оканчивающихся в правой (левой) открытой полуокружности. Следовательно, в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ и (в силу периодичности косинуса) во всех интервалах вида $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ (правая полуокружность) $\cos x > 0$.

В интервале $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$ и во всех интервалах

$$\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right) \text{ имеем } \cos x < 0.$$

Функция $\sin x$. Синус положителен (отрицателен) для дуг, оканчивающихся в верхней (нижней) полуокружности; следовательно, в интервале $(0, \pi)$, а также во всех интервалах $(2k\pi, (2k+1)\pi)$ функция $\sin x$ положительна. В интервале $(-\pi, 0)$ во всех интервалах $((2k-1)\pi, 2k\pi)$ функция $\sin x$ отрицательна.

Функция $\operatorname{tg} x$. Для дуг, оканчивающихся в I четверти (открытой), тангенс положителен, а для дуг, оканчивающихся в IV четверти (открытой), тангенс отрицателен, поэтому $\operatorname{tg} x > 0$ в интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и $\operatorname{tg} x < 0$ в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Рассмотрение функции $\operatorname{tg} x$ в интервалах, соответствующих остальным четвертям, излишне; в силу того, что π есть период тангенса, имеем $\operatorname{tg} x > 0$ в интервалах $\left(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ (I и III четверти) и $\operatorname{tg} x < 0$ в интервалах $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi\right)$ (II и IV четверти).

Функция $\operatorname{ctg} x$ положительна (отрицательна) в тех же интервалах, что и $\operatorname{tg} x$.

Примеры.

1. Найти область определения функции $\sqrt{\cos x}$.

Решение. Искомая область определения находится из условия $\cos x \geq 0$, откуда получим бесконечное множество сегментов

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

2. Найти область определения функций

$$y_1 = \lg \cos x, \quad y_2 = \lg \sin x, \quad y_3 = \lg \operatorname{tg} x.$$

В каких промежутках справедливы тождества

$$\text{a) } \lg \operatorname{tg} x = \lg \sin x - \lg \cos x, \quad \text{b) } \lg \operatorname{tg} x = \lg |\sin x| - \lg |\cos x|?$$

Решение. Области определения функций y_1 , y_2 и y_3 находятся из неравенств $\cos x > 0$, $\sin x > 0$, $\operatorname{tg} x > 0$. Получим соответственно для функции y_1 множество интервалов $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ (для функции y_2 множество интервалов $(2k\pi, (2k+1)\pi)$), для функции y_3 множество интервалов $\left(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$.

Тождество а) имеет место при условиях $\sin x > 0$, $\cos x > 0$, $\operatorname{tg} x > 0$, т. е. в интервалах $\left(2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ (дуги, оканчивающиеся в I четверти).

Тождество б) имеет место при условии $\operatorname{tg} x > 0$, т. е. в интервалах $\left(k\pi, \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi\right)$. В самом деле, если $\operatorname{tg} x \leq 0$ то $\lg \operatorname{tg} x$ не имеет смысла. Если же $\operatorname{tg} x > 0$, то

$$\operatorname{tg} x = |\operatorname{tg} x| = \frac{|\sin x|}{|\cos x|} \quad \text{и} \quad \lg \operatorname{tg} x = \lg |\sin x| - \lg |\cos x|.$$

§ 29. Промежутки монотонности тригонометрических функций, наибольшие и наименьшие значения

Теорема. На всяком сегменте $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ (изображающимся верхней замкнутой полуокружностью) функция $\cos x$ убывает от 1 до -1 ; на всяком сегменте $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$ (изображающимся нижней замкнутой полуокружностью) функция $\cos x$ возрастает от -1 до 1.

Доказательство. В силу периодичности косинуса достаточно доказать теорему лишь для двух сегментов $[0, \pi]$ и $[-\pi, 0]$, составляющих в сумме период косинуса.

Докажем, что функции $\cos x$ на сегменте $[0, \pi]$ убывает от 1 до -1 , для этого надо доказать следующие три положения.

1°. На сегменте $[0, \pi]$ функция $\cos x$ убывает.

2°. В граничных точках сегмента значения косинуса суть $+1$ и -1 .

Это положение установлено выше: известно, что

$$\cos 0 = 1, \quad \cos \pi = -1.$$

3°. Произвольное значение m , промежуточное между -1 и 1 , функция $\cos x$ принимает в некоторой точке с сегмента $[0, \pi]$.

Это положение установлено выше (см. § 12); в самом деле, на сегменте $[0, \pi]$ существует дуга (и притом единственная) $c = \arccos m$, косинус которой равен m

$$\cos c = m.$$

Остается доказать положение 1°. Пусть x_1 и x_2 — два произвольные различные значения аргумента, взятые на сегменте $[0, \pi]$, пусть $0 \leq x_1 < x_2 \leq \pi$. Для сравнения соответствующих значений косинуса составим разность $\cos x_2 - \cos x_1$ и преобразуем ее в произведение:

$$\cos x_2 - \cos x_1 = -2 \sin \frac{x_2 - x_1}{2} \sin \frac{x_2 + x_1}{2}. \quad (1)$$

Из неравенств $0 \leq x_1 < x_2 \leq \pi$ следует, что $0 < \frac{x_1 + x_2}{2} < \pi$ и $0 < \frac{x_2 - x_1}{2} < \frac{\pi}{2}$. Следовательно, оба сомножителя $\sin \frac{x_2 - x_1}{2}$ и $\sin \frac{x_2 + x_1}{2}$ положительны, а потому

$$\cos x_2 - \cos x_1 < 0 \quad \text{и} \quad \cos x_2 < \cos x_1.$$

Итак, б о л ь ш е м у значению аргумента соответствует меньшее значение косинуса, следовательно, на данном сегменте функция $\cos x$ убывает.

Аналогично доказывается, что функция $\cos x$ на сегменте $[-\pi, 0]$ возрастает от -1 до 1 .

1°. Если $-\pi \leq x_1 < x_2 < 0$, то

$$-\pi < \frac{x_1 + x_2}{2} < 0, \quad 0 < \frac{x_2 - x_1}{2} < \frac{\pi}{2},$$

следовательно, в равенстве (1) сомножитель $\sin \frac{x_1 + x_2}{2}$ отрицателен, а потому $\cos x_2 - \cos x_1 > 0$ и $\cos x_1 < \cos x_2$, следовательно, $\cos x$ возрастает.

2°. Известно, что $\cos(-\pi) = -1$, $\cos 0 = 1$.

3°. Если $-1 \leq m \leq 1$, то в точке $c = -\arccos m$, принадлежащей сегменту $[-\pi, 0]$, имеем $\cos c = m$, ч. т. д.

П р и м е ч а н и е. Доказать возрастание функции $\cos x$ на сегменте $[-\pi, 0]$ можно и так:

Пусть x_1 и x_2 — два значения аргумента, взятые при условии $-\pi \leq x_1 < x_2 \leq 0$. Противоположные значения аргумента $-x_1$ и $-x_2$ расположены на сегменте $[0, \pi]$ и $0 \leq -x_2 < -x_1 \leq \pi$. В силу убывания функции $\cos x$ на сегменте $[0, \pi]$ и ее четности имеем:

$$\cos(-x_2) > \cos(-x_1) \quad \text{или} \quad \cos x_2 > \cos x_1.$$

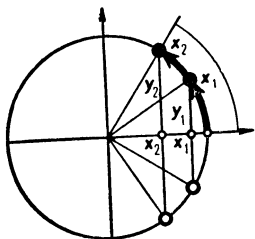
Изложенные результаты могут быть представлены в виде следующей таблицы:

Значения аргумента x	...	-2π	$< x <$	$-\pi$	$< x <$	0	$< x <$	π	$< x <$	2π	...
Функция $y = \cos x$	...	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	...

Геометрическое доказательство. Теорему можно доказать геометрически, исходя из интерпретации косинуса как абсциссы точки единичной окружности. Докажем геометрически убывание косинуса на сегменте $[0, \pi]$.

Разобьем сегмент $[0, \pi]$ на два сегмента $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ и $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$; исследуем $\cos x$ на каждом из этих сегментов отдельно.

Пусть $0 \leq x_1 < x_2 \leq \frac{\pi}{2}$; изобразим значения аргумента x_1 и x_2 в виде дуг единичной окружности (черт. 85). Из геометрии известно, что для двух дуг, меньших полуокружности, хорда, стягивающая большую дугу, удалена от центра круга на меньшее расстояние.



Абсциссы $X_1 = \cos x_1$ и $X_2 = \cos x_2$ концов дуг x_1 и x_2 суть расстояния от центра круга хорд, стягивающих дуги, по величине равные $2x_1$ и $2x_2$. Так как

$$2x_1 < 2x_2, \text{ то } X_1 > X_2,$$

а потому

$$\cos x_1 > \cos x_2 \text{ при } x_1 < x_2.$$

Если дуги x_1 и x_2 содержатся во второй четверти $\frac{\pi}{2} \leq x_1 < x_2 \leq \pi$, то дуги φ_1 и φ_2 , дополняющие x_1 и x_2 до полуокружности, удовлетворяют неравенствам $0 \leq \varphi_2 < \varphi_1 \leq \frac{\pi}{2}$.

Расстояния до центра хорд, стягивающих дуги $2\varphi_2$ и $2\varphi_1$ соответственно суть

$$|X_1| = |\cos x_1| \text{ и } |X_2| = |\cos x_2|,$$

следовательно, $|\cos x_1| < |\cos x_2|$; но так как во второй (замкнутой) четверти косинус не положителен, то

$$\cos x_1 > \cos x_2 \text{ при } x_1 < x_2$$

(установить геометрически возрастание косинуса на сегменте $[-\pi, 0]$ предоставляем учащимся в виде упражнения).

Теорема. На всяком сегменте $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$ (изображающемся правой замкнутой полуокружностью) функция $\sin x$ возрастает от -1 до 1 ; на всяком сегменте $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$ (изображающемся левой замкнутой полуокружностью) функция $\sin x$ убывает от 1 до -1 .

Доказательство. В силу периодичности синуса, достаточно доказать теорему лишь для сегментов $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, составляющих в сумме период синуса. Доказатель-

ство аналогично изложенному выше доказательству монотонности косинуса.

1°. Пусть $x_1 < x_2$, тогда имеем

$$\sin x_2 - \sin x_1 = 2 \cos \frac{x_2 + x_1}{2} \sin \frac{x_2 - x_1}{2},$$

если $-\frac{\pi}{2} \leq x_1 < x_2 \leq \frac{\pi}{2}$, то $-\frac{\pi}{2} < \frac{x_2 + x_1}{2} < \frac{\pi}{2}$;

$$0 \leq \frac{x_2 - x_1}{2} < \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \sin x_2 - \sin x_1 > 0;$$

если же $\frac{\pi}{2} \leq x_1 < x_2 \leq \frac{3}{2}\pi$, то $\frac{\pi}{2} < \frac{x_2 + x_1}{2} < \frac{3\pi}{2}$,

$$0 < \frac{x_2 - x_1}{2} < \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \sin x_2 - \sin x_1 < 0.$$

Следовательно, на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ функция $\sin x$ возрастает,

а на сегменте $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ — убывает.

2°. Граничные значения функции $\sin x$ на рассматриваемых сегментах суть -1 и 1 , а именно:

для сегмента $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ имеем $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$,

а для сегмента $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ имеем

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1, \quad \sin \frac{3\pi}{2} = -1.$$

3°. Пусть m — произвольное число на сегменте $[-1, 1]$, тогда значение m функция $\sin x$ принимает на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

в точке $c = \arcsin m$, а на сегменте $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ — в точке $c_1 = \pi - \arcsin m$, ч. т. д.

Изложенные результаты могут быть представлены в виде следующей таблицы:

Значения аргумента x	...	$-\frac{3\pi}{2}$	$< x <$	$-\frac{\pi}{2}$	$< x <$	$\frac{\pi}{2}$	$< x <$	$\frac{3}{2}\pi$	$< x <$	$\frac{5}{2}\pi$	...
Функция $y = \sin x$	..	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	...

Промежутки монотонности синуса можно установить геометрически, для этого следует рассмотреть функцию $y = \sin x$ «по четвертям». Для примера рассмотрим эту функцию на сегменте $[0, \frac{\pi}{2}]$

(1 замкнутая четверть). Пусть $y_1 = \sin x_1$, $y_2 = \sin x_2$ и $0 \leq x_1 < x_2 \leq \frac{\pi}{2}$.

Тогда (см. черт. 85) $2y_1 = 2 \sin x_1$ и $2y_2 = 2 \sin x_2$ суть длины хорд, стягивающих дуги $2x_1$ и $2x_2$. Так как большую хорду стягивает большая дуга, то $\sin x_1 < \sin x_2$.

Возрастание синуса в 1 четверти следует также из равенства

$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}.$$

Так как $\cos x$ убывает и $\cos x \geq 0$ в первой замкнутой четверти, то $\cos^2 x$ убывает, подкоренное выражение возрастает, а следовательно, $\sin x$ также возрастает.

Наконец, можно воспользоваться формулой приведения $\sin x = -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Пусть $-\frac{\pi}{2} \leq x_1 < x_2 \leq \frac{\pi}{2}$, положим $u_1 = x_1 + \frac{\pi}{2}$ и $u_2 = x_2 + \frac{\pi}{2}$, получим $0 \leq u_1 < u_2 \leq \pi$. Составим разность $\sin x_2 - \sin x_1$:

$$\sin x_2 - \sin x_1 = -\cos u_2 + \cos u_1 = -(\cos u_2 - \cos u_1) > 0$$

(в силу убывания функции $\cos u$ на сегменте $[0, \pi]$), откуда следует возрастание функции $\sin x$ на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Теорема. Во всяком интервале $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ (изображающемся правой либо левой открытой полуокружностью) функция $\operatorname{tg} x$ возрастает от $-\infty$ до ∞ .

Таким образом, функция $\operatorname{tg} x$ возрастает от $-\infty$ до ∞ во всяком интервале, из которых состоит ее область определения.

Доказательство. В силу периодичности тангенса достаточно доказать теорему лишь для интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, равного по длине периоду тангенса.

Требуется установить нижеследующие положения.

1°. В интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ функция $\operatorname{tg} x$ возрастает.

В самом деле,

$$\operatorname{tg} x_2 - \operatorname{tg} x_1 = \frac{\sin(x_2 - x_1)}{\cos x_2 \cos x_1}.$$

Если $-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$, то $0 < x_2 - x_1 < \pi$, а потому

$$\sin(x_2 - x_1) > 0, \quad \cos x_2 > 0, \quad \cos x_1 > 0,$$

и следовательно, $\operatorname{tg} x_2 - \operatorname{tg} x_1 > 0$, т. е. $\operatorname{tg} x$ возрастает.

2°. Каково бы ни было действительное число m , в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ существует точка c , в которой функция $\operatorname{tg} x$ принимает значение m .

В самом деле, в § 12 установлено, что $c = \operatorname{arc} \operatorname{tg} m$.

3°. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} \operatorname{tg} x = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}+} \operatorname{tg} x = -\infty$ *.

Это положение является следствием 1° и 2°. Для доказательства $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} \operatorname{tg} x = \infty$ надо установить следующее. Пусть $N > 0$ — произвольное заданное (как угодно большое) число; существует число ξ такое, что $\xi < \frac{\pi}{2}$ и в интервале $\left(\xi, \frac{\pi}{2}\right)$ выполняется неравенство $\operatorname{tg} x > N$. В самом деле, поставленному условию удовлетворяет число $\xi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} N$ **. В силу возрастания тангенса имеем в интервале $\xi < x < \frac{\pi}{2}$:

$$\operatorname{tg} x > \operatorname{tg} \xi = N.$$

Далее, в интервале $-\frac{\pi}{2} < x < -\xi$ имеем $\operatorname{tg} x < \operatorname{tg}(-\xi) = -\operatorname{tg} \xi = -N$, следовательно, $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}+} \operatorname{tg} x = -\infty$.

$$x \rightarrow -\frac{\pi}{2} +$$

Изложенное доказательство пояснено геометрически на чертеже 86.

Полученные результаты можно представить следующей таблицей:

Значения аргумента x	...	$-\frac{3}{2}$	$< x <$	$-\frac{\pi}{2}$	$< x <$	$\frac{\pi}{2}$	$< x <$	$\frac{3}{2} \pi$	$< x <$	$\frac{5}{2} \pi$	...
Функция $y = \operatorname{tg} x$	...	$+\infty$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $-\infty$	...

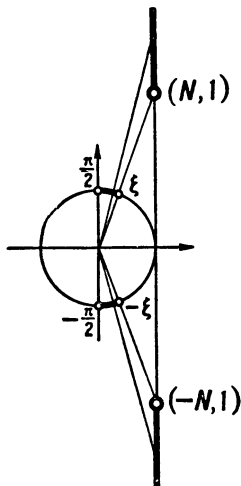
Примечание. Распространенное утверждение, что «тангенс есть возрастающая функция» или «тангенс всегда возрастает», ошибочно. Во всей области определения тангенс

* Символы $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} \operatorname{tg} x$ и $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}+} \operatorname{tg} x$ обозначают односторонние пределы.

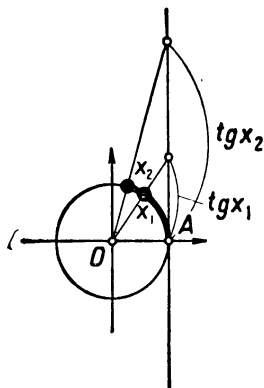
Первый предел, левый, вычисляется в предположении, что $x < \frac{\pi}{2}$, второй предел, правый, вычисляется в предположении, что $x > -\frac{\pi}{2}$.

** А также всякое число, большее ξ , но меньшее $\frac{\pi}{2}$.

не обладает свойством монотонности. В самом деле, возьмем, например, следующие значения аргумента: $0, \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi$; имеем $0 < \frac{\pi}{4} < \frac{3}{4}\pi$ и вместе с тем $\operatorname{tg} 0 < \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$, а $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} > \operatorname{tg} \frac{3}{4}\pi$; этого не может быть для монотонной функции.



Черт. 86



Черт. 87

Интервалы монотонности тангенса можно установить геометрически. На чертеже 87 показано геометрически возрастание тангенса на полусегменте $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Можно также исходить из равенства $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

Рассмотрим, например, $\operatorname{tg} x$ на полусегменте $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$; при $0 \leq x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$ имеем $0 \leq \sin x_1 < \sin x_2$ и $\cos x_1 > \cos x_2 > 0$, откуда

$$\frac{\sin x_1}{\cos x_1} < \frac{\sin x_2}{\cos x_2} \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} x_1 < \operatorname{tg} x_2.$$

Теорема. Во всяком интервале $(k\pi, (k+1)\pi)$ (изображающемся верхней либо нижней открытой полуокружностью) функция $\operatorname{ctg} x$ убывает от ∞ до $-\infty$.

Таким образом, функция $\operatorname{ctg} x$ убывает от ∞ до $-\infty$ во всяком интервале, из которых состоит ее область определения.

Доказательство. В силу периодичности котангенса достаточно доказать теорему лишь для интервала $(0, \pi)$ равного по длине периоду котангенса.

Доказательство аналогично доказательству соответствующих свойств функции $\operatorname{tg} x$.

1°. В интервале $(0, \pi)$ функция $\operatorname{ctg} x$ убывает.

Это следует из неравенства

$$\operatorname{ctg} x_2 - \operatorname{ctg} x_1 = -\frac{\sin(x_2 - x_1)}{\cos x_2 \cos x_1} < 0,$$

где

$$0 < x_1 < x_2 < \pi.$$

2°. Каково бы ни было действительное число m , в интервале $(0, \pi)$ существует число $c = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} m$ такое, что $\operatorname{ctg} c = m$.

3°. $\lim_{x \rightarrow 0+} \operatorname{ctg} x = \infty$ и $\lim_{x \rightarrow \pi-} \operatorname{ctg} x = -\infty$.

В самом деле, неравенство $\operatorname{ctg} x > N$ выполняется в интервале $(0, \operatorname{arc} \operatorname{ctg} N)$, а неравенство $\operatorname{ctg} x < -N$ — в интервале $(\pi - \operatorname{arc} \operatorname{ctg} m, \pi)$.

Предоставляем учащимся геометрически установить интервалы монотонности котангенса.

Наибольшие и наименьшие значения. Проведенное выше исследование тригонометрических функций на монотонность позволяет во многих случаях элементарными средствами находить наибольшие и наименьшие значения функций, заданных выражениями, содержащими тригонометрические операции.

Так, например, выше установлено, что 1 и -1 суть наибольшее и наименьшее значения функций $\cos x$ и $\sin x$; отсюда следует, что функция $y = a \cos x + b$ (или $a \sin x + b$) имеет наибольшее и наименьшее значения, равные

$$y_{\max} = b + |a| \quad \text{и} \quad y_{\min} = b - |a|.$$

Функция $y = a \sin x + b \cos x$ введением вспомогательного аргумента, преобразуется к виду

$$y = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \alpha).$$

Наименьшее и наибольшее ее значения равны

$$y_{\min} = -\sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{и} \quad y_{\max} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Следовательно, имеют место неравенства

$$-\sqrt{a^2 + b^2} \leq a \sin x + b \cos x \leq \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Примеры на отыскание наибольших и наименьших значений приведены ниже.

Примеры.

1. Установить промежутки монотонности функции $|\cos x|$.

Решение. На всяком сегменте $\left[\frac{\pi}{2} + k\pi, (k+1)\pi\right]$ (II и IV четверти), на которых $\cos x$ возрастает от 0 до 1 или убывает от 0 до -1 , функ-

ция $|\cos x|$ возрастает от 0 до 1. На всяком сегменте $\left[k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$ (I и III четверти), на котором $\cos x$ убывает от 1 до 0 или возрастает от -1 до 0, функция $|\cos x|$ убывает от 0 до 1. Наибольшие и наименьшие значения суть $y_{\max} = 1$, $y_{\min} = 0$.

2. Определить промежутки монотонности функции $f(x) = \sin 2x$.

Решение. Функция периодическая, с периодом π , ибо

$$\sin 2(x + \pi) = \sin (2x + 2\pi) = \sin 2x.$$

Введем промежуточный аргумент u , положив: $f(x) = \sin u$, $u = 2x$. На сегменте $-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$ функция $\sin u$ возрастает от -1 до 1. Этому сегменту соответствует сегмент $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$. Аналогично сегменту $\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{3}{2}\pi$ соответствует сегмент $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}\pi$, на котором функция убывает от 1 до -1 . Эти сегменты охватывают полный период функции.

Изложенные результаты можно представить в виде следующей таблицы:

Аргумент x	...	$-\frac{3\pi}{4}$	$<x<$	$-\frac{\pi}{4}$	$<x<$	$\frac{\pi}{4}$	$<x<$	$\frac{3\pi}{4}$	...
Промежуточ- ный аргумент $u = 2x$	...	$-\frac{3}{2}\pi$	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	$\frac{3\pi}{2}$	...
Функция $y = \sin u$	...	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	...

3. Установить промежутки монотонности функции $y = \sin(\cos x)$.

Решение. Функция периодическая, с периодом 2π установим промежутки монотонности в пределах одного периода. На сегменте $0 \leq x \leq \pi$ промежуточный аргумент u убывает от 1 до -1 ; в соответствии с этим y убывает от $\sin 1 \approx 0,84$ до $\sin(-1) \approx -0,84$.

На сегменте $-\pi \leq x \leq 0$ функция возрастает от $\sin(-1)$ до $\sin 1$. Наибольшие и наименьшие значения суть

$$y_{\max} = \sin 1, \quad y_{\min} = -\sin 1.$$

Аргумент x	...	$-\pi$	$<x<$	0	$<x<$	π	$<x<$	2π	...
Промежуточ- ный аргумент $u = \cos x$	...	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	...
Функция $y = \sin u$	...	$-\sin 1$	$\nearrow$	$\sin 1$	$\searrow$	$-\sin 1$	$\nearrow$	$\sin 1$	...

4. Установить промежутки монотонности функции

$$y = \operatorname{tg} \sqrt{x}$$

Решение. Формула, определяющая функцию, имеет смысл при неотрицательных значениях x . Из промежутка $0 \leq x < +\infty$ следует исключить значения x , при которых тангенс теряет смысл. Эти значения определяются из условия $\sqrt{x} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, откуда $x = \left(\frac{2k+1}{2}\pi\right)^2$. Введем промежуточный аргумент, положив

$$y = \operatorname{tg} u; \quad u = \sqrt{x}; \quad x = u^2$$

Область определения данной функции состоит из бесконечного множества интервалов

$$\left(0, \frac{\pi^2}{4}\right), \left(\frac{\pi^2}{4}, \frac{9\pi^2}{4}\right), \dots, \left(\frac{(2k-1)^2\pi^2}{4}, \frac{(2k+1)^2\pi^2}{4}\right), \dots$$

Эти интервалы являются промежутками возрастания, имеем:

Аргумент x	0	$< x <$	$\frac{\pi^2}{4}$	$< x <$	$\frac{9\pi^2}{4}$	$< x <$	$\frac{25\pi^2}{4}$	...
Промежуточный аргумент $u = \sqrt{x}$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{3\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{5\pi}{2}$	...
Функция $y = \operatorname{tg} u$	0	$\nearrow$	$+\infty$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $-\infty$	...

5. Доказать, что уравнение

$$\sin x = \cos x$$

на сегменте $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ имеет единственный корень.

Решение. При $x = \frac{\pi}{4}$ значения синуса и косинуса равны $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Кроме $\frac{\pi}{4}$ данное уравнение не может на сегменте $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ иметь никакого другого корня. В самом деле, разность $\sin x - \cos x$ на сегменте $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ возрастает, ибо уменьшаемое возрастает, а вычитаемое убывает, следовательно, равенство $\sin x - \cos x = 0$ может выполняться лишь при единственном значении аргумента.

6 Установить промежутки монотонности функции

$$y = \operatorname{tg}^2 x.$$

Решение. Имеем

$$y = u^2, \quad u = \operatorname{tg} x.$$

На всяком промежутке вида $k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi$, на котором $u = \operatorname{tg} x$ возрастает от 0 до $+\infty$, функция $y = u^2$ возрастает от 0 до $+\infty$. На всяком промежутке вида $-\frac{\pi}{2} + k\pi \leq x < k\pi$, на котором $u = \operatorname{tg} x$ возрастает от $-\infty$ до 0, функция $y = u^2$ убывает от ∞ до 0.

Наименьшее значение $y_{\min} = 0$, наибольшее значение $y_{\max}$ не существует.

7. Найти наибольшее значение периметра прямоугольного треугольника, имеющего данную гипотенузу.

Решение. Периметр прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна c , а острый угол равен α , выражается формулой

$$2p = c + c \cos \alpha + c \sin \alpha = c \left[1 + \sqrt{2} \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) \right].$$

Наибольшее значение периметра $p = c (1 + \sqrt{2})$ реализуется для равнобедренного прямоугольного треугольника, $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

8. Снаряд вылетел из орудия с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту. Вычислить угол α , при котором дальность полета является наибольшей (сопротивление воздуха не принимается во внимание).

Решение. Рассмотрим параметрические уравнения траектории снаряда (черт. 88)

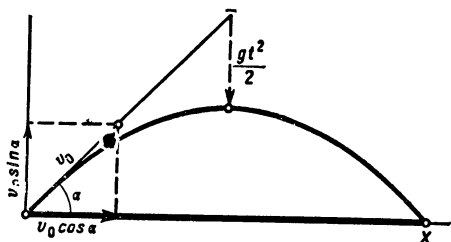
$$x = tv_0 \cos \alpha, \quad y = tv_0 \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

(где время t — параметр). Время полета снаряда есть положительный корень уравнения $y = 0$, откуда $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$. Дальность полета равна

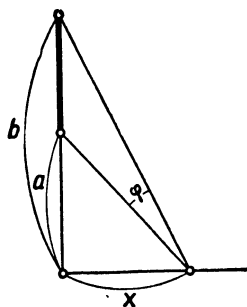
$$x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Из смысла задачи ясно, что достаточно считать α острым углом $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Дальность полета является наибольшей, если $x = \frac{\pi}{4}$; имеем: $x_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$.



Черт. 88



Черт. 89

9. Картина повешена на стену так, что ее нижний край на a м, а верхний край на b м выше глаза наблюдателя. На каком расстоянии x

от стены должен стать наблюдатель, чтобы картина была видна под наибольшим углом.

Решение. Из чертежа 89 найдем тангенс угла зрения φ :

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{b}{x} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a}{x} \right) = \frac{\frac{b}{x} - \frac{a}{x}}{1 + \frac{ab}{x^2}} = \frac{b-a}{x + \frac{ab}{x}} \quad (x > 0, a > 0, b > 0).$$

Так как $\operatorname{tg} \varphi$ — возрастающая функция аргумента φ , то наибольшее значение φ имеет место при наибольшем значении $\operatorname{tg} \varphi$. Наибольшее значение $\operatorname{tg} \varphi$ имеет место при том значении x , при котором $x + \frac{ab}{x}$ имеет наименьшее значение. При данном произведении

$$x \cdot \frac{ab}{x} = ab$$

сумма $x + \frac{ab}{x}$ имеет наименьшее значение, если

$$x = \frac{ab}{x}, \quad \text{откуда} \quad x = \sqrt{ab}.$$

10. Найти наименьшее и наибольшее значения однородного тригонометрического трехчлена второй степени

$$y = a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x$$

Решение. Выразим трехчлен через тригонометрические функции двойного аргумента

$$\begin{aligned} y &= \frac{a}{2}(1 - \cos 2x) + \frac{b}{2} \sin 2x + \frac{c}{2}(1 + \cos 2x) = \\ &= \frac{a+c}{2} + \frac{1}{2} [(c-a) \cos 2x + b \sin 2x]. \end{aligned}$$

Наибольшее и наименьшее значения выражения, заключенного в квадратные скобки, суть

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 2ac} \quad \text{и} \quad -\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 2ac};$$

следовательно,

$$\begin{aligned} y_{\max} &= \frac{a+c + \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 2ac}}{2}, \\ y_{\min} &= \frac{a+c - \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 2ac}}{2}. \end{aligned}$$

11. При каких значениях параметра m уравнение

$$\sin^2 x - \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = m$$

имеет решения?

Решение. Однородный тригонометрический трехчлен, находящийся в левой части, имеет следующие наибольшее и наименьшее значения (см. предыдущий пример) $\frac{-1 - \sqrt{10}}{2}$ и $\frac{-1 + \sqrt{10}}{2}$.

Следовательно, чтобы уравнение имело решение необходимо и достаточно, чтобы значение m принадлежало сегменту

$$\frac{-1 - \sqrt{10}}{2} \leq m \leq \frac{-1 + \sqrt{10}}{2}.$$

12. Найти наибольшее и наименьшее значения произведения

$$y = \cos^p x \sin^q x$$

на сегменте $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, где p и q — данные положительные рациональные числа.

Решение. Примем во внимание основное тождество

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

и обозначим $\cos^2 x = u$, $\sin^2 x = v$, тогда получим:

$$y = u^{\frac{p}{2}} v^{\frac{q}{2}}; \quad u + v = 1.$$

Но, как известно из алгебры (см. «Специальный курс элементарной алгебры», § 60), произведение y при заданной сумме аргументов u и v имеет наибольшее значение, если

$$\frac{2u}{p} = \frac{2v}{q} \quad \text{или} \quad u = \lambda \frac{p}{2}, \quad v = \lambda \frac{q}{2},$$

где λ — коэффициент пропорциональности, который определяется из условия:

$$\frac{\lambda p}{2} + \frac{\lambda q}{2} = 1, \quad \text{откуда} \quad \lambda = \frac{2}{p+q}.$$

Выполнив подстановку, получим:

$$u = \frac{p}{p+q}, \quad v = \frac{q}{p+q}, \quad \cos x = \sqrt{\frac{p}{p+q}}, \quad \sin x = \sqrt{\frac{q}{p+q}},$$

$$x = \arccos \sqrt{\frac{p}{p+q}}, \quad y_{\max} = \sqrt{\frac{p^p q^q}{(p+q)^{p+q}}}.$$

Наименьшее значение $y_{\min} = 0$, при $x = 0$ и $x = \frac{\pi}{2}$.

Следовательно, на сегменте $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ имеют место неравенства

$$0 \leq \cos^p x \sin^q x \leq \sqrt{\frac{p^p q^q}{(p+q)^{p+q}}}.$$

13. Найти наименьшее значение выражения

$$y = \operatorname{tg}^p x + \operatorname{ctg}^q x$$

в интервале $0 < x < \frac{\pi}{2}$, где p и q — положительные рациональные числа.

Решение, аналогичное решению предыдущей задачи. Положим $u = \operatorname{tg}^p x$, $v = \operatorname{ctg}^q x$; сумма $y = u + v$ при данном произведении $u^{\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{q}} = 1$

имеет наименьшее значение. если $pu = qv = \lambda$; откуда $u = \frac{\lambda}{p}$, $v = \frac{\lambda}{q}$ и $\lambda = (p^q q^p)^{\frac{1}{p+q}}$ и, следовательно,

$$y_{\min} = \lambda \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) = \frac{p+q}{pq} (p^q q^p)^{\frac{1}{p+q}}.$$

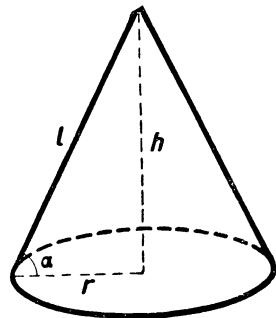
14. Найти конус (прямой, круговой) наибольшего объема, имеющий данную образующую l (черт. 90).

Решение. Пусть α — угол образующей с основанием конуса; имеем

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi l^3}{3} \cos^2 \alpha \sin \alpha.$$

Наибольшее значение V равно (положить $p = 2$, $q = 1$) (см пример 12)

$$V_{\max} = \frac{\pi l^3}{3} \sqrt{\frac{2^2 \cdot 1}{3^3}} = \frac{2\pi l^3}{9\sqrt{3}};$$



Черт. 90

при этом

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \sin \alpha = \sqrt{\frac{1}{3}}, \quad r = l \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad h = \frac{l}{\sqrt{3}}.$$

15. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = \sin^2 x + p \sin x + q$$

на сегменте $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Решение. Положим $t = \sin x$; тогда задача сведется к нахождению наибольшего и наименьшего значений квадратного трехчлена

$$y = t^2 + pt + q \quad \text{на сегменте} \quad -1 \leq t \leq 1.$$

Этот трехчлен в интервале $-\infty < t < +\infty$ имеет наименьшее значение

$$y_{\min} = -\frac{p^2 - 4q}{4} \quad \text{при} \quad t = -\frac{p}{2};$$

в интервале $(-\infty, -\frac{p}{2})$ трехчлен убывает, а в интервале $(-\frac{p}{2}, +\infty)$ — возрастает. Возможны следующие три случая.

Случай 1°. $-\frac{p}{2} \leq -1$, т. е. $p \geq 2$. В этом случае на сегменте $-1 \leq t \leq 1$ трехчлен возрастает, следовательно, наименьшее значение функция $f(x)$ имеет в точке $x = -\frac{\pi}{2}$, а наибольшее — в точке $x = \frac{\pi}{2}$ (при $t = \pm 1$).

$$f_{\min} = 1 - p + q, \quad f_{\max} = 1 + p + q.$$

С л у ч а й 2°. $-\frac{p}{2} \geq 1$, т. е. $p \leq -2$. В этом случае на сегменте $-1 \leq t \leq 1$ трехчлен убывает, следовательно, наименьшее значение $f(x)$ имеет в точке $x = \frac{\pi}{2}$, а наибольшее — в точке $x = -\frac{\pi}{2}$;

$$f_{\min} = 1 + p + q, \quad f_{\max} = 1 - p + q.$$

С л у ч а й 3°. $-2 < p < 2$. В этом случае наименьшее значение функции $f(x)$ имеет в точке $x = -\arcsin \frac{p}{2}$:

$$f_{\min} = f\left(-\arcsin \frac{p}{2}\right) = -\frac{p^2 - 4q}{4}.$$

Наибольшим значением $f(x)$ является большее из граничных значений $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ и $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, т. е. $f_{\max} = 1 + |p| + q$.

§ 30. Непрерывность тригонометрических функций

Теорема. Каждая из тригонометрических функций непрерывна в любой точке, принадлежащей ее области определения.

Справедливость теоремы вытекает из общей теоремы математического анализа о непрерывности монотонной функции. Эта теорема сформулирована во введении (см. § 5, стр. 26).

Непрерывность тригонометрических функций можно установить из непосредственного вычисления их приращений, таким способом непрерывность тригонометрических функций обычно доказывается в общих курсах математического анализа.

Ниже приводится геометрическое доказательство непрерывности тригонометрических функций, основанное на их интерпретации при помощи единичного круга.

Ф у н к ц и я $\cos x$. Областью определения косинуса является множество всех действительных чисел; требуется доказать, что функция $\cos x$ непрерывна при любом значении аргумента. Пусть a — произвольно заданное значение аргумента; надо доказать, что приращение косинуса по абсолютной величине меньше любого заданного (как угодно малого) числа $\varepsilon > 0$

$$|\cos x - \cos a| < \varepsilon$$

при условии, что приращение аргумента по абсолютной величине меньше некоторого числа δ

$$|x - a| < \delta$$

(число δ определяется заданием ε).

Предположим сначала, что точка, изображающая значение аргумента a , не совпадает с концами горизонтального диаметра единичного круга $a \neq k\pi$. Возьмем число ε настолько малым, чтобы обе точки $\cos a - \varepsilon$ и $\cos a + \varepsilon$ помещались внутри интервала $(-1, 1)$ оси OX , т. е. $|\cos a \pm \varepsilon| < 1$.

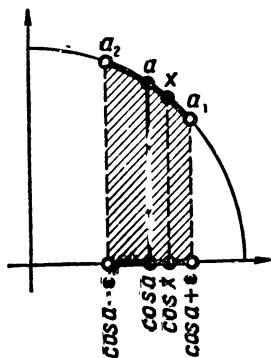
Рассмотрим точки a_1 и a_2 , лежащие на той же полуокружности (верхней или нижней), на которой лежит точка a (черт. 91), и проектирующиеся в точки $\cos a + \varepsilon$ и $\cos a - \varepsilon$ (соответственно). Обозначим через δ длину наименьшей из дуг a_1a и aa_2 . При всех значениях аргумента, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, соответствующая точка единичной окружности лежит на дуге, ограниченной точками a_1 и a_2 , а потому проектируется на ось абсцисс внутрь отрезка, ограниченного точками $\cos a - \varepsilon$ и $\cos a + \varepsilon$, и следовательно,

$$|\cos x - \cos a| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |x - a| < \delta.$$

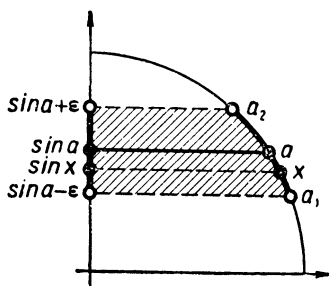
Если точка a на единичной окружности совпадает с концом горизонтального диаметра, например, с точкой $A(1, 0)$, то в этом случае $\cos a = 1$

$$|\cos x - \cos a| = 1 - \cos x < \varepsilon,$$

если $|x - a| < \delta$, где достаточно положить $\delta = \arccos(1 - \varepsilon)$.



Черт. 91



Черт. 92

Ф у н к ц и я $\sin x$. Областью определения синуса является множество всех действительных чисел; требуется доказать, что функция $\sin x$ непрерывна при любом значении аргумента. Доказательство проводится точно так же, как и для функции $\cos x$, с той лишь разницей, что проектирование следует производить не на ось абсцисс, а на ось ординат (черт. 92). Провести подробно рассуждения предоставляем учащимся в виде упражнения.

Итак, *будучи непрерывными в каждой точке, функции $\sin x$ и $\cos x$ непрерывны в интервале $-\infty < x < +\infty$.*

Ф у н к ц и я $\operatorname{tg} x$. Требуется доказать, что функция $\operatorname{tg} x$ непрерывна в каждом из интервалов $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$.

Рассмотрим сначала интервал $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Пусть a — данное значение аргумента в интервале $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Возьмем на оси танген-

сов три точки $\operatorname{tg} a - \varepsilon$, $\operatorname{tg} a$ и $\operatorname{tg} a + \varepsilon$ и соединим эти точки с началом координат: пусть a_1 , a и a_2 — соответствующие точки единичной окружности. Пусть δ — длина наименьшей из дуг aa_1 и aa_2 . Если $|x - a| < \delta$, то точка x лежит на дуге $a_1 a_2$, а соответствующая точка $\operatorname{tg} x$ лежит на оси тангенсов в интервале $(\operatorname{tg} a - \varepsilon, \operatorname{tg} a + \varepsilon)$, т. е.

$$|\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a| < \varepsilon, \text{ если } |x - a| < \delta.$$

Следовательно, функция $\operatorname{tg} x$ непрерывна в $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Будучи периодической с периодом π , функция $\operatorname{tg} x$ непрерывна в любом интервале $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$.

Ф у н к ц и я $\operatorname{ctg} x$. Непрерывность котангенса устанавливается аналогично, ч. т. д.

Функция $\operatorname{tg} x$ не является непрерывной в интервале $(-\infty, +\infty)$; в самом деле, точки $\frac{\pi}{2} + k\pi$ не принадлежат ее области определения и в окрестности каждой из этих точек функция неограничена, так как

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi} |\operatorname{tg} x| = +\infty.$$

Следовательно, точки $\frac{\pi}{2} + k\pi$ являются точками разрыва тангенса.

Для котангенса точками разрыва служат точки $k\pi$; в окрестности каждой из этих точек котангенс неограничен, так как

$$\lim_{x \rightarrow k\pi} |\operatorname{ctg} x| = +\infty.$$

Теорему о непрерывности тригонометрических функций иначе можно сформулировать следующим образом.

Если число a принадлежит области определения тригонометрической функции, то предел тригонометрической функции в точке a равен ее значению в этой точке, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \cos x &= \cos a, & \lim_{x \rightarrow a} \sin x &= \sin a, \\ \lim_{x \rightarrow a} \operatorname{tg} x &= \operatorname{tg} a, & \lim_{x \rightarrow a} \operatorname{ctg} x &= \operatorname{ctg} a. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Пределы различных выражений, содержащих тригонометрические функции, находятся на основании соотношений (1) и общих теорем теории пределов об операциях над пределами (теоремы о пределе суммы, произведения, частного, сложной функции и т. д.).

Примеры.

1. Найти

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin x + \cos x}{1 - \operatorname{tg} x}.$$

Решение. По общим правилам теории пределов найдем:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin x + \cos x}{1 - \operatorname{tg} x} = \frac{\lim \sin x + \lim \cos x}{1 - \lim \operatorname{tg} x} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}(1 + \sqrt{3})}{2(\sqrt{3} - 1)} = \frac{\sqrt{3}}{2} (2 + \sqrt{3}).$$

2. Функция

$$\frac{\operatorname{tg} x}{1 - 2 \sin x}$$

разрывна в точках, в которых:

a) $\operatorname{tg} x$ теряет смысл, откуда $x = \frac{2k+1}{2}\pi$;

b) $1 - 2 \sin x = 0$, откуда $\sin x = \frac{1}{2}$ и $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi$.

Во всех остальных точках, будучи частным непрерывных функций, данная функция непрерывна.

3. Функция

$$y = \sin x^2$$

непрерывна в любой точке, так как она может быть представлена в виде сложной функции

$$y = \sin u, \quad u = x^2,$$

непрерывной от промежуточного аргумента u , а аргумент u есть непрерывная функция от x (в силу теоремы о непрерывности сложной функции).

**П р и н ц и п п р о д о л ж е н и я п о н е п р е р ы в н о с т и ,
о с о б ы е з н а ч е н и я а р г у м е н т а**

В математическом анализе принцип продолжения по непрерывности в общем виде формулируется следующим образом:

Если при $x = a$ функция $f(x)$ не определена и, таким образом $f(a)$ не имеет смысла, но конечный предел $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ в точке a существует, то принято значение $x = a$ включать в область определения функции, при этом считается

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

Принцип продолжения по непрерывности заключается в замене функции $f(x)$ функцией, совпадающей с нею при всех допустимых значениях аргумента $x \neq a$ и непрерывной в точке a .

Если функция $f(x)$ имеет предел в точке a , то этот предел является единственным, а потому продолжение функции по непрерывности возможно лишь единственным образом (если только оно возможно), независимо от способа, которым выполнялось отыскание предела.

В тригонометрии принцип продолжения по непрерывности применяется к функциям, заданным при помощи формулы, содержащей тригонометрические операции над аргументом. Если при подстановке в формулу значения $x = a$ формула теряет смысл, такое значение аргумента в дальнейшем будем называть **о с о б ы м**, то исследуют (по общим правилам), имеет ли

данное выражение предел в точке a ; этот предел (если он существует и конечен) рассматривается как значение данного выражения в точке $x = a$.

Применение принципа продолжения по непрерывности позволяет во многих практически важных случаях производить сокращение дробных выражений на общие функциональные множители числителя и знаменателя. Пусть, например, функции $F_1(x)$, $F_2(x)$ и $\varphi(x)$ определены в некоторой окрестности точки a и непрерывны в этой точке, причем $\varphi(a) = 0$, $F_2(a) \neq 0$ и $\varphi(x) \neq 0$ в некоторой окрестности точки a (кроме точки a). В этом случае выражение

$$U(x) = \frac{\varphi(x) F_1(x)}{\varphi(x) F_2(x)}$$

при подстановке $x = a$ теряет смысл. Выражение

$$V(x) = \frac{F_1(x)}{F_2(x)}$$

равно (во всяком случае в некоторой окрестности точки a) выражению $U(x)$ при значениях $x \neq a$ и не теряет смысла в точке $x = a$. Применим принцип продолжения по непрерывности; имеем:

$$U(a) = \lim_{x \rightarrow a} U(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x) F_1(x)}{\varphi(x) F_2(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{F_1(x)}{F_2(x)} = \frac{F_1(a)}{F_2(a)} = V(a).$$

Следовательно, равенство

$$\frac{\varphi(x) F_1(x)}{\varphi(x) F_2(x)} = \frac{F_1(x)}{F_2(x)}$$

имеет место при всех значениях x (во всяком случае в некоторой окрестности точки a), чем обосновывается возможность сокращения числителя и знаменателя на общий множитель $\varphi(x)$.

Примечание. В курсе средней школы, обычно из педагогических соображений, отк а з ы в а ю т с я от применения принципа продолжения по непрерывности. Как бы методика ни решала этот вопрос, ни при каких обстоятельствах недопустимо наивное протаскивание всякого рода «раскрытия» неопределенностей», нахождения «истинных значений» и т. п., как чего-то очевидного «само по себе».

Примеры.

1. Равенство

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$$

считалось первоначально справедливым при всех значениях x , при которых обе функции $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ имеют смысл. Принцип продолжения по непрерывности позволяет не и с к л ю ч а т ь из рассмотрения значения $x = k\pi$, при которых $\operatorname{ctg} x$ теряет смысл. В самом деле, при $x = k\pi$ значение левой части равно 0, значение правой части также равно 0, ибо

$$\lim_{x \rightarrow k\pi} x \frac{1}{\operatorname{ctg} x} = 0 \quad (\text{так как } \lim_{x \rightarrow k\pi} |\operatorname{ctg} x| = +\infty).$$

2. Для выражения

$$U(x) = \frac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} - \frac{\sin x + \cos x}{\operatorname{tg}^2 x - 1}$$

особыми значениями являются следующие значения x , при которых

$$a) \sin x = \cos x, \quad \text{откуда } x = \frac{\pi}{4} + k\pi;$$

$$b) \operatorname{tg} x = \pm 1, \quad \text{откуда } x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi;$$

$$c) \operatorname{tg} x \text{ теряет смысл, откуда } x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Выполнив тождественные преобразования, получим (см. пример 6, стр. 63)

$$\frac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} - \frac{\sin x + \cos x}{\operatorname{tg}^2 x - 1} = \sin x + \cos x.$$

Правая часть этого тождества непрерывна при произвольном действительном значении x , при этом

$$\lim_{x \rightarrow a} U(x) = \sin a + \cos a;$$

значит, для вычисления $U(a)$ достаточно положить в правой части $x = a$. Так, в частности,

$$U\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}, \quad U\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad U\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

3. Равенство

$$\frac{1}{a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c}$$

при $a \neq 0$ справедливо также и при значениях $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, особых для правой части. В самом деле, при $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ левая часть непрерывна и имеет значение, равное $\frac{1}{a}$. Следовательно, это же значение является пределом правой части и, согласно принципу продолжения по непрерывности оно является также и значением правой части в рассматриваемых особых точках.

Примечание. То же самое получится, если находить предел правой части непосредственно:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c} = \lim_{|z| \rightarrow +\infty} \frac{1 + z^2}{az^2 + bz + c} = \frac{1}{a}.$$

При $a = 0$ в точках $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ правая и левая части теряют смысл и так как

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi} \left| \frac{1}{b \sin x \cos x + c \cos^2 x} \right| = +\infty,$$

то в этих точках данное выражение не имеет никакого значения (принцип продолжения неприменим).

4. Исследовать особые значения аргумента для функции, заданной формулой

$$f(x) = \frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{\cos x + \operatorname{ctg} x}.$$

Особыми значениями аргумента являются значения, изображающиеся концами горизонтального и концами вертикального диаметров:

а) точки $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (концы вертикального диаметра) не принадлежат области определения $f(x)$, так как

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi} |f(x)| = +\infty;$$

б) точки $x = k\pi$ (концы горизонтального диаметра) следует включить в область определения $f(x)$, ибо

$$f(k\pi) = \lim_{x \rightarrow k\pi} f(x) = \lim_{x \rightarrow k\pi} \frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{\cos x + \operatorname{ctg} x} = 0.$$

5. Для функции, заданной формулой

$$P(x) = \left(\sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}} - \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}} \right) \left(\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} - \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}} \right)$$

(см. пример 11, стр. 67), точки $k\frac{\pi}{2}$ (изображающиеся концами горизонтального и вертикального диаметров) не принадлежат области определения. В самом деле, эти точки суть точки разрыва 1-го рода (см. черт. 67), а потому $\lim_{x \rightarrow k\frac{\pi}{2}} P(x)$ не существует.

$$x \rightarrow k\frac{\pi}{2}$$

6. Рассмотрим тождество

$$\lg \sin^2 x = 2 \lg \sin x.$$

Левая часть, рассматриваемая в отдельности, имеет смысл в интервалах $(k\pi, (k+1)\pi)$

Правая часть, рассматриваемая в отдельности, имеет смысл в интервалах $(2k\pi, (2k+1)\pi)$, в которых $\sin x > 0$. Рассмотрим произвольную точку, в которой $\sin x < 0$; положим, например, $x = \frac{3}{2}\pi$. В этой точке левая часть имеет смысл, а правая часть смысла не имеет. В данном случае принцип продолжения правой части по непрерывности неприменим. В самом деле, предел $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}\pi} \lg \sin x$ не имеет смысла, ибо не только точка $\frac{3}{2}\pi$, но и некоторая ее окрестность не принадлежит области определения функции $\lg \sin x$.

7. Значение функции

$$y = x \sin \frac{1}{x}$$

равно 0 в точке $x = 0$. В самом деле, согласно принципу продолжения по непрерывности,

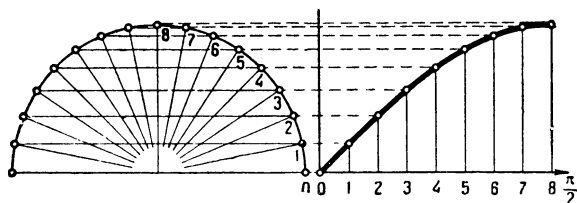
$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

(множитель x имеет предел равный нулю, а второй множитель $\sin \frac{1}{x}$ ограничен).

§ 31. Графики тригонометрических функций

Для построения графика тригонометрической функции достаточно выполнить построение на каком-либо сегменте, охватывающем период данной функции, и затем периодически продолжить построенный график. Если выполнено построение графика в первой четверти, то, пользуясь известными свойствами тригонометрических функций, можно выполнить построение графика и в других четвертях.

С и н у с о и д а (обыкновенная) — так называется линия, являющаяся графиком функции: $y = \sin x$ в интервале $(-\infty, +\infty)$. Рассмотрим функцию $\sin x$ на сегменте $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$; на этом сегменте она возрастает от 0 до 1. Для уточнения формы линии можно вос-



Черт. 93

пользоваться известными значениями синуса (см. § 10). Для более точного построения графика следует воспользоваться таблицами значений тригонометрических функций. Построение графика можно выполнить геометрически с любой степенью точности. Это пояснено на чертеже 93. Первая четверть единичной окружности и отрезок $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ разделены на одинаковое количество равных частей (на чертеже 93 на 8 частей). Перпендикуляры, опущенные из концов точек деления дуги на ось абсцисс (т. е. значения синуса), снесены в виде ординат, восстановленных из соответствующих точек отрезка $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Концы построенных отрезков принадлежат линии. Во второй четверти синус убывает от 1 до 0. В точках x и $\pi - x$, расположенных на единичной окружности симметрично относительно оси ординат, значения синуса равны:

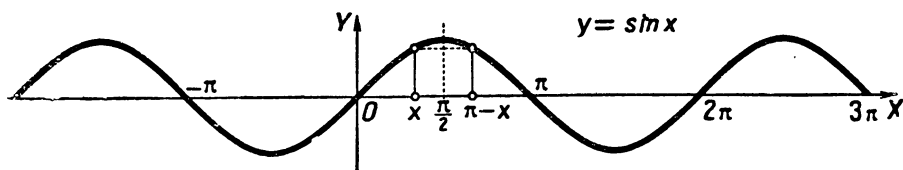
$$\sin x = \sin(\pi - x).$$

Следовательно, график синуса во второй четверти симметричен графику в первой четверти относительно параллели оси ординат, проходящей через точку $(\frac{\pi}{2}, 0)$. Из свойства нечетности синуса $\sin(-x) = -\sin x$ следует, что синусоида симметрична относительно начала координат. Построив график на сегменте $0 \leq x \leq \pi$ и

продолжив его по нечетности на сегмент $-\pi \leq x \leq 0$, получим график на сегменте $-\pi \leq x \leq \pi$, охватывающем полный период синуса. Для дальнейшего построения синусоиды достаточно последовательно продолжить по периодичности полученную линию на сегменты

$$[\pi, 3\pi], [3\pi, 5\pi], \dots, [-3\pi, -\pi], [-5\pi, -3\pi], \dots$$

(черт. 94).



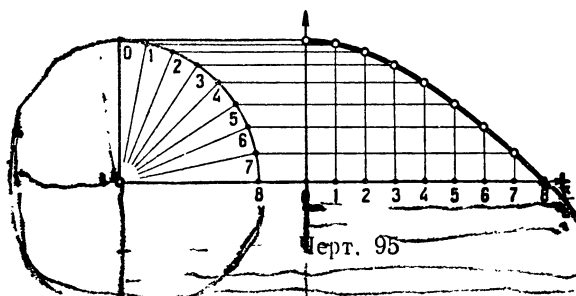
Черт. 94

Примечание. На сегменте $[0, \pi]$ функция $y = \sin x$ вогнута (см. «Специальный курс элементарной алгебры», § 58, стр. 205—208). В самом деле, при $0 \leq x_1 < x_2 \leq \pi$ имеем

$$\frac{\sin x_1 + \sin x_2}{2} = \sin \frac{x_1 + x_2}{2} \cos \frac{x_2 - x_1}{2} < \sin \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

График функции $y = \cos x$ можно построить непосредственно. Характер линии ясен из известных свойств косинуса: функция $\cos x$ на сегменте $[0, \frac{\pi}{2}]$ убывает от 1 до 0, а на сегменте $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ убывает от 0 до -1 . График симметричен относительно оси ординат, так как функция $\cos x$ является четной. Для

уточнения линии следует воспользоваться таблицей значений косинуса. Можно выполнить построение линии геометрически тем же способом, каким была построена синусоида, при этом, в силу тождества $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$,

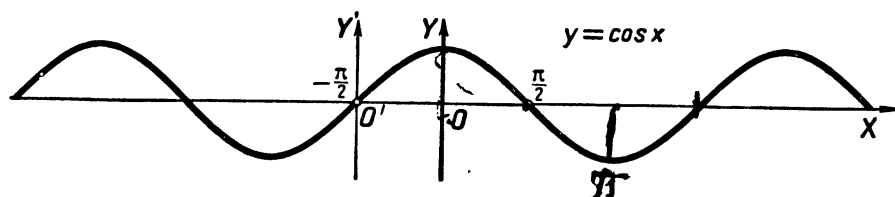


перенос ординат можно производить так, как показано на чертеже 95.

Из тождества $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$ следует, что графиком функций $\sin x$ и

$$y = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$

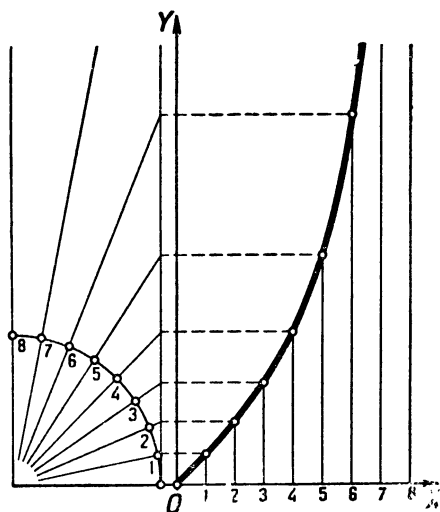
является одна и та же линия — синусоида. Именно, график функции $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ есть синусоида, смещенная влево в направлении оси абсцисс на расстояние $\frac{\pi}{2}$. В самом деле, положив $x = x' - \frac{\pi}{2}$, построим синусоиду $y = \sin x'$; перейти к искомому графику можно, если уменьшить абсциссу на величину $\frac{\pi}{2}$, а соответствующую ординату оставить без изменения (черт. 96).



Черт. 96

Тангенсоида — так называется график функции $y = \operatorname{tg} x$. На полусегменте $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ тангенс возрастает от 0 до $+\infty$, следовательно, график имеет вертикальную асимптоту $x = \frac{\pi}{2}$. Для уточнения графика следует воспользоваться известными значениями тангенса, а также тригонометрическими таблицами. Построение с какой угодно степенью точности можно выполнить геометрически следующим образом. Достаточно разделить первую четверть тригонометрического круга и промежуток $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ на некоторое (одинаковое) количество равных частей и перенести линии тангенса в качестве ординат, восстановленных в соответствующих точках, как показано на чертеже 97.

Из свойства нечетности тангенса следует симметричность линии относительно начала координат; таким образом, для построения графика в промежутке $-\frac{\pi}{2} < x \leq 0$ достаточно график, построенный в промежутке $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ продолжить по нечетности

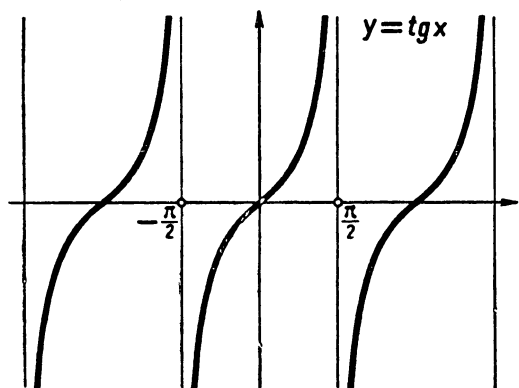


Черт. 97

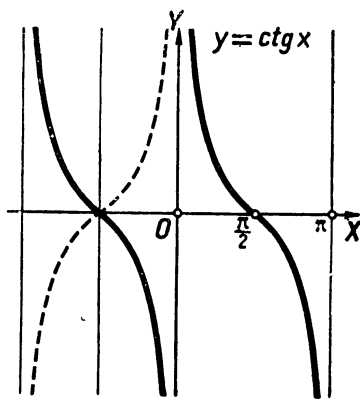
(симметрично относительно начала координат). Построив график в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ и продолжив его периодически (с периодом π), получим представленную на чертеже 98 линию.

Построение графика функции $y = \operatorname{ctg} x$ на основе известных свойств котангенса предоставляем учащимся.

Тождество $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ показывает, что для построения графика котангенса достаточно сместить тангенсоиду влево на расстояние $\frac{\pi}{2}$ и отразить ее симметрично, как в зеркале, относительно оси абсцисс (черт. 99, пунктиром помечена ветвь тангенсоиды).



Черт. 98



Черт. 99

Примечание. В промежутке $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ функция $\operatorname{tg} x$ выпукла (см. «Специальный курс элементарной алгебры», § 58, стр. 205).

Пусть $0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$, неравенство

$$\frac{\operatorname{tg} x_1 + \operatorname{tg} x_2}{2} > \operatorname{tg} \frac{x_2 + x_1}{2}$$

эквивалентно следующему:

$$\operatorname{tg} x_2 - \operatorname{tg} \frac{x_2 + x_1}{2} > \operatorname{tg} \frac{x_2 + x_1}{2} - \operatorname{tg} x_1$$

и далее

$$\frac{\sin \frac{x_2 - x_1}{2}}{\cos x_2 \cos \frac{x_2 + x_1}{2}} > \frac{\sin \frac{x_2 - x_1}{2}}{\cos x_1 \cos \frac{x_2 + x_1}{2}}.$$

Сократив последнее неравенство на положительные множители, получим очевидное неравенство $\frac{1}{\cos x_2} > \frac{1}{\cos x_1}$.

§ 32. Простейшие тригонометрические неравенства

Простейшим тригонометрическим неравенством называется неравенство вида

$$f(x) \vee m, \quad (f)$$

где $f(x)$ — данная тригонометрическая функция. В силу периодичности тригонометрических функций, достаточно найти множество всех решений неравенства (f) в пределах какого-либо промежутка, охватывающего полный период данной функции.

Рассмотрим простейшие тригонометрические неравенства.

1°. Неравенство $\cos x > m$.

Если $m < -1$, то решением служит произвольное действительное число: $-\infty < x < +\infty$, так как при всех значениях аргумента $\cos x \geq -1 > m$.

Если $m \geq 1$, то неравенство не имеет решений.

Пусть $-1 \leq m < 1$; рассмотрим функцию $\cos x$ на сегментах $[0, \pi]$ и $[-\pi, 0]$, составляющих в сумме ее период. На сегменте $[0, \pi]$ функция $\cos x$ убывает, при $x = \arccos m$ имеет место равенство $\cos x = m$, следовательно, если $0 \leq x < \arccos m$, то $\cos x > m$, если же $\arccos m < x \leq \pi$, то $\cos x < m$.

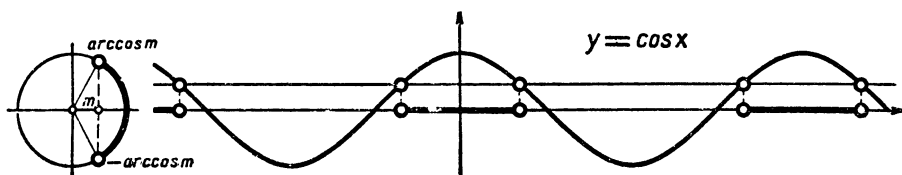
На сегменте $[-\pi, 0]$ неравенство $\cos x > m$ выполняется в промежутке $-\arccos m < x \leq 0$.

Следовательно, на сегменте $[-\pi, \pi]$ неравенство выполняется в интервале

$$-\arccos m < x < \arccos m.$$

Общим решением служит бесконечное множество интервалов

$$(-\arccos m + 2k\pi, \arccos m + 2k\pi).$$



Черт. 100

На чертеже 100 показано графическое решение неравенства. Параллель оси ординат, проведенная через точку $(m, 0)$, отсекает от единичной окружности дугу (справа), точки которой имеют абсциссы большие, чем m .

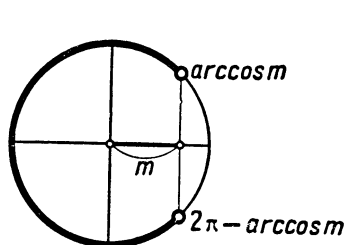
Неравенство $\cos x < m$ выполняется на дуге единичной окружности, дополнительной к дуге $-\arccos m < x < \arccos m$ (черт. 101). В пределах одной окружности эту дополнительную дугу можно задать, например, таким неравенством:

$$\arccos m < x < 2\pi - \arccos m.$$

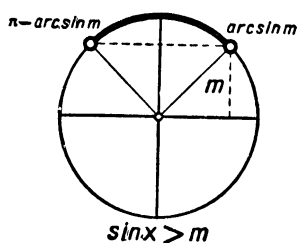
Общее решение состоит из бесконечного множества интервалов:

$$(\arccos m + 2k\pi, -\arccos m + 2(k+1)\pi).$$

2°. Простейшее неравенство $\sin x > m$. Аналогично предыдущему, получим (черт. 102):



Черт. 101



Черт. 102

$m < -1$	$-1 \leq m < 1$	$m \geq 1$
интервал ($-\infty, \infty$)	Множество интервалов $\arcsin m + 2k\pi < x < (\pi - \arcsin m) + 2k\pi$	нет решений

Неравенство $\sin x < m$ (где $-1 < m < 1$) выполняется на дуге, дополнительной к дуге $\arcsin m < x < \pi - \arcsin m$, эту дугу можно задать неравенствами

$$-\pi - \arcsin m < x < \arcsin m.$$

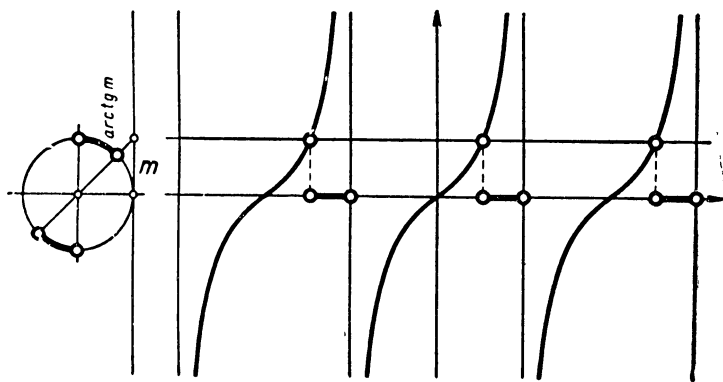
3. Простейшее неравенство $\operatorname{tg} x > m$ (где m — произвольное действительное число) в правой полуокружности выполняется (в силу возрастания тангенса) в интервале $\arctan m < x < \frac{\pi}{2}$.

Общим решением служит бесконечное множество интервалов:

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} m + k\pi < x < \frac{(2k+1)\pi}{2}, \quad (\text{черт. 103}).$$

Примеры.

1. Неравенство	Общее решение
a) $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$
b) $\sin x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{2}{3}\pi + 2k\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$
c) $\cos x < -\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}\pi + 2k\pi < x < \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$
d) $\operatorname{tg} x > 2$	$\operatorname{arc} \operatorname{tg} 2 + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$
e) $\sin x < \sin 0,3$	$-0,3 + (2k-1)\pi < x < 0,3 + 2k\pi$
f) $\operatorname{ctg} x > \sqrt{3}$	$k\pi < x < \frac{\pi}{6} + k\pi$



Черт. 103

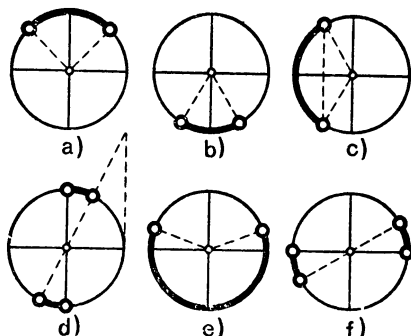
На чертеже 104 показаны дуги единичной окружности, на которых выполняются эти неравенства.

2. Установить область определения функции

$$y = \sqrt{\sin x - \frac{1}{2}}.$$

Решение. Область определения находится из условия

$$\sin x - \frac{1}{2} \geq 0 \quad \text{или} \quad \sin x \geq \frac{1}{2},$$



Черт. 104

откуда получим бесконечное множество сегментов $\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right]$.

§ 33. Неравенства, содержащие аргумент и его тригонометрические функции

В настоящем параграфе будут рассмотрены основные неравенства, связывающие аргумент и значения тригонометрических функций от этого аргумента.

1. При всех действительных значениях x имеет место неравенство

$$|\sin x| \leq |x|; \quad (1)$$

равенство имеет место при единственном значении $x = 0$.

Иными словами, синус по абсолютной величине не превосходит аргумент.

Доказательство. Если $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то неравенство выполняется, так как длина половины хорды BB_1 единичной окружности (черт. 105), т. е. $\sin x$ меньше длины половины стягиваемой ею дуги, т. е. x (где x — радианная мера дуги AB). Итак, при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ имеем $0 < \sin x < x$.

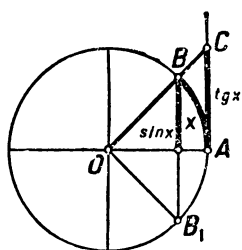
Если $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, то длина половины дуги и полухорды выразится числами $|x|$ и $|\sin x|$, в этом случае неравенство также очевидно.

Если $|x| > \frac{\pi}{2}$, то подавно $|\sin x| < |x|$, так как $\frac{\pi}{2} > 1$, а $|\sin x| \leq 1$.

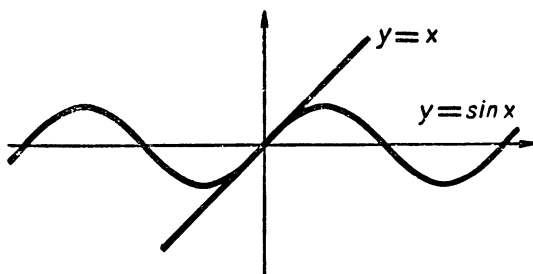
Итак, неравенство (1) имеет место (строго) при всех значениях $x \neq 0$. При $x = 0$ имеет место равенство, ч. т. д.

Графическая интерпретация. Так как при $x > 0$ имеем $\sin x < x$, а при $x < 0$ имеем $x < \sin x$, то в правой координатной полуплоскости ($x > 0$) синусоида расположена ниже биссектрисы координатного угла $y = x$, а в левой полуплоскости ($x < 0$) выше этой биссектрисы (черт. 106).

2. В интервале $0 < x < \frac{\pi}{2}$ имеет место неравенство

$$x < \operatorname{tg} x. \quad (2)$$


Черт. 105



Черт. 106

Доказательство. В самом деле, треугольник OAC (см. черт. 105) содержит круговой сектор OAB единичного круга, следовательно, пл. сект. $OAB < \text{пл. } \triangle OAC$.

Имеем

$$\text{пл. сект. } OAB = \frac{1}{2} x OA^2 = \frac{x}{2}$$

и

$$\text{пл. } \triangle OAC = \frac{1}{2} OA \cdot AC = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x,$$

откуда следует неравенство (2), ч. т. д.

На чертеже 107 представлена графическая интерпретация неравенства (2).

Следствия: 1°. В интервале $0 < x < \frac{\pi}{2}$ имеет место система неравенств

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

2°. При $|x| \neq 0$ имеет место неравенство $|x| < |\operatorname{arc} \sin x|$. Это неравенство получится, если в неравенстве $|\sin y| < |y|$ положить $y = \operatorname{arc} \sin x$ (где $-1 \leq x \leq 1$).

3°. При всех значениях x имеет место неравенство

$$1 - \cos x \leq \frac{x^2}{2} \quad \text{или} \quad 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x, \quad (3)$$

равенство при $x = 0$.

Доказательство. В самом деле,

$$0 \leq 1 - \cos x < 2 \sin^2 \frac{x}{2},$$

но в силу (1) имеем: $\sin^2 \frac{x}{2} \leq \frac{x^2}{4}$, откуда следует неравенство (3), ч. т. д.

Графическая интерпретация. Линия $y = \cos x$ заключена между прямой $y = 1$ и параболой $y = 1 - \frac{x^2}{2}$ (черт. 108).

4°. В интервале $(0, \pi)$ имеет место неравенство:

$$x - \frac{x^3}{4} < \sin x. \quad (4)$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \sin x &= 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = \\ &= 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \left(1 - \sin^2 \frac{x}{2}\right). \end{aligned}$$

В силу неравенств (1) и (2)

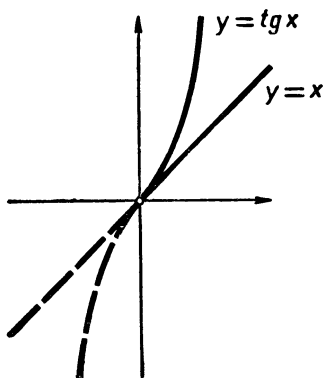
$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} > \frac{x}{2} \quad \text{и} \quad \sin^2 \frac{x}{2} < \frac{x^2}{4},$$

откуда $\sin x > x \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)$, ч. т. д.

Графическая интерпретация. Из неравенств $x - \frac{x^3}{4} < \sin x < x$ следует, что в окрестности точки 0 синусоида заключена между прямой $y = x$ и параболой 3-й степени $y = x - \frac{x^3}{4}$ (черт. 109).

5°. В интервале $(0, \pi)$ имеют место неравенства

$$\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}. \quad (5)$$



Черт. 107

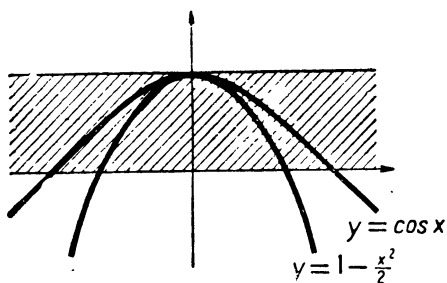
Доказательство. Имеем:

$$\begin{aligned}\cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) &= \frac{x^2}{2} - (1 - \cos x) = \\ &= \frac{x^2}{2} - 2\sin^2 \frac{x}{2} = 2\left[\frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}\right]\left[\frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}\right].\end{aligned}$$

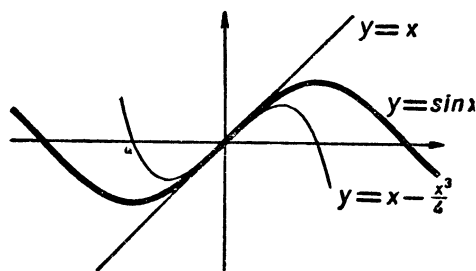
В силу (4) и (1) получим следующее неравенство, эквивалентное (5):

$$\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} < 2 \cdot \frac{x^3}{32} \cdot \frac{2 \cdot x}{2} = \frac{x^4}{16},$$

ч. т. д.



Черт. 108



Черт. 109

Доказанные неравенства

$$x - \frac{x^3}{4} < \sin x < x, \quad 1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}$$

имеют многочисленные применения в приближенных вычислениях.

Так, в частности, приближенное равенство $\sin x \approx x$ имеет место для малых углов с ошибкой, меньшей чем $\frac{x^3}{4}$, приближенное равенство $\cos x \approx 1$ (для малых углов) с ошибкой, меньшей чем $\frac{x^2}{2}$; и, наконец, $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ с ошибкой, меньшей чем $\frac{x^4}{16}$.

Эти приближенные равенства широко применяются при составлении тригонометрических таблиц (подробнее см. ниже § 71).

Приближенная замена синуса малого угла его радианной мерой применяется в физике, например, при выводе формулы периода качания математического маятника.

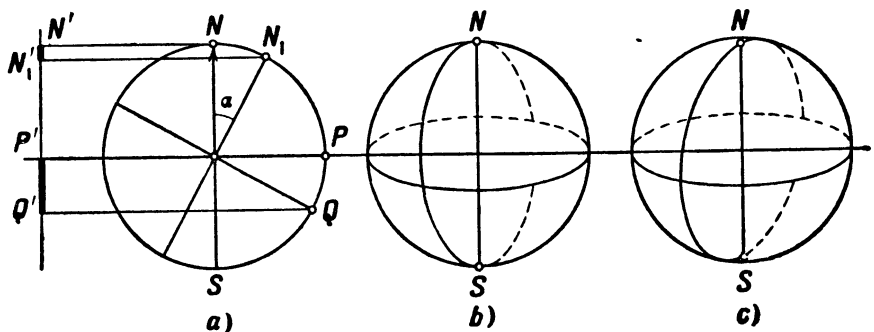
Установленные неравенства служат обоснованием возможности применения в графике упрощенных, приближенно вер-

ных изображений. Поясним последнее следующим примером. На чертеже 110, а изображено ортогональное проектирование шара на плоскость. При малом отклонении плоскости экватора от горизонтальной плоскости смещение $P'Q'$ точки P экватора равно $\sin \alpha$ (радиус шара считаем равным 1) или $P'Q' = \alpha$ с ошибкой, меньшей чем $\frac{\alpha^3}{4}$. Смещение же $N'N_1$ полюса от абриса равно $1 - \cos \alpha$ с ошиб-

кой, меньшей чем $\frac{\alpha^2}{2}$, — это смещение можно считать равным нулю.

Так, например, при $\alpha = 15^\circ$ имеем (по четырехзначным таблицам) $\alpha = 0,2618$ (радиан), $P'Q' = \sin \alpha = 0,2588$, $N_1'N' = 1 - \cos \alpha = 0,0341$, $\frac{N'N_1'}{P'Q'} = 0,1318$.

При $\alpha = 10^\circ$ получим $\frac{N'N_1'}{P'Q'} = 0,0876$.



Черт. 110

Этими расчетами обосновывается возможность при малых углах наклона α в целях упрощения чертежа прибегать к п р и б л и ж е н н о в е р н ы м изображениям (черт. 110, b — полюс шара изображен на абрисе), на чертеже 110, c представлено верное изображение.

Доказанные неравенства позволяют вычислить некоторые замечательные пределы, имеющие широкое применение в математическом анализе. Так, например, из неравенств (при малых значениях $|x|$)

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < \frac{x^2}{4} \quad \text{и} \quad |1 - \cos x| - \frac{x^2}{2} < \frac{x^4}{16}$$

следует, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Примечание. Доказанные в настоящем параграфе, а также аналогичные более точные неравенства без труда могут быть установлены применением аппарата степенных рядов (см. ниже § 80).

Ряд неравенств более точных, чем (1) — (5), может быть установлен элементарными средствами при помощи применения различных искусственных приемов. Ниже приведен пример применения таких искусственных приемов.

Примеры.

1. Доказать, что на сегменте $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ имеют место неравенства

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}. \quad (6)$$

Доказательство. 1°. Воспользуемся тождеством

$$3^n \sin \frac{x}{3^n} - 4 \left(\sin^3 \frac{x}{3} + 3 \sin^3 \frac{x}{3^2} + \dots + 3^{n-1} \sin^3 \frac{x}{3^n} \right) = \sin x$$

(см. § 25, пример 10, стр. 137).

В силу равенства (4)

$$3^n \sin \frac{x}{3^n} \geq 3^n \left(\frac{x}{3^n} - \frac{x^3}{4 \cdot 3^{3n}} \right) = x - \frac{x^3}{4 \cdot 3^{2n}}.$$

В силу неравенства (1) имеем:

$$\begin{aligned} & \sin^3 \frac{x}{3} + 3 \sin^3 \frac{x}{3^2} + \dots + 3^{n-1} \sin^3 \frac{x}{3^n} \leq \\ & \leq x^3 \left(\frac{1}{3^3} + \frac{3}{3^6} + \dots + \frac{3^{n-1}}{3^{3n}} \right) = \frac{x^3}{27} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{2n-2}} \right) \ll \\ & \leq \frac{x^3}{27} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{2n-2}} + \dots \right) = \frac{x^3}{27} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{9}} \right) = \frac{x^3}{3 \cdot 8}. \end{aligned}$$

Подставив в тождество, получим неравенство

$$x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{4 \cdot 3^{2n}} \leq \sin x.$$

Так как n — произвольное натуральное число, то получим в пределе

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{4 \cdot 3^{2n}} \right) = x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x.$$

2°. По доказанному при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ имеем:

$$0 < x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x^*,$$

* Неравенство $x - \frac{x^3}{6} = x \left(1 - \frac{x^2}{6} \right) > 0$ выполняется в интервале $0 < x < \sqrt{6}$ и, в частности, в интервале $\left(0, \frac{\pi}{2} \right)$.

а также

$$0 < \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^3 \cdot 6} \leq \sin \frac{x}{2}, \quad (a)$$

$$0 < \frac{x}{4} - \frac{x^3}{2^6 \cdot 6} \leq \sin \frac{x}{4}.$$

Возведя почленно последнее неравенство в квадрат, получим:

$$\frac{x^2}{2^4} - \frac{x^4}{3 \cdot 2^8} + \frac{x^6}{2^{14} \cdot 3^2} \leq \sin^2 \frac{x}{4},$$

откуда и подавно

$$0 \leq \frac{x^2}{2^4} - \frac{x^4}{3 \cdot 2^8} \leq \sin^2 \frac{x}{4}. \quad (b)$$

Перемножив почленно неравенства (a) и (b), получим:

$$\frac{x^3}{2^5} - \frac{x^5}{2^9} \leq \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^3 \cdot 6} \right) \left(\frac{x^2}{2^4} - \frac{x^4}{3 \cdot 2^8} \right) < \sin \frac{x}{2} \sin^2 \frac{x}{4}. \quad (c)$$

Приняв во внимание тождество

$$\sin \frac{x}{2} \sin^2 \frac{x}{4} = \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin x$$

и неравенства (c), получим:

$$\sin x \leq 2 \sin \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^8} + \frac{x^5}{2^7}. \quad (6_1)$$

Аналогично имеем:

$$\sin \frac{x}{2} \leq 2 \sin \frac{x}{4} - \frac{x^3}{2^3 \cdot 8} + \frac{x^5}{2^7 \cdot 2^5}; \quad (6_2)$$

$$\sin \frac{x}{4} \leq 2 \sin \frac{x}{8} - \frac{x^3}{2^6 \cdot 8} + \frac{x^5}{2^7 \cdot 4^5}; \quad (6_3)$$

$$\sin \frac{x}{2^{n-1}} \leq \sin \frac{x}{2^n} - \frac{x^3}{2^3 (n-1) 8} + \frac{x^5}{2^5 (n-1) 2^7} \quad (6_n)$$

Умножив неравенства (6₁) — (6_n) соответственно на 1, 2, 3, 4, ..., 2ⁿ⁻¹ и просуммировав, получим

$$\sin x \leq 2^n \sin \frac{x}{2^n} - \frac{x^3}{8} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^{n-1}} \right) + \frac{x^5}{2^7} \left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \dots + \frac{1}{2^{4n-4}} \right).$$

Просуммировав прогрессии, получим:

$$\sin x \leq 2^n \sin \frac{x}{2^n} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{6 \cdot 4^n} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^5}{120 \cdot 2^{4n}}.$$

Приняв во внимание неравенство $2^n \sin \frac{x}{2^n} < x$ и осуществив переход к пределу (при $n \rightarrow +\infty$), получим неравенство

$$\sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

Ч т д.

2. При $0 < x < \frac{\pi}{2}$ имеет место неравенство

$$x + \frac{x^3}{3} < \operatorname{tg} x$$

Доказательство. Имеем в силу неравенств (5) и (6)

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} > \frac{x - \frac{x^3}{6}}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}}.$$

Так как при $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$$\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}\right) \left(x + \frac{x^3}{3}\right) = x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{48}(5 - x^2) < x - \frac{x^3}{6},$$

то

$$\frac{x - \frac{x^3}{6}}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}} > x + \frac{x^3}{3},$$

откуда (и подавно) следует неравенство (7), ч. т. д.

3. Доказать, что при $|x| < \sqrt{2m}$ имеет место неравенство

$$\cos^m \frac{x}{m} > 1 - \frac{x^2}{2m - x^2},$$

где m — произвольное натуральное число.

Доказательство. В силу неравенств (1) $\sin^2 \frac{x}{2m} < \frac{x^2}{4m^2}$, воспользовавшись последним неравенством, получим:

$$\begin{aligned} \cos^m \frac{x}{m} &= \left(1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2m}\right)^m > \left(1 - \frac{x^2}{2m^2}\right)^m = \\ &= 1 - m \left(\frac{x^2}{2m^2}\right) + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{x^2}{2m^2}\right)^2 - \dots + \\ &+ (-1)^k \frac{m(m-1) \dots (m-k+1)}{k!} \left(\frac{x^2}{2m^2}\right)^k + \dots + \\ &+ (-1)^m \frac{m(m-1) \dots (m-m+1)}{m!} \left(\frac{x^2}{2m^2}\right)^m > \\ &> 1 - \frac{m}{1} \frac{x^2}{2m^2} - m^2 \left(\frac{x^2}{2m^2}\right)^2 - \dots - m^k \left(\frac{x^2}{2m^2}\right)^k - m^m \left(\frac{x}{2m}\right)^m > \\ &> 1 - \frac{x^2}{2m} \left[1 + \frac{x^2}{2m} + \dots + \left(\frac{x^2}{2m}\right)^k + \dots\right]. \end{aligned}$$

Просуммировав геометрическую прогрессию (сходящуюся при $|x| < \sqrt{2m}$), получим

$$\cos^m \frac{x}{m} > 1 - \frac{x^2}{2m \left(1 - \frac{x^2}{2m}\right)} = 1 - \frac{x^2}{2m - x^2},$$

ч. т. д.

§ 34. Гармонические колебания

В математике простым гармоническим или синусоидальным колебанием называется всякая функция (а также график) вида

$$y = A \sin(\omega x + \alpha),$$

где $A \neq 0$, $\omega > 0^*$.

Теорема. *Функция $y = A \sin(\omega x + \alpha)$ является периодической с наименьшим положительным периодом $\frac{2\pi}{\omega}$.*

Доказательство. Достаточно применить способ, изложенный в § 27 (стр. 151). Если число $T \neq 0$ есть период данной функции, то имеет место тождество

$$A \sin[\omega(x + T) + \alpha] \equiv A \sin(\omega x + \alpha)$$

или

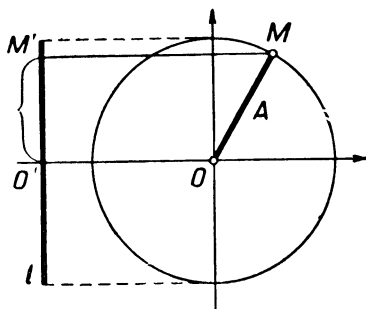
$$2A \cos\left(\omega x + \alpha + \frac{\omega T}{2}\right) \sin \frac{\omega T}{2} \equiv 0.$$

Последнее тождество выполняется в том и только в том случае, если $\sin \frac{\omega T}{2} = 0$, откуда $T = \frac{2k\pi}{\omega}$. Наименьшим положительным периодом является число $\frac{2\pi}{\omega}$, ч. т. д.

Простейшее гармоническое колебание с заданным периодом T можно представить в виде

$$y = A \sin\left(\frac{2\pi x}{T} + \alpha\right).$$

В физике и технике гармонические колебания играют важную роль в изучении периодических процессов, как, например, распространение волн, движение механизма паровой машины, сила и напряжение переменного электрического тока и т. п.



Черт. 111

Функция $A \sin(\omega x + \alpha)$ имеет следующую кинематическую интерпретацию. Рассмотрим отрезок OM длины A , вращающийся вокруг своего конца O с постоянной угловой скоростью ω . Следовательно, точка M равномерно движется по окружности радиуса A . Проекция M' точки M на некоторую прямую l (на черт. 111 прямая l изображена в вертикальном положении) совершает гармоническое коле-

* Предположение, что $\omega > 0$ не нарушает общности, так как случай $\omega < 0$ можно свести к предыдущему $A \sin(\omega x + \alpha) = -A \sin(-\omega x - \alpha)$. Случай $\omega = 0$ исключается, ибо тогда $y = \text{const}$.

бательное движение. В самом деле, пусть O' — проекция на прямую l точки O , α (начальная фаза) — угол, образованный начальным положением радиуса с горизонтальным диаметром. За промежуток времени x (от начального момента) подвижной радиус опишет угол ωx и будет образовывать с горизонтальным диаметром угол, равный $\omega x + \alpha$. Отклонение y точки M' от точки O' выразится формулой

$$y = A \sin(\omega x + \alpha).$$

Точка M' совершает периодическое (с периодом $\frac{2\pi}{\omega}$) колебательное движение на отрезке $[-A, A]$ оси l . Наибольшее отклонение вверх (вниз) от точки O достигается в моменты времени x , при которых $\sin(\omega x + \alpha) = 1$ (соответственно -1), откуда

$$\omega x + \alpha = \frac{4k+1}{2} \pi \quad \left(\text{соответственно } \frac{4k-1}{2} \right)$$

и

$$x = \frac{(4k+1)\pi - 2\alpha}{2\omega} \quad \left(\text{соответственно } x = \frac{(4k-1)\pi - 2\alpha}{2\omega} \right).$$

Тригонометрический двучлен

$$y = a \sin \omega x + b \cos \omega x,$$

где хотя бы одно из чисел a и b отличны от нуля: $|a| + |b| \neq 0$, есть гармоническое колебание. В самом деле (см. § 24, стр. 124), если ввести вспомогательный угол α , определяемый условиями

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

то получим

$$y = A \sin(\omega x + \alpha), \quad \text{где } A = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Рассмотрим некоторые частные виды гармонических колебаний и их графики.

1°. Ф у н к ц и я $y = A \sin x$.

Если $A > 0$, то данная функция имеет те же промежутки возрастания и убывания, что и $\sin x$, наибольшее значение $A \sin x$ есть A , а наименьшее $-A$. График получается растяжением обыкновенной синусоиды $y = \sin x$ в A раз от оси абсцисс *. При $A < 0$ следует выполнить растяжение от оси абсцисс в $|A|$ раз и зеркальное отражение в оси абсцисс. Число $|A|$ называется а м п л и т у д о й, или

* При $A < 1$ соответствующее растяжение принято называть с ж а т и е м

Так растяжение в $\frac{1}{2}$ раз есть сжатие в 2 раза.

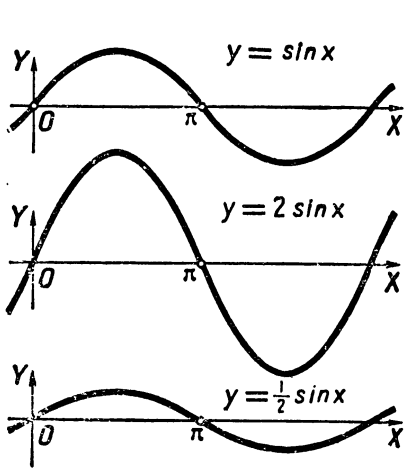
«размахом» синусоиды, а рассматриваемое преобразование называется также преобразованием амплитуды.

На чертеже 112 представлены графики функций

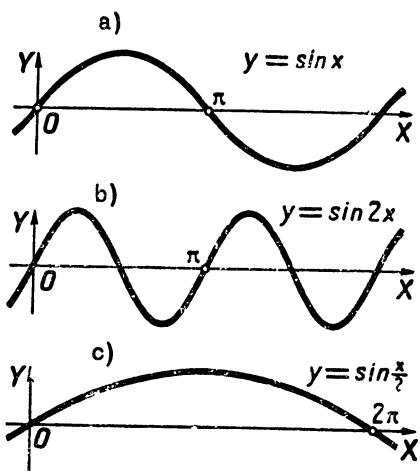
$$y = \sin x, \quad y = 2 \sin x, \quad y = \frac{1}{2} \sin x.$$

2°. Ф у н к ц и я $y = \sin(x + \alpha)$.

График данной функции получается из обыкновенной синусоиды параллельным переносом начала координат в точку $O'(-\alpha, 0)$. Число α называется н а ч а л ь н о й ф а з о й, а рассматриваемое преобразование синусоиды — с д в и г о м ф а з ы.



Черт. 112



Черт. 113

3°. Ф у н к ц и я $y = \sin \omega x$, где $\omega > 0$, — периодическая с наименьшим положительным периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

График получается при помощи растяжения обыкновенной синусоиды в $\frac{1}{\omega}$ раз от оси ординат (или при помощи сжатия в ω раз). В самом деле, если обыкновенную синусоиду (в системе координат $X'OY$) $y = \sin x'$ подвергнуть растяжению в $\frac{1}{\omega}$ раз, положив $x = \frac{1}{\omega} x'$, то получим (в системе XOY) $y = \sin \omega x$. Это преобразование называется также преобразованием периода.

На чертеже 113 представлены синусоиды: а) обыкновенная, б) сжатая к оси ординат в два раза: $y = \sin 2x$ (период $T = \pi$),

с) растянутая от оси ординат в два раза: $y = \sin \frac{x}{2}$ (период $T = 4\pi$).

Выбрав подходящим образом коэффициент растяжения $\frac{1}{\omega}$, можно получить синусоиду с любым заданным периодом T . Так, например, при $\omega = \frac{1}{2\pi}$ получим синусоиду $y = \sin 2\pi x$ с периодом, равным 1. В пределах одного периода функция $\sin \omega x$ имеет следующие промежутки монотонности: на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2\omega}, \frac{\pi}{2\omega}\right]$ она возрастает от -1 до 1, а на сегменте $\left[\frac{\pi}{2\omega}, \frac{3\pi}{2\omega}\right]$ она убывает от 1 до -1 ; при этом

$$y_{\max} = 1 \text{ при } x = \frac{\pi}{2\omega} + \frac{2k\pi}{\omega}; \quad y_{\min} = -1 \text{ при } x = -\frac{\pi}{2\omega} + \frac{2k\pi}{\omega}.$$

При переходе от одной системы измерения углов (дуг) к другой тригонометрические функции претерпевают преобразование периода. Пусть угол e_1 принятый за новую единицу измерения, измеряется в старой единице e числом k :

$$e_1 = ke,$$

тогда угол, измеряющийся в старой системе измерения числом x , в новой системе будет измеряться числом $x' = \frac{x}{k}$. Следовательно, функция $\sin x$ преобразуется в функцию $\sin kx'$, что равносильно преобразованию периода.

В частности, если за единицу измерения принять не радиан, а градус, то получим

$$x = \frac{\pi}{180} x',$$

где x и x' — радианная и градусная меры дуги, а потому

$$y = \sin x = \sin \frac{\pi}{180} x'$$

Следовательно, график синуса, начерченный при градусной системе измерения получается из обыкновенной синусоиды растяжением от оси ординат в $\frac{180}{\pi}$ раз.

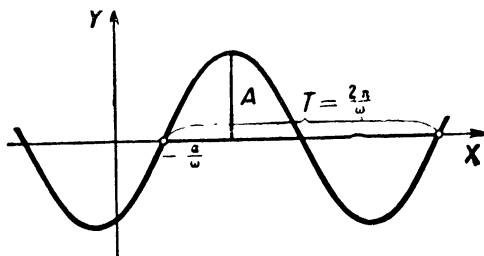
Рассмотрим гармоническое колебание в общем виде

$$y = A \sin(\omega x + \alpha).$$

График этой функции получается из обыкновенной синусоиды

$$Y = \sin X \tag{1}$$

путем последовательного выполнения рассмотренных простейших преобразований (черт. 114).



Черт. 114

В самом деле, имеем

$$y = A \sin \omega \left(x + \frac{\alpha}{\omega} \right).$$

Эту функцию можно получить, выполнив последовательно над обыкновенной синусоидой (1) следующие простейшие преобразования:

1. $X = \omega x'$, $Y = \sin \omega x'$ (преобразование периода),

2. $x' = x + \frac{\alpha}{\omega}$, $Y = \sin(\omega x + \alpha)$

(перенос начала координат в точку $-\frac{\alpha}{\omega}$, т. е. сдвиг фазы).

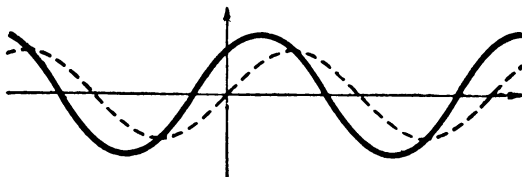
3. $y = AY$; $y = A \sin(\omega x + \alpha)$ (преобразование амплитуды).

Примеры.

1. На чертеже 125 представлен график функции

$$y = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$$

(пунктиром намечена обыкновенная синусоида).



Черт. 115

2. Исследовать на монотонность функцию $y = \cos^2 x$, построить ее график.

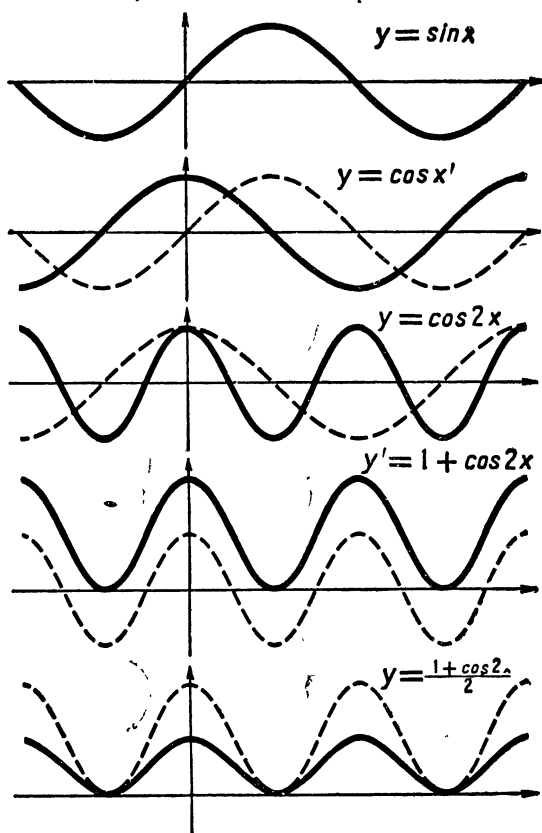
Решение. Имеем

$$y = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x).$$

Функция периодическая с периодом π . На сегменте $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ убывает от 1 до 0, а на сегменте $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ возрастает от 0 до 1. График можно получить из обыкновенной синусоиды путем следующих преобразований:

- а) $y = \sin X$, $X = x' + \frac{\pi}{2}$ (сдвиг фазы);
- б) $Y = \cos x'$, $x' = 2x$ (преобразование периода);
- с) $Y = \cos 2x$, $y' = Y + 1$ (перенос в направлении оси ординат),
- д) $y' = \cos 2x + 1$, $y = \frac{1}{2} y'$ (сжатие к оси абсцисс).

Эти преобразования представлены на чертеже 116.



Черт. 116

Аналогично строится график функции

$$y = \sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x)$$

с той разницей, что после преобразования с) следует выполнить зеркальное отражение в оси абсцисс.

Сложение гармонических колебаний

Сложение колебаний с одним и тем же периодом (наименьшим положительным). Если два гармонические колебания

$$y_1 = A_1 \sin(\omega_1 x + \alpha_1) \quad \text{и} \quad y_2 = A_2 \sin(\omega_2 x + \alpha_2)$$

имеют один и тот же период T , то $T = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\omega_2}$, откуда $\omega_1 = \omega_2$, тогда

$$y_1 + y_2 = (A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2) \sin \omega x + (A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2) \cos \omega x,$$

где $\omega = \omega_1 = \omega_2$.

Получился линейный тригонометрический двучлен относительно $\sin \omega x$ и $\cos \omega x$:

$$y_1 + y_2 = a \sin \omega x + b \cos \omega x,$$

где

$$a = A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2, \quad b = A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2.$$

Следовательно, в силу изложенного

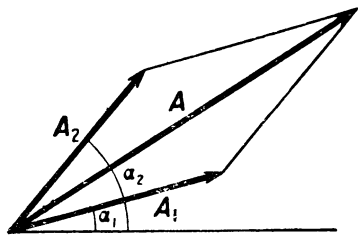
$$y_1 + y_2 = A \sin(\omega x + \alpha),$$

где

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{(A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2)^2 + (A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2)^2} = \\ &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)} \end{aligned}$$

и

$$\cos \alpha = \frac{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2}{A}, \quad \sin \alpha = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A}.$$



Черт. 117

Амплитуду A результирующего колебания можно построить геометрически, как показано на чертеже 117: A есть диагональ параллелограмма, стороны которого равны A_1 и A_2 и образуют между собой угол, равный $\alpha_2 - \alpha_1$.

Сложение колебаний с различными периодами.

Лемма. Если $\omega_1 \neq \omega_2$, то тождественное равенство двух тригонометрических двучленов

$$a_1 \sin \omega_1 x + b_1 \cos \omega_1 x \equiv a_2 \sin \omega_2 x + b_2 \cos \omega_2 x \quad (1)$$

имеет место в том и только в том случае, если

$$a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 0. \quad (2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что хотя бы один из четырех коэффициентов a_1, a_2, b_1, b_2 отличен от нуля. Пусть, например, $|a_1| + |b_1| \neq 0$, тогда первый двучлен есть гармоническое колебание

$$y_1 = a_1 \sin \omega_1 x + b_1 \cos \omega_1 x = A_1 \sin(\omega_1 x + \alpha_1);$$

так как функция y_1 не равна тождественно нулю, то из тождества (1) следует, что хотя бы одно из чисел a_2 и b_2 отлично от нуля. Тогда второй двучлен также является гармоническим колебанием:

$$y_2 = a_2 \sin \omega_2 x + b_2 \cos \omega_2 x = A_2 \sin(\omega_2 x + \alpha_2).$$

В силу тождества (1) двучлены y_1 и y_2 изображают одну и ту же функцию. Эта функция периодическая с наименьшим положительным периодом $T = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\omega_2}$, откуда (вопреки условию) $\omega_1 = \omega_2$. Следовательно, допущение, что хотя бы один из коэффициентов данных двучленов отличен от нуля, приводит к противоречию с условием леммы, а потому имеет место равенство (2), и т. д.

Теорема. Сумма двух гармонических колебаний с различными периодами (наименьшими положительными) является периодической функцией в том и только в том случае, если их периоды соизмеримы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. У с л о в и е н е о б х о д и м о.
Пусть

$$f_1(x) = a_1 \sin \omega_1 x + b_1 \cos \omega_1 x \text{ и } f_2(x) = a_2 \sin \omega_2 x + b_2 \cos \omega_2 x$$

— два данные гармонические колебания, при этом $\omega_1 \neq \omega_2$.

Сумма $f_1(x) + f_2(x)$ является периодической функцией в том и только в том случае, если существует число $T \neq 0$ такое, что имеет место тождество

$$f_1(x + T) + f_2(x + T) \equiv f_1(x) + f_2(x)$$

или

$$\begin{aligned} a_1 \sin \omega_1(x + T) + b_1 \cos \omega_1(x + T) + a_2 \sin \omega_2(x + T) + \\ + b_2 \cos \omega_2(x + T) \equiv a_1 \sin \omega_1 x + b_1 \cos \omega_1 x + a_2 \sin \omega_2 x + \\ + b_2 \cos \omega_2 x. \end{aligned}$$

Последнее тождество (после элементарных преобразований) можно заменить следующим эквивалентным ему тождеством:

$$\begin{aligned} [a_1(\cos \omega_1 T - 1) - b_1 \sin \omega_1 T] \sin \omega_1 x + [a_1 \sin \omega_1 T + b_1(\cos \omega_1 T - \\ - 1)] \cos \omega_1 x \equiv [a_2(1 - \cos \omega_2 T) + b_2 \sin \omega_2 T] \sin \omega_2 x + \\ + [-a_2 \sin \omega_2 T + b_2(1 - \cos \omega_2 T)] \cos \omega_2 x. \end{aligned}$$

В силу доказанной леммы последнее тождество имеет место в том и только в том случае, если

$$\left. \begin{aligned} a_1 (\cos \omega_1 T - 1) - b_1 \sin \omega_1 T &= 0, \\ a_1 \sin \omega_1 T + b_1 (\cos \omega_1 T - 1) &= 0; \\ a_2 (1 - \cos \omega_2 T) + b_2 \sin \omega_2 T &= 0, \\ -a_2 \sin \omega_2 T + b_2 (1 - \cos \omega_2 T) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Первые два равенства образуют систему линейных однородных уравнений относительно коэффициентов a_1 и b_1 ; эта система должна иметь нетривиальные решения, так как хотя бы один из этих коэффициентов отличен от нуля (тривиальный случай $f_1(x) \equiv 0$ не рассматривается), последнее имеет место в том (и только в том) случае, если

$$\begin{vmatrix} \cos \omega_1 T - 1, & -\sin \omega_1 T \\ \sin \omega_1 T, & \cos \omega_1 T - 1 \end{vmatrix} = 2(1 - \cos \omega_1 T) = 0,$$

откуда

$$\cos \omega_1 T = 1 \quad \text{и} \quad T = \frac{2k_1 \pi}{\omega_1} = k_1 T_1,$$

где $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$ — период первого колебания, k_1 — целое число.

Аналогично из второй системы уравнений получим

$$T = k_2 T_2,$$

где $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}$ — период второго колебания, k_2 — целое число.

Следовательно,

$$T = k_1 T_1 = k_2 T_2, \quad \text{откуда} \quad \frac{T_1}{T_2} = \frac{k_2}{k_1},$$

т. е. периоды T_1 и T_2 соизмеримы.

У с л о в и е д о с т а т о ч н о. Предположим обратное, что периоды данных колебаний $f_1(x)$ и $f_2(x)$ соизмеримы, т. е. $\frac{T_1}{T_2} = \frac{k_2}{k_1}$, где k_1 и k_2 — целые числа; имеем $k_1 T_1 = k_2 T_2$; число $k_1 T_1$, будучи кратным T_1 периода первого колебания, является также его периодом. По той же причине число $k_2 T_2$ является периодом второго колебания. Сумма двух периодических функций $f_1(x) + f_2(x)$ с общим периодом T также является периодической функцией с тем же периодом T , ч. т. д.

Из изложенных рассуждений следует, что *общим периодом суммы двух гармонических колебаний с соизмеримыми периодами является общее кратное их периодов.*

Наименьшим положительным периодом суммы двух гармонических колебаний является наименьшее общее кратное их периодов (наименьших положительных).

Примеры.

1. Функции $\sin \frac{x}{2}$ и $\cos x$ имеют общий (наименьший) период 4π , так как 4π есть период первой из них, а 2π — второй.

2. Сумма $\sin 10x + \cos 15x$ есть периодическая функция с периодом $\frac{2\pi}{5}$. В самом деле, $\frac{2\pi}{10}$ есть период первого слагаемого, $\frac{2\pi}{15}$ — период второго. Наименьшим общим кратным этих периодов является $\frac{2\pi}{5}$.

3. Сумма $\cos \frac{2x}{3} + \cos \frac{7x}{12}$ является периодической функцией с периодом (наименьшим положительным) $T = 24\pi$. Период 3π первой функции в T содержится 8 раз, а период $\frac{24}{7}\pi$ второй функции — 7 раз.

Пусть $y = f(x)$ — уравнение произвольного периодического движения с наименьшим положительным периодом T . Нижеследующие тригонометрические функции имеют период T :

$$\sin\left(\frac{2\pi}{T}x + \alpha_1\right), \sin\left(\frac{4\pi}{T}x + \alpha_2\right), \dots, \sin\left(\frac{2\pi n}{T}x + \alpha_n\right), \dots,$$

причем, для первой из них T является наименьшим периодом. В весьма многих встречающихся в приложениях случаях функция $f(x)$ может быть представлена в виде суммы бесконечного ряда Фурье *:

$$f(x) = A_0 + A_1 \sin\left(\frac{2\pi}{T}x + \alpha_1\right) + \dots + A_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}x + \alpha_n\right) + \dots$$

Таким образом, сложное периодическое движение представляется как результат совместного действия (наложения) простейших гармонических колебаний с периодами (наименьшими), равными

$$T, \frac{T}{2}, \frac{T}{3}, \dots, \frac{T}{n}, \dots$$

Гармоническое колебание $A_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{T} + \alpha_n\right)$ называется n -й гармоникой функции $f(x)$.

Для приближенного представления движения, характеризующегося функцией $f(x)$ в виде суммы синусоидальных колебаний, может служить сумма (конечная) некоторого числа n первых членов ряда Фурье, т. е. некоторый тригонометрический многочлен (см. § 20) от аргумента $\frac{2\pi x}{T}$.

Для нахождения гармоник функции $f(x)$, заданной графически (например, в результате экспериментальных исследований), сконструированы приборы — гармонические анализаторы.

* Условия разложимости функции $f(x)$ в тригонометрический ряд устанавливаются в курсе математического анализа.

торы, дающие автоматически некоторое количество первых гармоник функции $f(x)$ по ее графику.

Из доказанной теоремы следует, что *при сложении двух гармонических колебаний с несоизмеримыми периодами получается непериодическая функция*. Так, например, функции $\sin x + \sin \pi x$ или $\cos x + \sin \sqrt{2} x$ — непериодические. Пусть

$$y_1 = A_1 \sin(\omega_1 x + \alpha_1), \quad \text{и} \quad y_2 = A_2 \sin(\omega_2 x + \alpha_2)$$

уравнения двух колебательных движений (x — время).

Обозначим через φ разность аргументов

$$\varphi = (\omega_2 x + \alpha_2) - (\omega_1 x + \alpha_1) = (\omega_2 - \omega_1) x + (\alpha_2 - \alpha_1),$$

тогда результирующее движение можно представить в виде

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &= A_1 \sin(\omega_1 x + \alpha_1) + A_2 \sin(\omega_1 x + \alpha_1 + \varphi) = \\ &= (A_1 + A_2 \cos \varphi) \sin(\omega_1 x + \alpha_1) + A_2 \sin \varphi \cos(\omega_1 x + \alpha_1). \end{aligned}$$

Если по обычным правилам ввести вспомогательный угол, то получим

$$y_1 + y_2 = A \sin(\omega_1 x + \alpha),$$

где «амплитуда»

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos \varphi},$$

а также «фаза» α суть функции времени x .

Если периоды данных колебаний близки между собой, то разность $\omega_2 - \omega_1$ мала, в этом случае «амплитуда» A и «фаза» α результирующего колебания медленно меняются. На протяжении небольшого промежутка времени результирующее движение воспринимается как синусоидальное колебание. Однако с течением времени амплитуда меняется, ее наибольшее и наименьшее значения суть $A_1 + A_2$ и $|A_1 - A_2|$ (при $\cos \varphi = \pm 1$). Описанное явление носит в физике название биения: суммарное колебание воспринимается как колебание с амплитудой, меняющейся периодически, то возрастающей, то затухающей. В частности, биение можно наблюдать, слушая результирующий звук, исходящий из двух источников, дающих колебания с близкими, но различными периодами.

§ 35. Примеры исследования функций и построение графиков

На примерах, приведенных в настоящем параграфе, показаны различные приемы исследования и построения графиков функций, заданных формулами, содержащими тригонометрические операции.

I. В примерах 1—9 показано исследование функции на основании непосредственного рассмотрения формулы, при помощи которой задана функция.

Примеры.

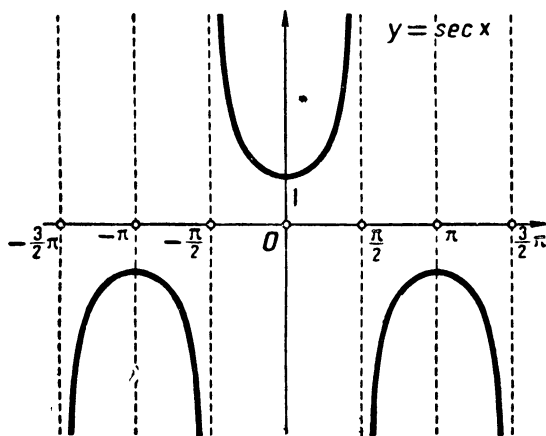
1 Построить график функции $y = \sec x$.

Решение. Областью определения является бесконечное множество интервалов $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$. Функция четная и периодическая с периодом 2π , поэтому достаточно ее исследовать в двух промежутках $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ и $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. На полуинтервале $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ функция $\cos x$ убывает от 1 до 0, следовательно, $y = \frac{1}{\cos x}$ возрастает от 1 до $+\infty$

В полуинтервале $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ в силу тождества $\sec(\pi - x) = -\sec x$ линия симметрична относительно точки $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ оси абсцисс; в этом полуинтервале $\cos x$ убывает от 0 до -1 , а $\sec x$ возрастает от $-\infty$ до -1 . На промежутки $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$ и $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ линия продолжается по четности, а далее — по периодичности

График секанса представлен на чертеже 118; для уточнения линии следует воспользоваться частными значениями функции.

2. На чертеже 119 представлен график функции $y = \operatorname{cosec} x$. Подробные рассуждения представляем учащимся.

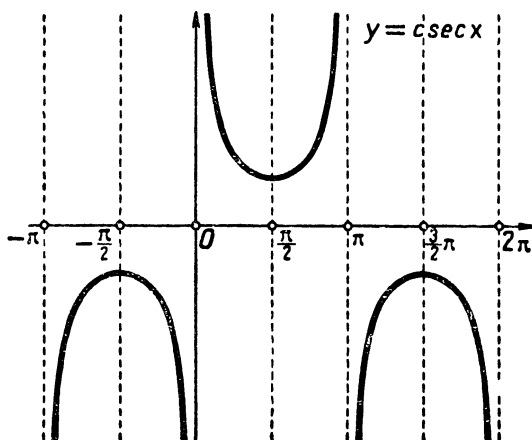


Черт. 118

3. Построить график функции $y = \log_a(\sin x)$ (где $a > 1$).

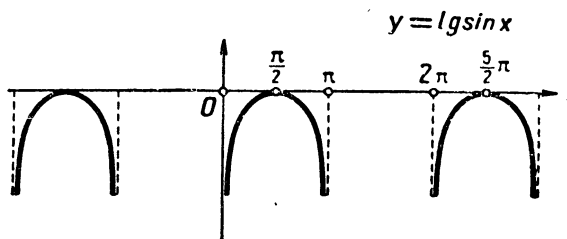
Решение. Область определения состоит из бесконечного множества интервалов $(2k\pi, (2k+1)\pi)$. Функция периодическая с периодом 2π ; достаточно исследовать ее в интервале, в котором она имеет смысл в пределах одного периода. В полуинтервале $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ синус возрастает от 0 до 1, а $\log_a \sin x$ возрастает от $-\infty$ до 0. На полуинтервале $\frac{\pi}{2} \leq x < \pi$ синус убывает

вадет от 1 до 0 а $\log_a \sin x$ убывает от 0 до $-\infty$. Из неравенства $\sin x < 1$ следует, что $y < 0$ и что $y_{\max} = 0$ (при $x = \frac{\pi}{2}$).



Черт. 119

График представлен на чертеже 120 (рекомендуем составить таблицу значений функции $\lg \sin x$ при значениях аргумента $x = 0; 0,1; 0,2; \dots$ и т. д., пользуясь таблицами логарифмов тригонометрических функций).



Черт. 120

4. Построить график $y = \sqrt{\log_a \sin x}$.

Решение. Область определения находится из условия $\log_a \sin x \geq 0$. Но (см. предыдущий пример) $\log_a \sin x \leq 0$, и равенство нулю имеет место лишь в точках $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, поэтому область определения состоит из изолированных точек $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, в которых $y = 0$, все же прочие точки не принадлежат области определения функции. График состоит из изолированных точек оси абсцисс (черт 121).

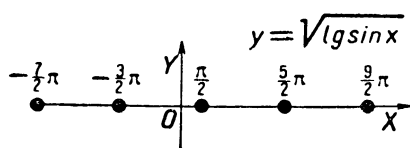
5. Построить график функции $y = 2^{\cos x}$.

Решение. Область определения есть интервал $(-\infty, +\infty)$.

Имеем:

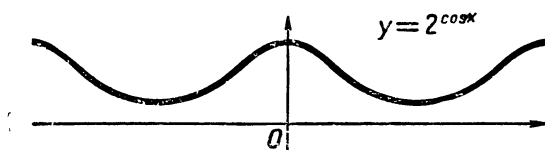
Аргумент x	0	$<x<$	π	$<x<$	2π
Промежуточный аргумент $u = \cos x$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1
Функция $y = 2^u$	2	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	2

Наибольшее и наименьшее значения суть $y_{\max} = 2$, $y_{\min} = \frac{1}{2}$.



Черт. 121

Дальнейшее исследование функции излишне, так как сегменты $[0, \pi]$ и $[\pi, 2\pi]$ охватывают полный период функции. График представлен на чертеже 122.

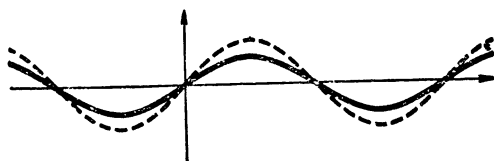


Черт. 122

6. Построить график функции $y = \sin(\sin x)$.

Р е ш е н и е. Область определения — интервал $(-\infty, +\infty)$. Функция нечетная и периодическая с периодом 2π . На сегменте $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ функция $\sin x$ возрастает от 0 до 1, а $y = \sin(\sin x)$ возрастает от 0 до $\sin 1 \approx 0,84$ (сравнить с примером 3 на стр. 162).

На сегменте $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ данная функция убывает от $\sin 1$ до 0 (черт. 123),



Черт. 123

пунктиром намечена синусоида. Для построения графика на сегменте $[-\pi, 0]$ достаточно продолжить график, построенный на сегменте $[0, \pi]$, симметрично относительно начала координат. Для всего интервала $(-\infty, +\infty)$ график получится путем периодического продолжения.

7. Построить график функции $y = \sin x^2$ (кривая Френеля, имеющая применения в физике).

Решение Область определения есть интервал $(-\infty, +\infty)$. Данная функция четная, поэтому достаточно исследовать ее в промежутке $0 \leq x < +\infty$. Введем промежуточный аргумент $y = \sin u, u = x^2$. Определим промежутки монотонности:

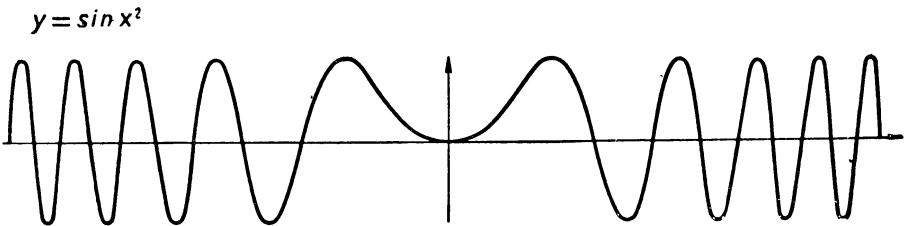
Аргумент x	0	$<x<$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$	$<x<$	$\sqrt{\frac{3\pi}{2}}$	$<x<$	$\sqrt{\frac{5\pi}{2}}$	$<x<$	$\sqrt{\frac{7\pi}{2}}$	...
Промежуточный аргумент $u = x^2$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{3\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{5\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{7\pi}{2}$	...
Функция $y = \sin u$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	...

Функция y возрастает от -1 до 1 на сегментах $\left[\sqrt{\frac{4k-1}{2}}\pi, \sqrt{\frac{4k+1}{2}}\pi\right]$ и убывает от 1 до -1 на сегментах $\left[\sqrt{\frac{4k+1}{2}}\pi, \sqrt{\frac{4k+3}{2}}\pi\right]$.

Наибольшее и наименьшее значения суть $y_{\max} = 1, y_{\min} = -1$.

Линия пересекает ось абсцисс в точках, в которых $u = x^2 = k\pi$, откуда $x = \pm\sqrt{k\pi}$ (см. пример 3 на стр. 153).

Построив линию в промежутке $[0, +\infty)$ следует продолжить ее на промежутки $(-\infty, 0]$ симметрично относительно оси ординат (черт. 124)



Черт. 124

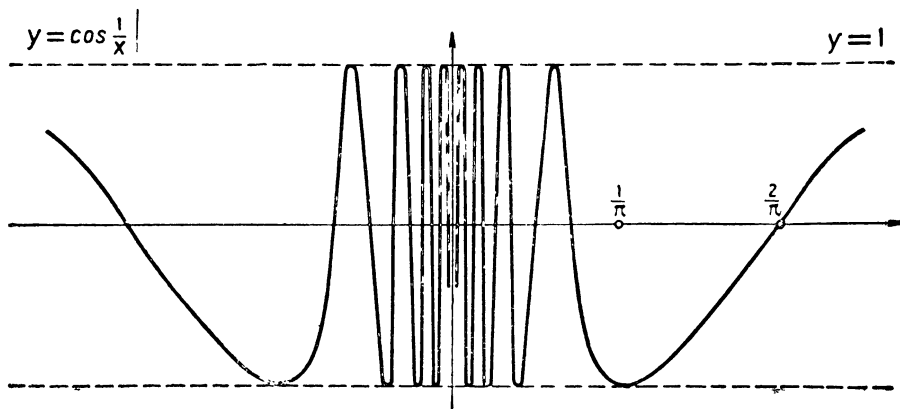
Примечание. Неравенство $|\sin x^2| \leq x^2$ показывает, что в окрестности начала координат линия расположена между параболой $y = x^2$ и осью абсцисс.

8. Построить график функции $y = \cos \frac{1}{x}$.

Решение. Область определения состоит из двух интервалов $-\infty < x < 0$ и $0 < x < +\infty$. Функция четная, достаточно исследовать ее в интервале $(0, +\infty)$. Точки пересечения линии с осью абсцисс определяются из условия $\cos \frac{1}{x} = 0$, откуда $\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ и $x = \frac{2}{(2k+1)\pi}$. Функция ограничена, так как $-1 \leq \cos \frac{1}{x} \leq 1$, следовательно, линия заключена в полосе, ограниченной прямыми $y = \pm 1$. Наибольшее значение, равное 1, функция имеет в точках, в которых $\cos \frac{1}{x} = 1$, откуда $\frac{1}{x} = 2k\pi$ и $x = \frac{1}{2k\pi}$. Наименьшее значение, равное -1 , функция имеет в точках, в которых $\cos \frac{1}{x} = -1$, откуда $\frac{1}{x} = (2k+1)\pi$ и $x = \frac{1}{(2k+1)\pi}$. Для нахождения промежутков монотонности введем промежуточный аргумент $u = \frac{1}{x}$. Имеем:

Аргумент x	...	$\frac{1}{4\pi}$	$<x<$	$\frac{1}{3\pi}$	$<x<$	$\frac{1}{2\pi}$	$<x<$	$\frac{1}{\pi}$	$<x<$	∞
Промежуточный аргумент $u = \frac{1}{x}$	...	4π	$\searrow$	3π	$\searrow$	2π	$\searrow$	π	$\searrow$	0
Функция $\cos u$	...	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

График функции представлен на чертеже 125. Точка $x = 0$ является точкой



Черт 125

разрыва (2-го рода); в этой точке функция не имеет предела (ни конечного, ни бесконечного).

9. Исследовать на монотонность функцию

$$y = x - \sin x$$

и построить ее график.

Решение. Область определения — интервал $-\infty < x < \infty$. Докажем, что y возрастает в интервале $(-\infty, \infty)$.

Составим разность

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - \sin x_2) - (x_1 - \sin x_1),$$

где x_1 и x_2 — два любые действительные числа, причем $x_1 < x_2$.

Имеем

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= (x_2 - x_1) - (\sin x_2 - \sin x_1) = \\ &= (x_2 - x_1) - 2 \sin \frac{x_2 - x_1}{2} \cos \frac{x_2 + x_1}{2}. \end{aligned}$$

По условию, $x_2 - x_1 > 0$,
имеем далее:

$$\left| 2 \sin \frac{x_2 - x_1}{2} \cos \frac{x_2 + x_1}{2} \right| < 2 \left| \sin \frac{x_2 - x_1}{2} \right| < |x_2 - x_1| = x_2 - x_1.$$

Следовательно, знак разности $f(x_2) - f(x_1)$ определяется первым слагаемым $x_2 - x_1$, т. е. $f(x_2) - f(x_1) < 0$, значит, функция $f(x)$ возрастает.

Функция $f(x)$ нечетная, ее график представлен на чертеже 126. Следует принять во внимание, что в силу неравенства

$$0 < x - \sin x < \frac{x^3}{4} \quad (\text{при } x > 0)$$

в окрестности начала координат линия заключена между кубической параболой

$$y = \frac{x^3}{4}$$

и осью абсцисс и что разность между ординатами биссектрисы координатного угла $Y = x$ и линии $y = f(x)$ есть периодическая функция $Y - y = \sin x$.

11. На примерах 10—13 показано применение тригонометрических подстановок к исследованию алгебраических функций.

10. Исследовать функцию

$$y = \frac{x}{1 + x^2}$$

и построить ее график.

Решение. Введем тригонометрическую подстановку $x = \operatorname{tg} t$, где $t = \operatorname{arctg} x$, тогда получим:

$$y = \frac{1}{2} \sin 2t.$$

Аргумент x есть возрастающая функция от t . Сегменту $0 \leq x \leq 1$ соответствует сегмент

$$0 \leq t \leq \frac{\pi}{4},$$

на котором y возрастает от 0 до $\frac{1}{2}$. Промежутку $1 \leq x < +\infty$ соответствует промежуток

$$\frac{\pi}{4} \leq y < \frac{\pi}{2},$$

на котором y убывает от $\frac{1}{2}$ до 0.

Итак, в промежутке $0 \leq x \leq 1$ функция y возрастает от 0 до $\frac{1}{2}$, а в промежутке $1 \leq x < +\infty$ убывает от $\frac{1}{2}$ до 0.

Данная функция нечетная, ее график представлен на чертеже 127.

11. Исследовать функцию

$$y = \frac{x}{1+x^2}.$$

Решение. Воспользуемся той же подстановкой, что в предыдущем примере, тогда получим:

$$y = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2t, \quad \text{где } x = \operatorname{tg} t, \quad t = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x.$$

Результат исследования запишем в таблицу:

t	0	$<t<$	$\frac{\pi}{4}$	$<t<$	$\frac{\pi}{2}$
$x = \operatorname{tg} t$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
y	0	$\nearrow$	$\frac{+\infty}{-\infty}$	$\nearrow$	0

Итак, в интервале $0 < x < 1$ функция y возрастает от 0 до ∞ , а в интервале $1 < x < \infty$ возрастает от $-\infty$ до 0.

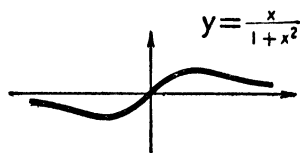
Функция нечетная, ее график представлен на чертеже 182.

12. Исследовать функцию

$$y = x + \frac{1}{x}.$$

Решение. Воспользовавшись той же подстановкой $x = \operatorname{tg} t$, получим

$$y = \frac{2}{\sin 2t};$$

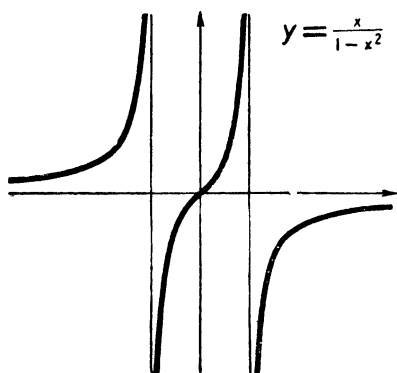


Черт. 127

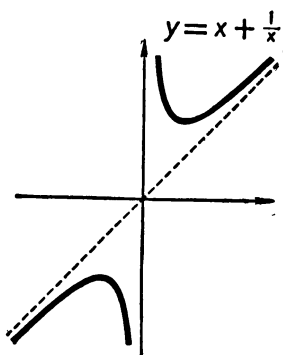
имеем:

	0	$< x <$	1	$< x <$	$+\infty$
t	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{4}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

функция нечетная, ее график (гипербола) представлен на чертеже 129



Черт. 128



Черт. 129

Примечание Исследование функций, рассмотренных в примерах 10, 11, 12, может быть выполнено другим способом — чисто алгебраически (см. «Специальный курс элементарной алгебры»). Рекомендуем учащимся сопоставить оба способа исследования.

13. Исследовать функцию

$$y = x + \sqrt{1 - x^2}.$$

Решение Областью определения функции служит сегмент $-1 \leq x \leq 1$. Воспользуемся тригонометрической подстановкой, положив $x = \sin t$ на сегменте $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, т. е. $t = \arcsin x$. Таким образом, сегменту $-1 \leq x \leq 1$ взаимно однозначно соответствует сегмент $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Имеем:

$$y = \sin t + \cos t = \sqrt{2} \sin \left(t + \frac{\pi}{4} \right).$$

Эта функция на сегменте $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{4}$ возрастает от $y = -1$ до $\sqrt{2}$, а на сегменте $\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ убывает от $\sqrt{2}$ до 1.

Перейдя к аргументу x , получим соответственные сегменты:

$$-1 \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq 1.$$

На первом из этих сегментов y возрастает от -1 до $\sqrt{2}$, а на втором убывает от $\sqrt{2}$ до 1 . При $x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ линия пересекает ось абсцисс: $y = 0$.

График представлен на чертеже 130.

Примечание. Графиком служит полуэллипс, в чем можно убедиться, освободив уравнение от радикала.

III. На примерах 14—17 показано применение рационализирующих подстановок к исследованию функций, заданных тригонометрическими выражениями.

При применении универсальной подстановки надо иметь в виду следующее.

Значения функций $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$,

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ точке $x = \pi$ (и вообще в точках $(2k+1)\pi$) не могут быть получены ни при каком значении t , так как при $x = \pi$ параметр

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

теряет смысл. Однако эти значения можно получить путем предельного перехода. В самом деле,

$$\cos \pi = -1, \quad \sin \pi = 0,$$

с другой стороны,

$$\lim_{x \rightarrow \pi} |t| = \infty, \quad \lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{1-t^2}{1+t^2} = -1, \quad \lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{2t}{1+t^2} = 0.$$

Аналогичное замечание относится к подстановке $t = \operatorname{tg} x$.

Примеры.

14. Построить график функции

$$y = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x + 2}.$$

Решение. Функция периодическая с периодом π . В особых точках

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

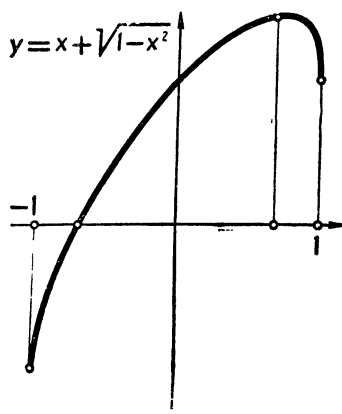
значение функции (в силу принципа продолжения по непрерывности) считаем равным нулю, так как $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} |\operatorname{tg} x| = +\infty$ (в этих точках) и

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x + 2} = 0.$$

Исследуем функцию на сегменте $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Введем параметр $t = \operatorname{tg} x$:

$$y = \frac{1}{t^2 - 2t + 2} = \frac{1}{(t-1)^2 + 1}.$$

Знаменатель имеет наименьшее значение, а y — наибольшее значение, равное 1 при $t = \operatorname{tg} x = 1$, откуда $x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} 1 = \frac{\pi}{4}$

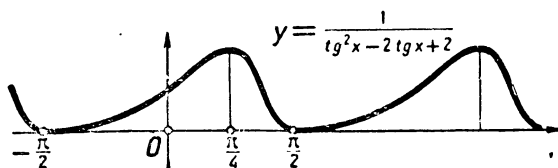


Черт. 130

Имеем:

Аргумент x	$-\frac{\pi}{2}$	$<x<$	$\frac{\pi}{4}$	$<x<$	$\frac{\pi}{2}$
Промежуточный аргумент $t = \operatorname{tg} x$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	∞
Функция $u = \frac{1}{(t-1)^2 + 1}$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

График представлен на чертеже 131.



Черт. 131

15. Исследовать функцию $y = \frac{1 + \cos x}{2 - \sin x}$ и построить ее график.

Решение. Применим универсальную подстановку

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

в интервале $-\pi < x < \pi$, равном по длине периоду функции. Имеем $x = 2 \operatorname{arctg} t$ и

$$y = \frac{1}{t^2 - t + 1} = \frac{1}{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}},$$

где $-\infty < t < \infty$.

В промежутке $-\infty < t \leq \frac{1}{2}$ функция y возрастает от 0 до $\frac{4}{3}$, а в промежутке $\frac{1}{2} \leq t < \infty$ функция убывает от $\frac{4}{3}$ до 0. Наибольшее значение

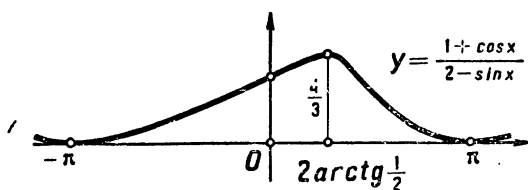
$$y_{\max} = \frac{4}{3}.$$

Промежутку $-\infty < t \leq \frac{1}{2}$ соответствует промежуток $-\pi < x \leq 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$,

а промежутку $\frac{1}{2} \leq t < \infty$ — промежуток $2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2} < x < \pi$. Следовательно,

но, на сегменте $\left[-\pi, 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2}\right]$ функция возрастает от 0 до $\frac{4}{3}$, а на

сегменте $\left[2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2}, \pi\right]$ убывает от $\frac{4}{3}$ до 0. График представлен на чертеже 132 (принять во внимание, что $2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \approx 0,93$).



Черт. 132

16. Исследовать функцию $y = \cos x + \cos 2x$ и построить ее график.
Решение. Имеем

$$y = \cos x + 2 \cos^2 x - 1.$$

Введем рационализирующий параметр, положив $t = \cos x$, тогда получим

$$y = 2t^2 + t - 1. \quad (1)$$

На сегменте $0 < x < \pi$ параметр t убывает от 1 до -1 , а на сегменте $-\pi < x < 0$ возрастает от -1 до 1. Исследуем трехчлен (1) на сегменте $-1 \leq t \leq 1$; корни трехчлена (1) суть $t_1 = \frac{1}{2}$ и $t_2 = -1$.

Имеем

$$y = \frac{1}{2} \left[\left(2t + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{9}{4} \right].$$

При $t = -\frac{1}{4}$ трехчлен имеет наименьшее значение $y_{\min} = -\frac{9}{8}$, на сегменте $-1 \leq t \leq -\frac{1}{4}$ трехчлен убывает от 0 до $-\frac{9}{8}$, а на сегменте $-\frac{1}{4} \leq t \leq 1$ возрастает от $-\frac{9}{8}$ до 2. Данная функция четная, поэтому достаточно исследовать ее на сегменте $0 < x < \pi$. Этому сегменту взаимно однозначно соответствует сегмент $-1 \leq t \leq 1$. На сегменте $0 \leq x \leq \arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$ промежуточный аргумент t убывает от 1 до $-\frac{1}{4}$, а y убывает от 2 до $-\frac{9}{8}$; на сегменте $\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) \leq x < \pi$ аргумент t убывает от $-\frac{1}{4}$ до -1 , а y возрастает от $-\frac{9}{8}$ до 0. На сегменте $-\pi \leq x < 0$ (приняв во внимание свойство четности данной функции) имеем следующее:

y убывает от 0 до $-\frac{9}{8}$ на сегменте $-\pi \leq x \leq -\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$;

y возрастает от $-\frac{9}{8}$ до 2 на сегменте $-\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) \leq x < 0$.

На сегменте $0 \leq x \leq \pi$ ордината y обращается в нуль в точках

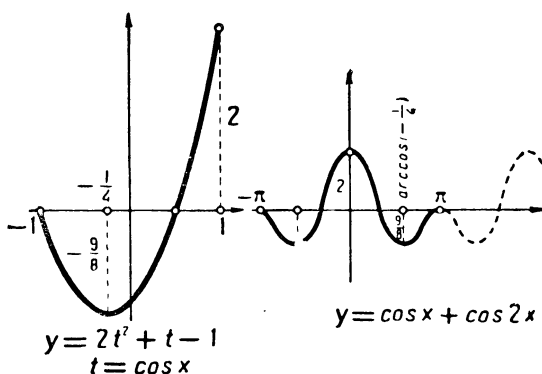
$$x = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} \quad \text{и} \quad y = \arccos (-1) = \pi$$

Исследуемая функция периодическая с периодом 2π , сегмент $[-\pi, \pi]$ охватывает полный ее период.

График представлен на чертеже 133. Значение

$$\arccos \left(-\frac{1}{4} \right) \approx 1,82 (\approx 104^\circ)$$

находим по таблицам



Черт. 133

7. Построить график функции

$$y = f(x) = \sin x + \sin 3x.$$

Решение. Функция нечетная, периодическая с периодом 2π .

График симметричен относительно прямой $x = \frac{\pi}{2}$, так как

$$f(\pi - x) = \sin(\pi - x) + \sin(3\pi - 3x) = \sin x + \sin 3x = f(x),$$

а потому достаточно выполнить построение лишь на сегменте $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

В концах этого сегмента функция обращается в нуль: $f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Введем рационализирующую подстановку, положив $t = \sin x$, тогда получим

$$y = 4 \sin x - 4 \sin^3 x = 4t(1 - t^2).$$

Многочлен

$$P(t) = t(1 - t^2)$$

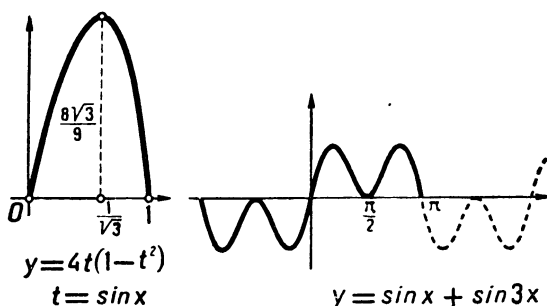
на сегменте $[0, 1]$ имеет наибольшее значение, равное

$$P\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \quad \text{при} \quad t = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

На сегменте $0 \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ многочлен $P(t)$ возрастает от 0 до $\frac{2\sqrt{3}}{9}$, а на сегменте $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq t \leq 1$ убывает от $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ до 0*.

В соответствии с изложенным функция $f(x)$ возрастает от 0 до $\frac{8\sqrt{3}}{9}$ на сегменте $0 \leq x \leq \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$ и убывает от $\frac{8\sqrt{3}}{9}$ до 0 на сегменте $\arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

График представлен на чертеже 134 (значение $\arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 1,61 (\approx 35^\circ)$ находим по таблицам)



Черт. 134

* Исследовать $P(t)$ можно обычными методами дифференциального исчисления. Можно исследовать $P(t)$ и элементарными средствами. В самом деле,

$$P(t) = (t^2)^{\frac{1}{2}}(1 - t^2),$$

а потому наибольшее значение $P(t)$ имеет, если $2t^2 = 1 - t^2$ (см. «Специальный курс алгебры», § 88), откуда $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Составим разность:

$$\Delta = P(t_2) - P(t_1) = (t_2 - t_1)(1 - t_1^2 - t_1 t_2 - t_2^2);$$

если $0 \leq t_1 < t_2 \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$, то $\Delta > 0$, если же $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq t_1 < t_2 \leq 1$, то $\Delta < 0$.

Следовательно, $P(t)$ возрастает на сегменте $\left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ и убывает на сегменте $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right]$.

§ 36. Трансцендентность тригонометрических функций

Свойство трансцендентности тригонометрических функций выражается следующей теоремой.

Теорема. Ни одна из тригонометрических функций не удовлетворяет никакому алгебраическому уравнению.

Доказательство. Рассмотрим, например, функцию $\cos x$. Требуется доказать, что не существует многочлена $P(x, y)$, отличного от нуль-многочлена и такого, что в результате подстановки $y = \cos x$ получится тождество

$$P(x, \cos x) = 0. \quad (1)$$

Предположим противное, что многочлен $P(x, y)$ (отличный от нуль-многочлена), для которого имеет место тождество (1), существует. Расположим многочлен $P(x, y)$ по степеням x :

$$P(x, y) \equiv p_n(y)x^n + p_{n-1}(y)x^{n-1} + \dots + p_1(y)x + p_0(y), \quad (\text{P})$$

где $p_n, p_{n-1}, \dots, p_1, p_0$ — многочлены от аргумента y :

$$\left. \begin{aligned} p_n(y) &= c_k y^k + c_{k-1} y^{k-1} + \dots + c_0, \\ p_{n-1}(y) &= d_l y^l + d_{l-1} y^{l-1} + \dots + d_0, \\ &\vdots \\ p_0(y) &= f_s y^s + f_{s-1} y^{s-1} + \dots + f_0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{p})$$

Пусть m — произвольное число сегмента $[-1, 1]$; значение m функция $y = \cos x$ принимает при бесконечном множестве значений аргумента $x'_k = \arccos m + 2k\pi$ и $x''_k = -\arccos m + 2k\pi$. Положим $y = m$ в выражении (Р), тогда получим алгебраическое уравнение

$$p_n(m)x^n + p_{n-1}(m)x^{n-1} + \dots + p_1(m)x + p_0 = 0,$$

имеющее бесконечное множество корней x'_k и x''_k . Это возможно лишь при условии $p_n(m) = p_{n-1}(m) = \dots = p_0(m) = 0$. Получается, что для каждого из уравнений

$$p_n(y) = 0, \quad p_{n-1}(y) = 0, \dots, p_0(y) = 0.$$

Произвольное число t сегмента $[-1, 1]$ является корнем.

Это возможно лишь при условии, если все многочлены (p) являются нуль-многочленами, но тогда (вопреки предположению) $P(x, y)$ также является нуль-многочленом. Следовательно, функция $\cos x$ не удовлетворяет никакому алгебраическому уравнению.

Трансцендентность остальных тригонометрических функций доказывается так же, ч. т. д.

Следствие. Закон соответствия тригонометрических функций не может быть выражен посредством алгебраических действий над аргументом.

В самом деле, если бы, например, функция $\cos x$ могла быть представлена формулой

$$\cos x = Q(x),$$

где $Q(x)$ — некоторое алгебраическое выражение, то она (вопреки доказанному) удовлетворяла бы некоторому алгебраическому уравнению $P(x, y) = 0$.

Это последнее уравнение можно было бы получить, освободив уравнение

$$y - Q(x) = 0$$

от радикалов и дробей (если они содержатся в выражении $Q(x)$).

Итак, тригонометрические функции не могут быть выражены формулами, содержащими лишь алгебраические действия над аргументом. Известное из математического анализа представление тригонометрических функций при помощи степенных рядов, кроме алгебраических действий над аргументом, содержит операции п р е д е л ь н о г о п е р е х о д а (суммирование бесконечного ряда).



ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 37. Аркфункции

А р к с и н у с. Для тригонометрической функции $y = \sin x$, рассматриваемой в интервале $-\infty < x < \infty$, переход к обратной функции н е в о з м о ж е н. Так как функция $\sin x$ всякое ее значение m принимает на б е с к о н е ч н о м множестве значений аргумента, то по данному значению $y = m$ нельзя найти одно е д и н с т в е н н о е значение x . Переход к обратной функции станет возможным, если рассматривать $y = \sin x$ не при произвольных значениях x , а на каком-либо промежутке монотонности синуса.

Промежутками монотонности синуса служат сегменты:

$\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$, на которых $\sin x$ возрастает от -1 до 1 , и сегменты $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right]$, на которых $\sin x$ убывает от 1 до -1 (см. § 29); эти сегменты в сумме составляют интервал $(-\infty, +\infty)$, т. е. множество всех действительных чисел. На каждом из этих сегментов функция $y = \sin x$ имеет обратную функцию.

Рассмотрим функцию $y = \sin x$ на сегменте $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$; известно, что (см. § 12, стр. 53), при любом значении y , взятом при условии $-1 \leq y \leq 1$, на сегменте $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ существует единственная дуга $x = \arcsin y$, синус которой равен y^* . Сле-

* Считаем уместным напомнить, что здесь и ниже мы пользуемся геометрической терминологией лишь ради ее удобства и краткости. Называя $x = \arcsin y$ дугой, следует иметь в виду, что, в зависимости от толкования аргумента тригонометрической функции, x может иметь тот или иной конкретный смысл. Если мы рассматриваем тригонометрические функции от числового аргумента, то x есть число, а не дуга (в геометрической теории это есть радианная мера дуги, но не сама дуга). В вопросах, связанных с исследованием функций, такое именно толкование и должно быть принято.

довательно, функция, обратная относительно $y = \sin x$ на сегменте $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, выражается формулой

$$x = \arcsin y,$$

где $-1 \leq y \leq 1$.

Зная функцию, обратную относительно $\sin x$ на сегменте $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, можно (на основании формул приведения) *построить обратную функцию относительно синуса на любом его промежутке монотонности*. В самом деле, дуга $\arcsin y + 2k\pi$ имеет синус, равный y :

$$\sin(\arcsin y + 2k\pi) = \sin(\arcsin y) = y,$$

и заключена на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$, следовательно

$$x = \arcsin y + 2k\pi$$

есть обратная функция относительно функции $y = \sin x$ на сегменте

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

Дуга $(\pi - \arcsin y) + 2k\pi$ имеет синус, равный y :

$$\begin{aligned} \sin[(\pi - \arcsin y) + 2k\pi] &= \sin(\pi - \arcsin y) = \\ &= \sin(\arcsin y) = y, \end{aligned}$$

и расположена на сегменте $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2} + 2k\pi\right]$, следовательно,

$$x = (\pi - \arcsin y) + 2k\pi$$

есть функция, обратная относительно $y = \sin x$ на этом сегменте.

Так, в частности, $x = \pi - \arcsin y$ есть функция, обратная синусу на сегменте $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$.

Из изложенного следует, что достаточно ограничиться исследованием функции

$$y = \arcsin x$$

(следуя привычке в обозначениях, мы переставили местами буквы y и x).

Функция $\arcsin x$ обладает следующими свойствами:

1°. *Область определения функции $y = \arcsin x$ есть сегмент $-1 \leq x \leq 1$, так как множество значений синуса есть этот сегмент.*

2°. На сегменте $-1 \leq x \leq 1$ функция $y = \arcsin x$ возрастает от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. В самом деле, во-первых, будучи обратной функцией относительно возрастающей на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ функции $x = \sin y$, функция $\arcsin x$ также возрастает, и, во-вторых, произвольное значение m , взятое на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, функция $\arcsin x$ имеет в точке $x = \sin m$.

Итак, множество значений арксинуса есть сегмент $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

3°. $\arcsin x$ есть нечетная функция.

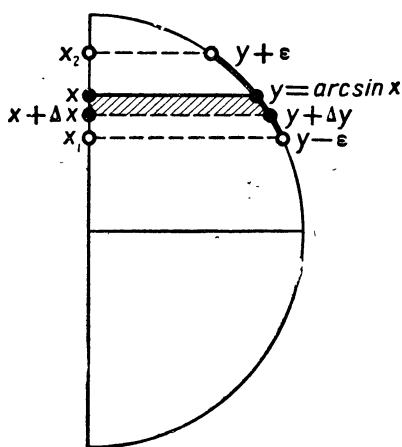
Доказательство. Так как $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$, то дуга $-\arcsin x$ заключена в промежутке от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$:

$$-\frac{\pi}{2} \leq -\arcsin x \leq \frac{\pi}{2}.$$

Далее, $\sin(-\arcsin x) = -\sin(\arcsin x) = -x$. Следовательно, дуги $\arcsin(-x)$ и $-\arcsin x$ имеют одинаковый синус, равный $-x$, и обе расположены на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, потому они равны: $\arcsin(-x) = -\arcsin x$, ч. т. д.

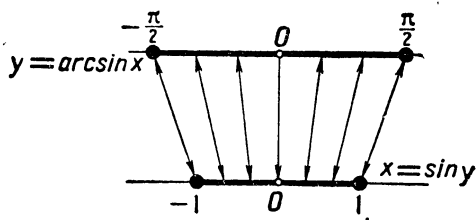
4°. Функция $y = \arcsin x$ непрерывна на сегменте $-1 \leq x \leq 1$.

Доказательство. Можно применить тот же метод доказательства, которым установлена непрерывность синуса (см. стр. 168). Если x_1 и x_2 — проекции на ось ординат концов дуг $y - \varepsilon$ и $y + \varepsilon$, то приращение дуги Δy по абсолютной величине меньше ε :



Черт. 135

$|\Delta y| < \varepsilon$, если $|\Delta x| < \delta$,
где в качестве δ может быть взята наименьшая из разностей $x - x_1$ и $x_2 - x$ (черт. 135).



Черт. 136

Если точка x совпадает с одним из концов сегмента $[-1, 1]$, то следует брать соответствующие односторонние окрестности этого конца.

П р и м е ч а н и е. Непрерывность функции $y = \arcsin x$ следует также из общей теоремы математического анализа о непрерывности функции, обратной относительно непрерывной монотонной функции.

Из изложенного следует, что взаимно обратные функции

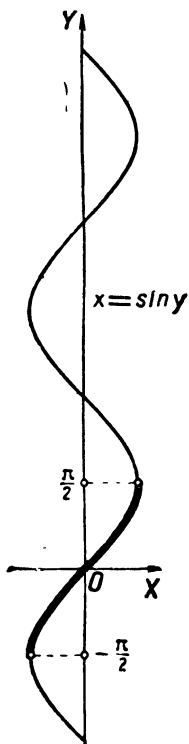
$$y = \arcsin x \text{ и } x = \sin y$$

гомеоморфно (т. е. взаимно однозначно и непрерывно) отображают друг на друга сегменты

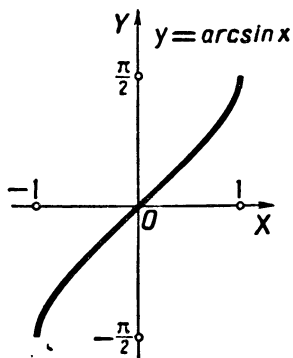
$$-1 \leq x \leq 1 \text{ и } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

(черт. 136).

Для построения графика функции $y = \arcsin x$ построим график функции $x = \sin y$, т. е. синусоиду с волнами



Черт. 137



Черт. 138

расположенными вдоль оси OY (черт. 137). Выделив на полученной линии дугу, для которой ординаты заключены на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, получим график арксинуса (черт. 138).

А р к к о с и н у с. Функция $y = \cos x$ в качестве промежуточных монотонности имеет сегменты $[2k\pi, (2k+1)\pi]$, на которых она убывает от 1 до -1 , и сегменты $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$, на которых она возрастает от -1 до 1 (см. § 29). Эти сегменты в сумме составляют всю область определения косинуса, т. е. множество всех действительных чисел. На каждом из этих сегментов функция $y = \cos x$ имеет обратную функцию.

Рассмотрим функцию $y = \cos x$ на сегменте $0 \leq x \leq \pi$. Если $-1 \leq y \leq 1$, то на сегменте $[0, \pi]$ существует единственная дуга $\arccos y$, косинус которой равен x . Следовательно, функция, обратная относительно $y = \cos x$ на сегменте $0 \leq x \leq \pi$, выражается формулой

$$x = \arccos y, \quad \text{где } -1 \leq x \leq 1.$$

Зная обратную функцию на сегменте $[0, \pi]$, можно (на основании известных свойств косинуса) построить обратную функцию относительно косинуса на любом его промежутке монотонности. В самом деле, дуга $\arccos y + 2k\pi$ имеет косинус равный y и заключена на сегменте $[2k\pi, (2k+1)\pi]$, следовательно,

$$x = \arccos y + 2k\pi$$

есть обратная функция относительно $y = \cos x$ на сегменте

$$2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi.$$

Дуга $-\arccos y + 2k\pi$ имеет косинус, равный y , и заключена на сегменте $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$, следовательно,

$$x = -\arccos y + 2k\pi$$

есть функция, обратная относительно $y = \cos x$ на этом сегменте. Итак, достаточно ограничиться исследованием функции (меняем местами x и y)

$$y = \arccos x.$$

Функция $y = \arccos x$ обладает следующими свойствами (эти свойства устанавливаются аналогичными рассуждениями как для арксинуса: провести их во всех подробностях предлагаем учащимся).

1°. Область определения функции $y = \arccos x$ есть сегмент $-1 \leq x \leq 1$.

2°. На сегменте $-1 \leq x \leq 1$ функция $y = \arccos x$ убывает от π до 0.

3°. Имеет место равенство

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x.$$

Из этого тождества следует, что функция $\arccos x$ не является ни четной, ни нечетной.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дуга $\arccos(-x)$ заключена на сегменте $[0, \pi]$, в силу определения арккосинуса. Дуга $\pi - \arccos x$ заключена в том же промежутке: это следует из неравенств $0 \leq \arccos y \leq \pi$; обе дуги имеют одинаковый косинус:

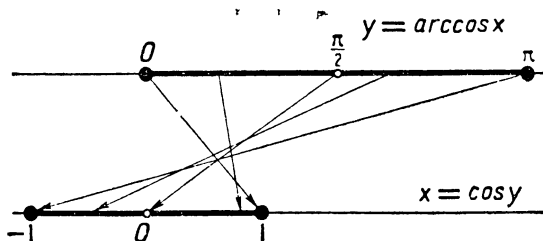
$$\begin{aligned} \cos[\arccos(-x)] &= -x \quad \text{и} \quad \cos(\pi - \arccos x) = \\ &= -\cos(\arccos x) = -x; \end{aligned}$$

следовательно, эти дуги равны, ч. т. д.

4°. Функция $y = \arccos x$ непрерывна на сегменте $-1 \leq x \leq 1$.
Взаимно обратные функции

$$y = \arccos x \quad \text{и} \quad x = \cos y$$

гомеоморфно отображают друг на друга сегменты $-1 \leq x \leq 1$ и $0 \leq y \leq \pi$ (черт. 139).



Черт. 139

Для построения графика функции $y = \arccos x$ достаточно взять выделенную на чертеже 140 дугу синусоиды, изображающей уравнением $x = \cos y$.

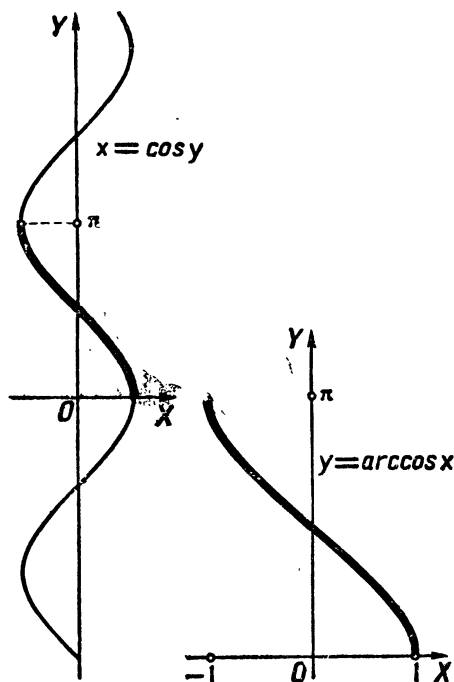
А р к т а н г е н с. Точки

$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k — любое целое число) разделяют множество всех действительных чисел на интервалы, в каждом из которых тангенс возрастает от $-\infty$ до $+\infty$. Следовательно, в каждом из интервалов $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ функция $y = \operatorname{tg} x$ имеет обратную функцию.

При произвольном действительном y в интервале $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ существует единственная дуга $\arctg y$, тангенс которой равен y . Следовательно, функция, обратная относительно $y = \operatorname{tg} x$ в интервале $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, выражается формулой

$$x = \arctg y,$$

где $-\infty < y < \infty$.



Черт. 140

Зная функцию, обратную относительно тангенса в интервале $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, можно построить обратную функцию в любом интервале монотонности тангенса. В самом деле, дуга $\arctg y + k\pi$ имеет тангенс равный y и заключена в интервале

$$\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right),$$

следовательно,

$$x = \arctg y + k\pi$$

есть обратная функция относительно $y = \operatorname{tg} x$ в интервале $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Функция $y = \arctg x$ обладает следующими свойствами:

1°. Область определения функции $y = \arctg x$ есть множество всех действительных чисел, т. е. интервал $-\infty < x < +\infty$, так как множество значений тангенса есть этот интервал.

2°. В интервале $-\infty < x < +\infty$ функция $y = \arctg x$ возрастает от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$.

В самом деле, во-первых, будучи обратной функцией относительно возрастающей в интервале $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ функции $x = \operatorname{tg} y$, функция $\arctg x$ также возрастает, во-вторых, произвольное действительное значение m в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ функция $\arctg x$ имеет в точке $x = \operatorname{tg} m$ и, наконец,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg x = \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg x = -\frac{\pi}{2}.$$

В самом деле, пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное заданное число; при произвольном значении $x > \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$ имеем $\frac{\pi}{2} - \varepsilon < \arctg x < \frac{\pi}{2}$.

Следовательно, $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctg x = \frac{\pi}{2}$.

3°. $\arctg x$ — нечетная функция:

$$\arctg(-x) = -\arctg x$$

(доказательство такое же, как доказательство нечетности арксинуса).

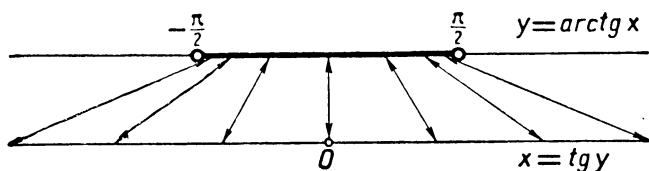
4°. Функция $y = \arctg x$ непрерывна в интервале $-\infty < x < +\infty$.

Доказательство аналогично доказательству непрерывности арксинуса; можно применить также общую теорему анализа о непрерывности обратной функции.

Из изложенного следует, что *взаимно обратные функции*

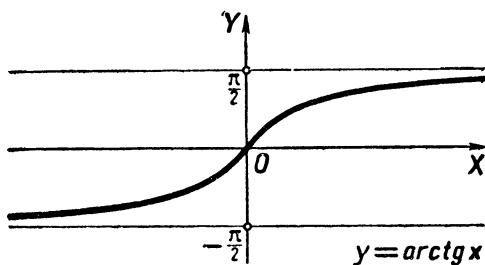
$$y = \arctg x \quad \text{и} \quad x = \operatorname{tg} y$$

гомеоморфно отображают друг на друга интервалы $-\infty < x < +\infty$ и $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ (черт. 141).



Черт. 141

Для построения графика функции $y = \arctg x$ следует построить график функции $x = \operatorname{tg} y$ и выделить ветвь, которая заключена в полосе $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ (черт. 142).



Черт. 142

Арккотангенс. Рассуждения, лежащие в основе определения и изучения свойств арккотангенса, аналогичны соответствующим рассуждениям, относящимся к арктангенсу, поэтому мы ограничимся кратким перечислением основных положений.

Функция $y = \operatorname{arccotg} x$ есть обратная функция относительно $x = \operatorname{ctg} y$ в интервале $0 < y < \pi$.

Функция $y = \operatorname{arccotg} x + k\pi$ есть обратная относительно $x = \operatorname{ctg} y$ в интервале $k\pi < y < (k+1)\pi$.

1°. Область определения функции $y = \operatorname{arccotg} x$ есть интервал $-\infty < x < +\infty$.

2°. В интервале $-\infty < x < +\infty$ функция $y = \operatorname{arccotg} x$ убывает от π до 0.

Имеем:

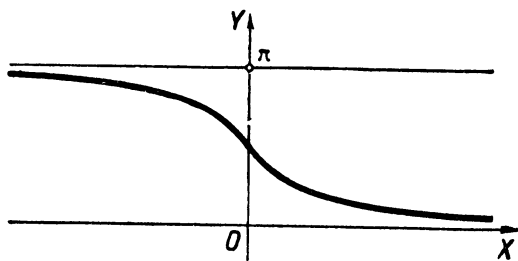
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x = \pi.$$

3°. Имеет место равенство

$$\operatorname{arc} \operatorname{ctg} (-x) = \pi - \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x.$$

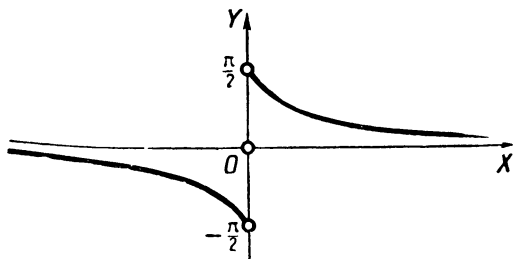
4°. Функция $y = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x$ непрерывна в интервале $-\infty < x < +\infty$. Взаимно обратные функции $y = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x$ и $x = \operatorname{ctg} y$ гомеоморфно отображают интервал $-\infty < x < +\infty$ на интервал $0 < y < \pi$.

График функции $y = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x$ можно построить, выделив ветвь котангенсоиды $x = \operatorname{ctg} y$, заключенную в полосе $0 < y < \pi$ (черт. 143).



Черт. 143

Примечание. В некоторых старых учебниках рекомендуется значение функции $\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x$ выбирать в интервале $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$; это мотивируется тем, что в интервале $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ котангенс может иметь любое заданное значение. Однако такой выбор был бы неудобен, так как интервал $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ содержит точку разрыва котангенса. Если бы мы условились выбирать значение арккотангенса в этом интервале, то функция $\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x$ оказалась бы разрывной. График этой функции изображен на чертеже 144.



Черт. 144

Рассмотренные в настоящем параграфе *функции*

$$\arcsin x, \quad \arccos x, \quad \operatorname{arctg} x \quad \text{и} \quad \operatorname{arccotg} x$$

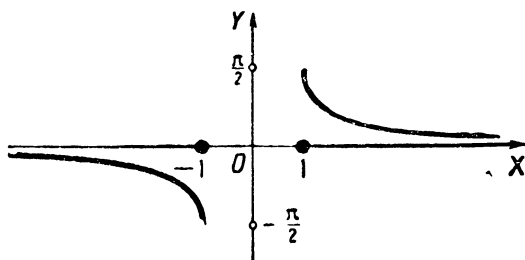
называются обратными тригонометрическими функциями, или кратко аркфункциями.

Примеры. В нижеследующих примерах приведены образцы исследования элементарных функций, заданных формулами, содержащими обратные тригонометрические операции.

1. Исследовать функции $\arcsin \frac{1}{x}$ и $\arccos \frac{1}{x}$ и построить их графики.

Решение. Рассмотрим подробно первую функцию $y = \arcsin \frac{1}{x}$.

Область определения устанавливается из условия $\left| \frac{1}{x} \right| \leq 1$, откуда $|x| \geq 1$; областью определения служит совокупность двух промежутков $-\infty < x \leq -1$ и $1 \leq x < +\infty$. Функция нечетная; на полусегменте $1 \leq x < +\infty$ промежуточный аргумент $\frac{1}{x}$ убывает от 1 до 0, а y убывает от $\frac{\pi}{2}$ до 0. В промежутке $-\infty < x \leq -1$ функция убывает от 0 до $-\frac{\pi}{2}$ (черт. 145).



Черт. 145

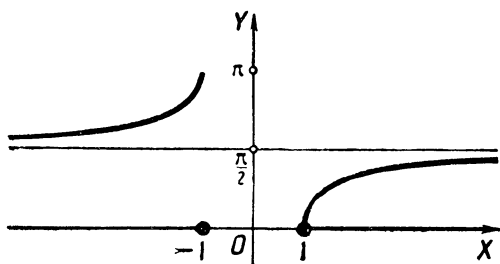
Заметим, что функция $y = \operatorname{arccosec} x$ определяется из условий $\operatorname{cosec} y = x$ и $-\frac{\pi}{2} \leq y < \frac{\pi}{2}$, но из условия $\operatorname{cosec} y = x$ следует $\sin y = \frac{1}{x}$, откуда $y = \arcsin \frac{1}{x}$. Итак, $\operatorname{arccosec} x = \arcsin \frac{1}{x}$.

На чертеже 146 представлен график функции $y = \arccos \frac{1}{x} = \operatorname{arcsec} x$. Область ее определения есть совокупность двух промежутков $-\infty < x \leq -1$ и $1 \leq x < \infty$. В первом промежутке y возрастает от $\frac{\pi}{2}$ до π , а во втором возрастает от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

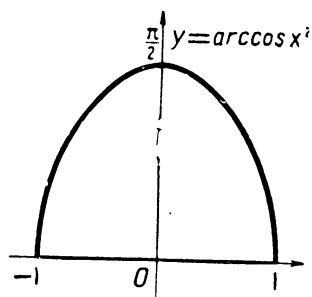
2. Исследовать функцию

$$y = \arccos x^2.$$

Решение. Область определения — сегмент $-1 \leq x \leq 1$, функция четная, на сегменте $0 \leq x \leq 1$ убывает от $\frac{\pi}{2}$ до 0, а на сегменте $-1 \leq x \leq 0$ возрастает от 0 до $\frac{\pi}{2}$ (черт. 147).



Черт. 146

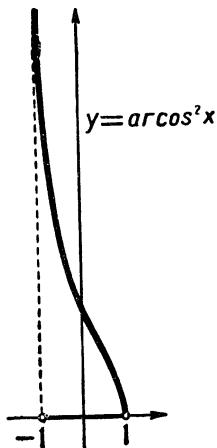


Черт. 147

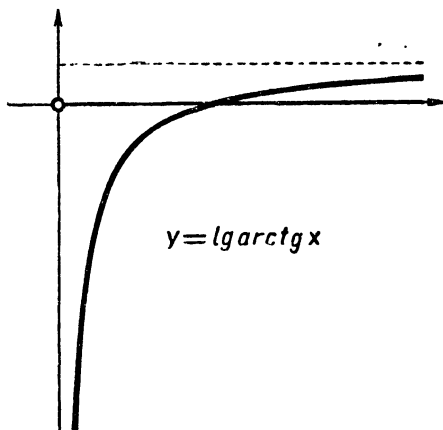
3. Исследовать функцию

$$y = \arccos^2 x.$$

Решение. Имеем: $y = u^2$, где $u = \arccos x$, на сегменте $[-1, 1]$ аргумент u убывает от π до 0, а y убывает от π^2 до 0 (черт. 148).



Черт. 148



Черт. 149

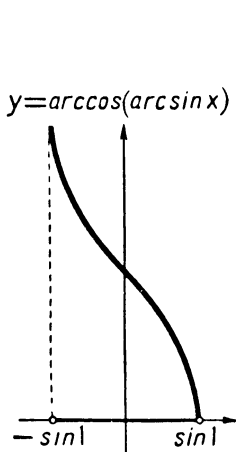
4. Исследовать функцию $y = \log \arctg x$ (основание логарифмов считаем большим 1).

Решение. Область определения находится из условия $\arctg x > 0$, откуда $0 < x < +\infty$. В интервале $0 < x < +\infty$ арктангенс возрастает от 0 до $\frac{\pi}{2}$, а y возрастает от $-\infty$ до $\log \frac{\pi}{2}$. Линия пересекает ось абсцисс в точке

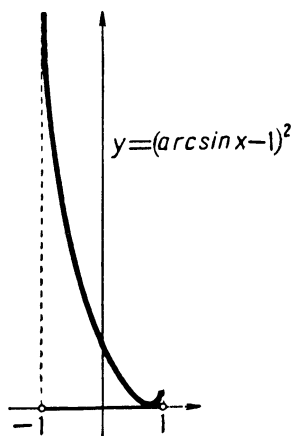
$x = \frac{\pi}{4}$ (черт. 149).

5. Исследовать функцию $y = \arccos(\arcsin x)$

Решение. Область определения находится из условия $-1 \leq \arcsin x \leq 1$, откуда $-\sin 1 \leq x \leq \sin 1$. На сегменте $[-\sin 1, \sin 1]$ промежуточный аргумент $\arcsin x$ возрастает от -1 до 1 , а y убывает от π до 0 (черт. 150).



Черт. 150



Черт. 151

6. Исследовать функцию $y = (\arcsin x - 1)^2$.

Решение. Область определения — сегмент $-1 \leq x \leq 1$.

Положим $u = \arcsin x - 1$. На сегменте $-1 \leq x < \sin 1$ аргумент u возрастает от $-\frac{\pi}{2} - 1 \approx -2,57$ до 0 , а y убывает от $(-2,57)^2 \approx 6,60$ до 0 ,

на сегменте $\sin 1 \leq x \leq 1$ аргумент u возрастает от 0 до $\frac{\pi}{2} - 1 \approx 0,57$, а y возрастает от 0 до $(0,57)^2 \approx 0,32$ (черт. 151).

7. Исследовать функцию

$$y = \arcsin(x^2 - 3x + 1).$$

Решение. Область определения находится из условия:

$$|x^2 - 3x + 1| \leq 1,$$

откуда получим систему квадратных неравенств:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 - 3x + 1 \leq 1 \\ x^2 - 3x + 1 \geq -1 \end{array} \right\} \quad \text{или} \quad \left. \begin{array}{l} x^2 - 3x \leq 0 \\ x^2 - 3x + 2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Первое неравенство выполняется на сегменте $0 \leq x \leq 3$, второе в каждом из двух промежутков $-\infty < x \leq 1$ и $2 \leq x < +\infty$. Областью определения служит их общая часть, т. е. совокупность двух сегментов:

$$0 \leq x \leq 1 \quad \text{и} \quad 2 \leq x \leq 3;$$

имеем: $y = \arcsin u$, где $u = x^2 - 3x + 1 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$.

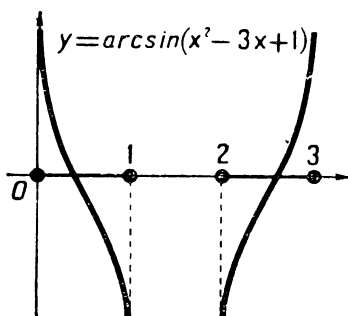
Результаты исследования даны в таблице:

x	0	$<x<$	1	—	2	$<x<$	3
$u=x^2-3x+1$	1	$\searrow$	-1	—	-1	$\nearrow$	1
$y = \arcsin u$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}$	—	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

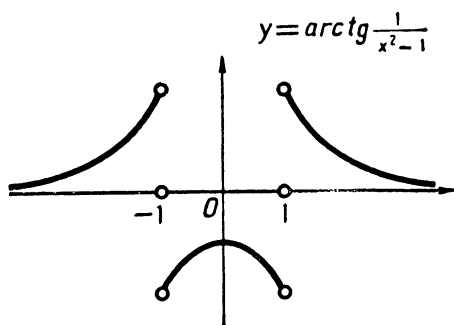
График представлен на чертеже 152.

8. Исследовать функцию

$$y = \arctg \frac{1}{x^2 - 1}.$$



Черт. 152



Черт. 153

Решение. Областью определения служит множество трех интервалов

$$-\infty < x < -1, \quad -1 < x < 1, \quad 1 < x < +\infty.$$

В силу четности достаточно исследовать функцию в двух промежутках

$$0 \leq x < 1 \quad \text{и} \quad 1 < x < +\infty;$$

имеем:

x	0	$<x<$	1	$<x<$	∞
$u = \frac{1}{x^2 - 1}$	-1	$\searrow$	$+\infty$ $-\infty$	$\searrow$	0
$y = \arctg u$	$-\frac{\pi}{4}$	$\searrow$	$\frac{\pi}{2}$ $-\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0

График представлен на чертеже 153.

§ 38. Тригонометрические операции над аркфункциями

Тригонометрические функции от одного и того же аргумента выражаются алгебраически одна через другую, поэтому в результате выполнения какой-либо тригонометрической операции над любой из аркфункций получается алгебраическое выражение.

В силу определения аркфункций

$$\sin(\arcsin x) = x, \quad \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2} \quad (1)$$

на сегменте $-1 \leq x \leq 1$ и

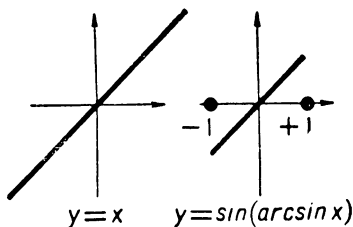
$$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \quad (2)$$

в интервале $-\infty < x < +\infty$.

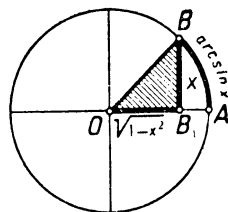
Равенства (1) не являются справедливыми при всех действительных значениях x . Так, при $|x| > 1$ выражение $\arcsin x$, а следовательно, и $\sin(\arcsin x)$ теряют смысл.

Равенства (1) суть тождества на сегменте $-1 \leq x \leq 1$. На чертеже 154 графически показано различие между функциями, заданными формулами

$$y = x \quad \text{и} \quad y = \sin(\arcsin x),$$



Черт. 154



Черт. 155

первая изображается биссектрисой координатного угла, а вторая — отрезком этой биссектрисы. Равенства (2) справедливы при всех действительных значениях x .

Каждое из равенств (1) и (2) является тождеством в том смысле, что оно справедливо при всех значениях x , содержащихся в области определения как правой, так и левой частей.

Ниже приведены всевозможные случаи выполнения тригонометрических операций над аркфункциями.

1. Положив в формуле $\cos \varphi = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}$ (выражающей косинус через синус), $\varphi = \arcsin x$ получим

$$\cos(\arcsin x) = \pm \sqrt{1 - [\sin(\arcsin x)]^2} = \pm \sqrt{1 - x^2}.$$

Перед радикалом следует взять знак $+$, ибо дуга $\varphi = \arcsin x$ принадлежит правой полуокружности (замкнутой) $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, на которой косинус неотрицателен. Итак, имеем:

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Геометрическая интерпретация (черт. 155). Число x есть ордината точки B , угол $AOB = \arcsin x$; величина отрезка OB_1 есть косинус этого угла: $\cos AOB = OB_1$.

По теореме Пифагора $OB_1 = \sqrt{1 - BB_1^2} = \sqrt{1 - x^2}$, откуда

$$\cos(AOB) = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

2. Подобным же образом найдем:

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1 - x^2}.$$

В силу неравенств $0 \leq \arccos x \leq \pi$ имеем $\sin(\arccos x) \geq 0$, а поэтому перед радикалом необходимо взять знак $+$.

Геометрическая интерпретация аналогична предыдущему случаю.

3. Из тождества $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\operatorname{ctg} \varphi}$ следует:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x) = \frac{1}{\operatorname{ctg}(\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x)} = \frac{1}{x}.$$

4. Имеем

$$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

5. Положим в формуле $\sin \varphi = \pm \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}$ (выражающей синус через тангенс) $\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$. Так как в правой полуокружности синус и тангенс имеют одинаковые знаки, то перед радикалом следует взять знак $+$. Следовательно,

$$\sin(\operatorname{arc} \operatorname{tg} x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Ниже дана сводка формул, получающихся в результате выполнения простейших тригонометрических операций над аркфункциями. Справедливость всех этих формул может быть установлена при помощи рассуждений, подобных приведенным выше.

$\sin (\operatorname{arc} \sin x) = x$	$\cos (\operatorname{arc} \sin x) = \sqrt{1-x^2}$
$\sin (\operatorname{arc} \cos x) = \sqrt{1-x^2}$	$\cos (\operatorname{arc} \cos x) = x$
$\sin (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\cos (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\sin (\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\cos (\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
$\operatorname{tg} (\operatorname{arc} \sin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{ctg} (\operatorname{arc} \sin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$
$\operatorname{tg} (\operatorname{arc} \cos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\operatorname{ctg} (\operatorname{arc} \cos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{tg} (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x) = x$	$\operatorname{ctg} (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x) = \frac{1}{x}$
$\operatorname{tg} (\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x) = \frac{1}{x}$	$\operatorname{ctg} (\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x) = x$

Выражения, находящиеся в правых частях каждого из написанных в таблице равенств, — алгебраические. Эти формулы являются лишь иначе написанными формулами, при помощи которых тригонометрические функции выражаются одна через другую.

Ниже приведены образцы выполнения различных преобразований посредством выведенных формул.

1. Преобразовать выражение $\sin (2 \operatorname{arc} \sin x)$.

Применив формулу $\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi$, имеем:

$$\sin (2 \operatorname{arc} \sin x) = 2 \sin (\operatorname{arc} \sin x) \cos (\operatorname{arc} \sin x) = 2x \sqrt{1-x^2}.$$

2. Подобным же образом устанавливается справедливость тождеств:

$$\cos (2 \operatorname{arc} \cos x) = \cos^2 (\operatorname{arc} \cos x) - \sin^2 (\operatorname{arc} \cos x) = 2x^2 - 1;$$

$$\operatorname{tg} (2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x) = \frac{2 \operatorname{tg} (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)}{1 - \operatorname{tg}^2 (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)} = \frac{2x}{1-x^2}.$$

3. Пользуясь теоремой сложения, получим:

$$\begin{aligned} \sin (\operatorname{arc} \sin x + \operatorname{arc} \sin y) &= \sin (\operatorname{arc} \sin x) \cos (\operatorname{arc} \sin y) + \\ &+ \cos (\operatorname{arc} \sin x) \sin (\operatorname{arc} \sin y) = x \sqrt{1-y^2} + y \sqrt{1-x^2}. \end{aligned}$$

4. Следуя приему, указанному в предыдущем примере, можно доказать следующие тождества:

$$\cos(\arccos x + \arccos y) = xy - \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2};$$

$$\sin(\arccos x + \arcsin y) = \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2} + xy;$$

$$\sin(\arcsin x - \arcsin y) = x \sqrt{1-y^2} - y \sqrt{1-x^2};$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y) = \frac{x+y}{1-xy};$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y) = \frac{x-y}{1+xy};$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\arcsin x + \arcsin y) &= \frac{\sin(\arcsin x + \arcsin y)}{\cos(\arcsin x + \arcsin y)} = \\ &= \frac{x \sqrt{1-y^2} + y \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2} - xy}. \end{aligned}$$

5. Положив в формулах

$$\sin 2\varphi = \frac{2 \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} \quad \text{и} \quad \cos \varphi = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}$$

$\varphi = \operatorname{arctg} x$, получим:

$$\sin(2 \operatorname{arctg} x) = \frac{2x}{1+x^2}, \quad \cos(2 \operatorname{arctg} x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

6. Преобразовать $\cos\left(\frac{1}{2} \arccos x\right)$.

Положив в формуле

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \varphi}{2}}, \quad \varphi = \arccos x,$$

получим:

$$\cos\left(\frac{1}{2} \arccos x\right) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}.$$

Перед радикалом взят знак $+$, так как дуга $\frac{1}{2} \arccos x$ принадлежит первой четверти, а потому левая часть неотрицательна.

7. Чтобы преобразовать выражение $\sin\left(\frac{1}{2} \arcsin x\right)$, положим в формуле (стр. 91)

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \pm \left(\frac{\sqrt{1 + \sin \varphi} - \sqrt{1 - \sin \varphi}}{2} \right) \quad \left(S'_{\frac{\alpha}{2}} \right)$$

$\varphi = \arcsin x$, тогда получим

$$\sin\left(\frac{1}{2} \arcsin x\right) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{2}. \quad (1)$$

В общей формуле $\left(S_{\frac{\alpha}{2}}'\right)$ следует в правой части взять знак $+$; в самом деле, функция $\sin\left(\frac{1}{2} \arcsin x\right)$ положительна при $x > 0$ и отрицательна при $x < 0$; такое же распределение знаков имеет место и для правой части равенства (1).

Аналогично устанавливается равенство

$$\cos\left(\frac{1}{2} \arcsin x\right) = \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{2}.$$

8. Для преобразования выражения $\cos(n \arccos x)$, где n — натуральное число, положим в тождестве (§ 17)

$$\cos n\alpha = \cos^n \alpha - C_n^2 \cos^{n-2} \alpha \sin^2 \alpha + C_n^4 \cos^{n-4} \alpha \sin^4 \alpha - \dots (C_{n\alpha})$$

$\alpha = \arccos x$. Если степени синуса выразить через косинус, то получим

$$\cos(n \arccos x) = T_n(\cos(\arccos x)) = T_n(x),$$

где $T_n(x)$ есть n -й полином Чебышева.

Следовательно, функция $\cos(n \arccos x)$, определенная на сегменте $[-1, 1]$, совпадает на этом сегменте с многочленом n -й степени $T_n(x)$.

Аналогичное выражение $\sin(n \arccos x)$ можно преобразовать, положив в тождестве (см. § 17)

$$\sin(n\alpha) = \sin \alpha U_n(\cos \alpha)$$

$\alpha = \arccos x$, тогда получим:

$$\sin(n \arccos x) = \sqrt{1-x^2} U_n(x).$$

Если положить в тождестве

$$\begin{aligned} \sin n\alpha &= C_n^1 \cos^{n-1} \alpha \sin \alpha - C_n^3 \cos^{n-3} \alpha \sin^3 \alpha + \\ &+ C_n^5 \cos^{n-5} \alpha \sin^5 \alpha - \dots \end{aligned} \quad (S_{n\alpha})$$

$\alpha = \arcsin x$, то получим:

$$\sin(n \arcsin x) = C_n^1 (1-x^2)^{\frac{n-1}{2}} x - C_n^3 (1-x^2)^{\frac{n-3}{2}} x^3 + \dots$$

9. Преобразовать $\operatorname{tg}(n \operatorname{arctg} x)$. При всяком целом n эта функция является рациональной.

В самом деле,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} n\alpha &= \frac{C_n^1 \sin \alpha \cos^{n-1} \alpha - C_n^3 \sin^3 \alpha \cos^{n-3} \alpha + \dots}{\cos^n \alpha - C_n^2 \sin^2 \alpha \cos^{n-2} \alpha + \dots} = \\ &= \frac{C_n^1 \operatorname{tg} \alpha - C_n^3 \operatorname{tg}^3 \alpha + \dots}{1 - C_n^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + C_n^4 \operatorname{tg}^4 \alpha - \dots}. \end{aligned} \quad (T_{n\alpha})$$

Положив в формуле $(T_{nn}) \alpha = \arctg x$, получим:

$$\operatorname{tg}(n \arctg x) = \frac{C_n^1 x - C_n^3 x^3 + \dots}{1 - C_n^2 x^2 + C_n^4 x^4 - \dots}.$$

Преобразования рассмотренного вида можно разнообразить, если брать различные комбинации аркфункций и теорем сложения.

§ 39. Соотношения между аркфункциями

Соотношения первого рода. Соотношениями первого рода будем называть соотношения между аркфункциями, вытекающими из зависимости между тригонометрическими функциями дополнительных дуг.

Теорема. При всех допустимых значениях x имеют место тождества:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}; \quad (1)$$

$$\arctg x + \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}. \quad (2)$$

Доказательство. В самом деле, дуги $\arcsin x$ и $\frac{\pi}{2} - \arccos x$ имеют одинаковый синус:

$$\sin(\arcsin x) = x \text{ (по определению арксинуса);}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) = \cos(\arccos x) = x$$

(формула приведения).

Обе дуги заключены на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, так как

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2} \text{ (по определению арксинуса);}$$

$$0 \leq \arccos x \leq \pi \text{ (по определению арккосинуса),}$$

$$\text{откуда } -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - \arccos x \leq \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, эти дуги равны

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x.$$

Аналогично доказывается второе тождество (2), ч. т. д.

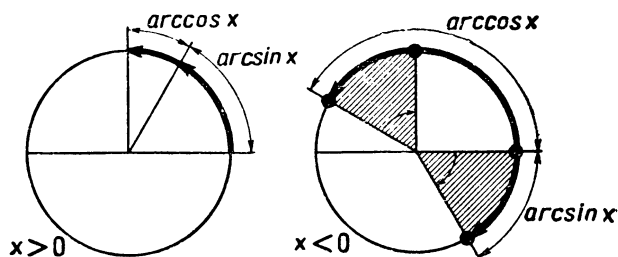
На чертеже 156 дано геометрическое пояснение равенства (1).

Соотношения второго рода. Соотношениями второго рода будем называть соотношения между аркфункциями, вытекающие из соотношений между значениями тригонометрических функций от одного и того же аргумента. Посредством соотно-

шений второго рода производятся преобразования одной аркфункции в другую (но от различных аргументов).

С л у ч а й 1. Значения двух данных аркфункций заключены в одной и той же полуокружности.

Пусть, например, рассматривается дуга α , заключенная в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.



Черт. 156

Данная дуга может быть представлена как в виде арксинуса, так и в виде арктангенса. В самом деле, дуга $\arcsin(\sin \alpha)$ имеет синус равный $\sin \alpha$ и заключена, так же как и α , в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, следовательно,

$$\alpha = \arcsin(\sin \alpha).$$

Аналогично можно дугу α представить в виде арктангенса:

$$\alpha = \arctg(\tg \alpha).$$

Если дуга α заключена в интервале $(0, \pi)$, то она может быть представлена как в виде арккосинуса, так и в виде арккотангенса:

$$\alpha = \arccos(\cos \alpha) = \operatorname{arccotg}(\operatorname{ctg} \alpha).$$

Так, например:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \arctg 1; \\ -\frac{\pi}{6} &= \arcsin \left(-\frac{1}{2}\right) = \arctg \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right). \end{aligned}$$

Аналогично

$$\frac{3\pi}{4} = \arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \operatorname{arccotg}(-1).$$

Ниже приведены формулы преобразования одних в другие аркфункции, значения которых содержатся в одной и той же полуокружности (правой или верхней).

1. Выражение $\arcsin x$ через арктангенс.

Пусть $y = \arcsin x$, тогда

$$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (*)$$

Дуга $\arcsin \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, по определению арктангенса, имеет тангенс равный $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ и расположена в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. В силу (*) дуга $\arcsin x$ имеет тот же тангенс и расположена в том же интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Следовательно,

$$\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (1)$$

(в интервале $(-1, 1)$).

2. Выражение $\arcsin x$ через арксинус.

Так как

$$\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

то

$$\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad (2)$$

в интервале $(-\infty, +\infty)$.

3. Выражение арккосинуса через арккотангенс.

Из равенства $\operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ следует тождество

$$\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (3)$$

Случай II. Рассмотрим две аркфункции, значения которых выбираются в различных промежутках (например, арксинус и арккосинус, арккосинус и арктангенс и т. п.). Если аргумент какой-либо аркфункции (т. е. значение тригонометрической функции) положителен, то соответствующая аркфункция (дуга), заключенная в первой четверти, может быть представлена при помощи любой аркфункции; так, например,

$$\frac{\pi}{6} = \arcsin \frac{1}{2} = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{arctg} \sqrt{3}.$$

Поэтому каждая из аркфункций от положительного аргумента может быть выражена посредством любой другой аркфункции.

Значение какой-либо аркфункции от отрицательного аргумента принадлежит либо промежутку от $-\frac{\pi}{2}$ до 0, либо промежутку от

$\frac{\pi}{2}$ до π и не может быть представлено в виде аркфункции, значение которой принадлежит другому (из этих двух) промежутку.

Так, например, дуга $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}\pi$ не может быть значением арксинуса. В этом случае

$$\frac{2}{3}\pi = \pi - \frac{\pi}{3} = \pi - \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ниже приведены формулы преобразования одних в другие аркфункции, значения которых выбираются в различных полуокружностях.

4. Выражение арксинуса через арккосинус.

Пусть $y = \arcsin x$; если $0 \leq x \leq 1$, то $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

Дуга y имеет косинус, равный $\sqrt{1-x^2}$, а потому

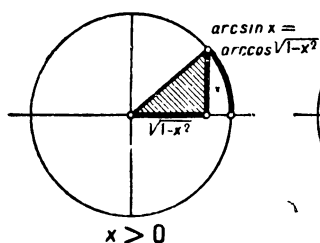
$$\arcsin x = \arccos \sqrt{1-x^2}.$$

При $-1 \leq x < 0$ это равенство выполняться не может. В самом деле, в этом случае $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x < 0$, а для функции $\arccos \sqrt{1-x^2}$ имеем:

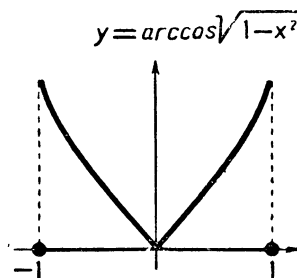
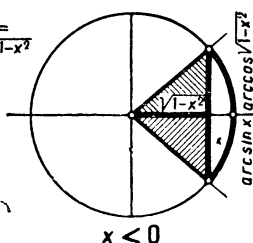
$$0 < \arccos \sqrt{1-x^2} \leq \frac{\pi}{2},$$

так как аргумент арккосинуса есть арифметический корень $\sqrt{1-x^2}$, т. е. число неотрицательное.

Расположение рассматриваемых дуг пояснено на чертеже 157.



Черт. 157



Черт. 158

При отрицательных значениях x имеем $x < 0$, а $-x > 0$ и

$$\arcsin x = -\arcsin(-x) = -\arccos \sqrt{1-x^2}.$$

Таким образом, имеем окончательно:

$$\arcsin x = \begin{cases} \arccos \sqrt{1-x^2}, & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ -\arccos \sqrt{1-x^2}, & \text{если } -1 \leq x < 0. \end{cases} \quad (4)$$

На чертеже 158 представлен график функции $\arccos \sqrt{1-x^2}$.

Область определения есть сегмент $[-1, 1]$; согласно равенству (4), закон соответствия можно выразить следующим образом:

$$\arccos \sqrt{1-x^2} = \begin{cases} \arcsin x, & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ -\arcsin x, & \text{если } -1 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

5. Аналогично установим, что при $0 \leq x \leq 1$ имеем:

$$\arccos x = \arcsin \sqrt{1-x^2},$$

если же $-1 \leq x \leq 0$, то

$$\arccos x = \pi - \arccos(-x) = \pi - \arcsin \sqrt{1-x^2}.$$

Таким образом,

$$\arccos x = \begin{cases} \arccos \sqrt{1-x^2}, & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ \pi - \arcsin \sqrt{1-x^2}, & \text{если } -1 \leq x \leq 0. \end{cases} \quad (5)$$

6. Из соотношения

$$\cos(\arctg x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

при $x \geq 0$ имеем:

$$\arctg x = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Если же $x < 0$, то

$$\arctg x = -\arctg(-x) = -\arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Итак,

$$\arctg x = \begin{cases} \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & \text{если } x \geq 0, \\ -\arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & \text{если } x \leq 0. \end{cases} \quad (6)$$

7. Если $0 < x \leq 1$, то $\arccos x = \arctg \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

При $-1 \leq x < 0$ имеем:

$$\begin{aligned} \arccos x &= \pi - \arccos(-x) = \pi - \arctg \frac{\sqrt{1-x^2}}{-x} = \\ &= \pi + \arctg \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}. \end{aligned}$$

Итак,

$$\arccos x = \begin{cases} \arctg \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & \text{если } 0 < x \leq 1, \\ \pi + \arctg \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & \text{если } -1 \leq x < 0. \end{cases} \quad (7)$$

Следуя методу, выясненному на приведенных примерах, установим справедливость следующих равенств:

$$8. \quad \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \begin{cases} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{1}{x}, & \text{если } x > 0, \\ \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{1}{x} - \pi, & \text{если } x < 0. \end{cases} \quad (8)$$

При $x > 0$ равенство (8) легко установить: если же $x < 0$, то $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x = -\operatorname{arc} \operatorname{tg} (-x) = -\operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{1}{-x} = -(\pi - \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{1}{x})$.

$$9. \quad \operatorname{arc} \sin x = \begin{cases} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & \text{если } 0 < x \leq 1, \\ \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \pi, & \text{если } -1 \leq x < 0. \end{cases} \quad (9)$$

$$10. \quad \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x = \begin{cases} \operatorname{arc} \sin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & \text{если } 0 < x, \\ \pi - \operatorname{arc} \sin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & \text{если } x < 0. \end{cases} \quad (10)$$

$$11. \quad \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x = \begin{cases} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x}, & \text{если } x > 0, \\ \pi + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x}, & \text{если } x < 0. \end{cases} \quad (11)$$

Примеры.

1. Исследовать функцию $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{1}{x}$.

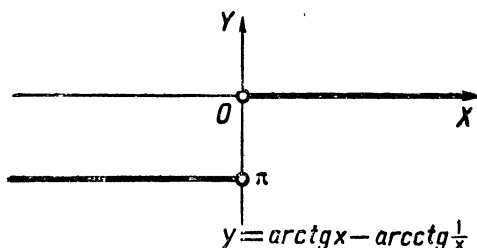
Решение. Эта функция определена для всех значений x , за исключением значения $x = 0$ (при $x = 0$ второе слагаемое теряет смысл). Воспользовавшись формулами (8), получим

$$y = \begin{cases} 0, & \text{если } x > 0, \\ -\pi, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

На чертеже 159 изображен график данной функции.

2. Исследовать функцию

$$y = \operatorname{arc} \sin \sqrt{1-x} + \operatorname{arc} \sin \sqrt{x}.$$



Черт 159

Решение. Первое слагаемое определено для значений $0 \leq x \leq 1$, второе — для тех же значений аргумента. Преобразуем первое слагаемое по формуле (4). Так как $0 \leq \sqrt{1-x} \leq 1$, то получим

$$\operatorname{arc} \sin \sqrt{1-x} = \operatorname{arc} \cos \sqrt{1-(1-x)} = \operatorname{arc} \cos \sqrt{x},$$

откуда:

$y = \arcsin \sqrt{1-x} + \arcsin \sqrt{x} = \arccos \sqrt{x} + \arcsin \sqrt{x} = \frac{\pi}{2}$ на сегменте $[0, 1]$.

3. Исследовать функцию

$$y = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Решение. Выражения, стоящие под знаками аркфункций, не превосходят по абсолютной величине единицы, поэтому данная функция определена для всех значений x . Преобразуем первое слагаемое по формуле (4):

$$\begin{aligned} \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} &= \arccos \sqrt{1 - \frac{1}{1+x^2}} = \arccos \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} = \\ &= \arccos \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}. \end{aligned}$$

Приняв во внимание равенство

$$\arccos |\xi| = \begin{cases} \arccos \xi, & \text{если } \xi \geq 0, \\ \pi - \arccos \xi, & \text{если } \xi < 0, \end{cases}$$

получим:

$$y = \begin{cases} 0, & \text{если } x \geq 0, \\ \pi - 2 \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

§ 40. Выполнение обратных тригонометрических операций над тригонометрическими функциями

При преобразовании выражений вида

$$\arcsin (\sin x), \arccos (\cos x), \arctg (\tg x), \operatorname{arccotg} (\operatorname{ctg} x)$$

следует принимать во внимание, в какой четверти находится аргумент x и в каком промежутке находится значение данной аркфункции. Рассмотрим, например, первое из данных выражений

$$y = \arcsin (\sin x).$$

Согласно определению арксинуса, y есть дуга правой полуокружности (замкнутой), синус которой равен $\sin x$;

$$\sin y = \sin x \quad \text{и} \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

Областью определения функции $\arcsin (\sin x)$ служит интервал $-\infty < x < +\infty$, так как при всех действительных значениях x значение промежуточного аргумента $u = \sin x$ содержится на сегменте $-1 \leq u \leq 1$. При произвольном действительном x значение y (в общем случае) отлично от значения x .

Так, например, при $x = \frac{\pi}{6}$ имеем:

$$y = \arcsin \left(\sin \frac{\pi}{6} \right) = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} = x;$$

но при $x = \frac{5}{6} \pi$

$$y = \arcsin \left(\sin \frac{5}{6} \pi \right) = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \neq x.$$

В силу периодичности синуса функция $\arcsin(\sin x)$ также является периодической с периодом 2π , поэтому достаточно исследовать ее на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$ величиной 2π .

Если значение x принадлежит сегменту $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, то $y = x$; на этом сегменте график функции совпадает с биссектрисой координатного угла.

Если значение x принадлежит сегменту $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$, то в этом случае дуга $\pi - x$ принадлежит сегменту $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; и, так как

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \text{ то имеем } y = \pi - x;$$

в этом промежутке график функции совпадает с прямой линией $y = \pi - x$. Если значение x принадлежит сегменту $\left[\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi\right]$, то, пользуясь периодичностью или путем непосредственной проверки, получим:

$$y = x - 2\pi.$$

Если значение x принадлежит сегменту $\left[-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$, то

$$y = -\pi - x.$$

Если значение x принадлежит сегменту $\left[-\frac{5}{2}\pi, -\frac{3}{2}\pi\right]$, то

$$y = x + 2\pi.$$

Вообще, если $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, то

$$y = x - 2k\pi,$$

и если $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$, то

$$y = (\pi - x) + 2k\pi.$$

График функции

$$y = \arcsin(\sin x)$$

представлен на чертеже 160. Это ломаная линия с бесконечным множеством прямолинейных звеньев.

Рассмотрим функцию

$$y = \arccos(\cos x).$$

Согласно определению арккосинуса, имеем

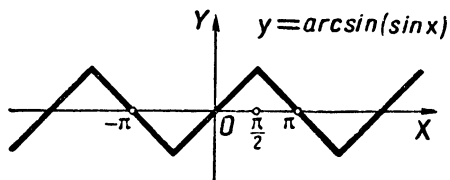
$$\cos y = \cos x, \text{ где } 0 \leq y \leq \pi.$$

Областью определения данной функции является множество всех действительных чисел; функция периодическая с периодом равным 2π . Если значение x принадлежит сегменту $[0, \pi]$, то $y = x$. Если x принадлежит сегменту $[\pi, 2\pi]$, то дуга $2\pi - x$ принадлежит сегменту $[0, \pi]$ и $\cos(2\pi - x) = \cos x$, поэтому

$$\arccos(\cos x) = 2\pi - x.$$

Следовательно, на сегменте $[\pi, 2\pi]$ имеем

$$y = 2\pi - x.$$



Черт. 160

Если x принадлежит сегменту $[2\pi, 3\pi]$, то

$$y = x - 2\pi.$$

Если x принадлежит сегменту $[3\pi, 4\pi]$, то

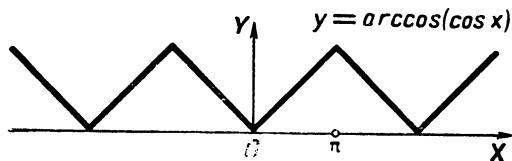
$$y = 4\pi - x.$$

Вообще, если $2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi$, то

$$y = x - 2k\pi;$$

если же $(2k-1)\pi \leq x \leq 2k\pi$, то $y = -x + 2k\pi$.

Графиком функции $y = \arccos(\cos x)$ является ломаная линия (черт. 161).



Черт. 161

Рассмотрим функцию

$$y = \arctg(\tg x).$$

Согласно определению арктангенса

$$\tg y = \tg x, \text{ где } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.$$

Выражение $\arctg(\operatorname{tg} x)$ имеет смысл при всех действительных значениях x , за исключением $x = \frac{2k+1}{2}\pi$. Следовательно, областью определения данной функции служит бесконечное множество интервалов

$$\dots \left(-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}\right), \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right), \dots,$$

$$\dots \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right) \dots$$

Данная функция периодическая с периодом равным π .

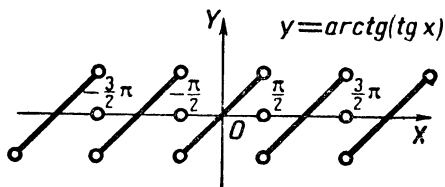
Имеем:

$$\begin{aligned} y &= x, & \text{если} & & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ y &= x - \pi, & \text{если} & & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi, \\ y &= x + \pi, & \text{если} & & -\frac{3}{2}\pi < x < -\frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

и вообще

$$y = x - k\pi, \quad \text{если} \quad -\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Для построения графика функции достаточно построить отрезок биссектрисы координатного угла $y = x$ в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (концы отрезка к графику не причисляются), а затем продолжить график периодически с периодом равным π (черт. 162). График состоит из бесконечного множества параллельных между собой прямых отрезков.



Черт. 162

Точки $\frac{\pi}{2} + k\pi$ являются точками разрыва первого рода функции $y = \arctg(\operatorname{tg} x)$, так как в этих точках предел функции не существует, но существуют различные между собой правые и левые пределы. Так, в точке $\frac{\pi}{2}$ левый предел равен (считаем $x < \frac{\pi}{2}$):

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} -} [\arctg(\operatorname{tg} x)] = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} -} x = \frac{\pi}{2},$$

а правый предел равен (считаем $x > \frac{\pi}{2}$):

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} +} [\arctg(\operatorname{tg} x)] = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} +} (x - \pi) = -\frac{\pi}{2}.$$

На чертеже 163 представлен график функции $y = \arcsin(\sin x)$; исследование этой функции предоставляем учащимся в виде упражнения.

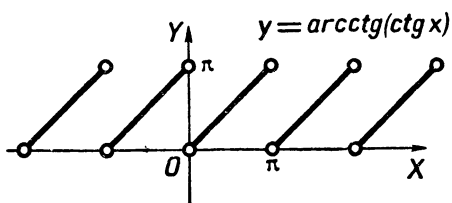
Отметим, что исследование функций $\arcsin(\sin x)$ и $\arcsin(\cos x)$

не представляет затруднений, так как, пользуясь соотношениями

$$\arcsin(\sin x) + \arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2}$$

и

$$\arcsin(\sin x) + \arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2},$$



Черт. 163

можно привести рассмотренные этих функций к уже изученным функциям.

Примеры.

1. Исследовать функцию $y = x - \arcsin(\sin x)$ и построить ее график.

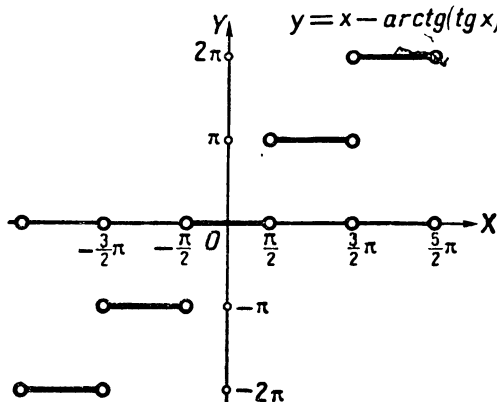
Решение. Областью определения является бесконечное множество интервалов

$$\left(\frac{2k-1}{2}\pi, \frac{2k+1}{2}\pi \right);$$

в этих интервалах

$$\arcsin(\sin x) = x - k\pi \text{ и } y = k\pi.$$

Графиком является изображенная на чертеже 164 ступенчатая разрывная линия.



Черт. 164

2. Исследовать функцию $y = x - \arcsin(\sin x)$ и построить ее график.

Решение. Если $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, то

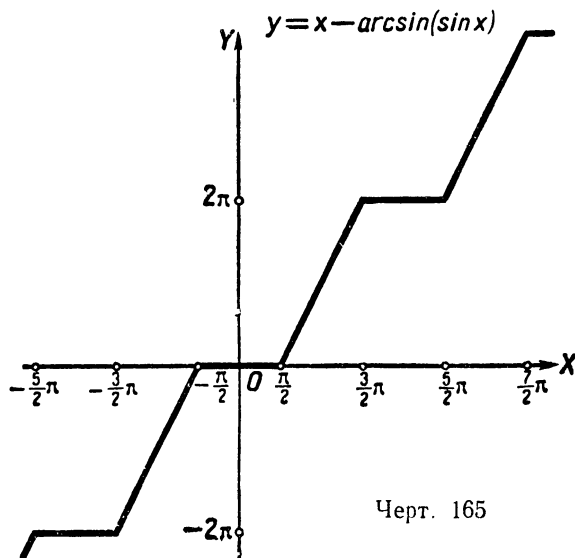
$$\arcsin(\sin x) = x - 2k\pi \text{ и } y = 2k\pi;$$

если

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, \text{ то } \arcsin(\sin x) = (\pi - x) + 2k\pi$$

и $y = 2x - (2k + 1)\pi$.

Графиком является изображенная на чертеже 165 ломаная линия.



Черт. 165

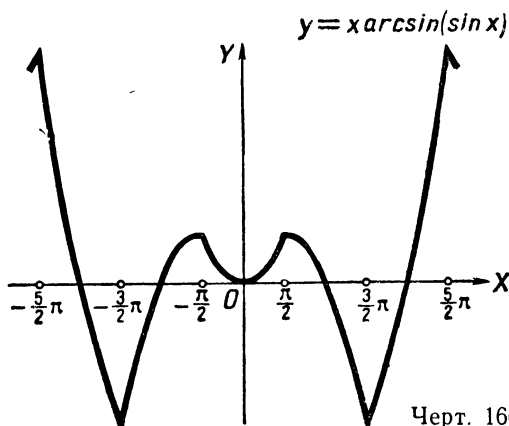
3. Исследовать функцию $y = x \arcsin(\sin x)$.

Решение. Если $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, то

$$y = x(x - 2k\pi);$$

если $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$, то $y = x[(2k + 1)\pi - x]$.

Графиком является ломаная линия, состоящая из параболических дуг (черт. 166).



Черт. 166

§ 41. Формулы сложения

Формулы сложения дают выражения для суммы или разности двух (или нескольких) аркфункций через какую-либо данную аркфункцию. Пусть дана сумма двух аркфункций; над этой суммой можно выполнить любую тригонометрическую операцию (см. § 38). В соответствии с этим дуга-сумма может быть выражена посредством любой данной аркфункции. Однако в различных случаях (при одних и тех же аркфункциях) могут получаться различные формулы в зависимости от промежутка, в котором заключена сумма, и от промежутка, в котором берется значение рассматриваемой аркфункции.

Сказанное пояснено ниже на числовых примерах.

Примеры.

1. Преобразовать в арксинус сумму $\gamma = \arcsin \frac{1}{3} + \arcsin \frac{1}{2}$.

Решение. Эта сумма является суммой двух дуг α и β , где

$$\alpha = \arcsin \frac{1}{3}, \quad \beta = \arcsin \frac{1}{2}.$$

В данном случае $\alpha < \frac{\pi}{4}$ (так как $\frac{1}{3} < \frac{\sqrt{2}}{2}$, а следовательно, $\arcsin \frac{1}{3} < \frac{\pi}{4}$), а также $\beta = \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{4}$, поэтому $\gamma < \frac{\pi}{2}$.

Вычислив синус дуги γ , получим:

$$\sin \gamma = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{3^2}} = \frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{6}.$$

Так как сумма γ заключена на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, то

$$\gamma = \arcsin \frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{6}.$$

2. Представить дугу γ , рассмотренную в предыдущем примере, в виде арктангенса.

Решение. Имеем:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\operatorname{tg} \left(\arcsin \frac{1}{2} \right) + \operatorname{tg} \left(\arcsin \frac{1}{3} \right)}{1 - \operatorname{tg} \left(\arcsin \frac{1}{2} \right) \operatorname{tg} \left(\arcsin \frac{1}{3} \right)} = \frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{2\sqrt{6} - 1},$$

откуда

$$\gamma = \arcsin \frac{1}{3} + \arcsin \frac{1}{2} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{2\sqrt{6} - 1}.$$

3. Представить посредством арктангенса сумму

$$\gamma = \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 2.$$

Решение. В данном случае (в отличие от предыдущих) дуга γ оканчивается во второй четверти, так как $\arctg 1 = \frac{\pi}{4}$, а $\arctg 2 > \frac{\pi}{4}$. Вычисляем

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{1+2}{1-2} = -3.$$

В рассматриваемом примере $\gamma \neq \arctg(-3)$, так как дуги γ и $\arctg(-3)$ заключены в различных интервалах,

$$\frac{\pi}{2} < \gamma < \pi, \text{ а } -\frac{\pi}{2} < \arctg(-3) < 0.$$

В данном случае

$$\gamma = \pi + \arctg(-3) = \pi - \arctg 3.$$

4. Представить дугу γ , рассмотренную в предыдущем примере, в виде арккосинуса.

Решение. Имеем

$$\cos \gamma = \cos(\arctg 1 + \arctg 2) = -\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Обе дуги γ и $\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$ расположены в верхней полуокружности и имеют одинаковый косинус, следовательно, эти дуги равны:

$$\gamma = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right).$$

Так как суммы и разности любых аркфункций можно выражать при помощи произвольной аркфункции, то можно получать самые разнообразные формулы сложения. Однако все эти формулы выводятся посредством однотипных рассуждений. Ниже в качестве образца даются некоторые из формул сложения, по этим образцам можно получить аналогичные формулы в различных прочих случаях.

Формулы сложения аркфункций от положительных аргументов. Пусть α и β — две дуги, заключенные в промежутке от 0 до $\frac{\pi}{2}$ (первая четверть):

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ и } 0 < \beta < \frac{\pi}{2}.$$

Сумма $\alpha + \beta$ заключена в верхней полуокружности: $0 < \alpha + \beta < \pi$, следовательно, ее можно представить в виде аркфункции, значение которой выбирается в том же интервале, т. е. в виде арккосинуса, а также в виде арктангенса:

$$\alpha + \beta = \arccos[\cos(\alpha + \beta)] = \arccos(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta);$$

$$\alpha + \beta = \operatorname{arctg}[\operatorname{ctg}(\alpha + \beta)] = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}.$$

Разность $\alpha - \beta$ заключена в правой полуокружности:

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2},$$

следовательно, она может быть представлена в виде арксинуса, а также в виде арктангенса:

$$\alpha - \beta = \arcsin [\sin (\alpha - \beta)] = \arcsin (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta),$$

$$\alpha - \beta = \arctg [\operatorname{tg} (\alpha - \beta)] = \arctg \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

Так как значение всякой аркфункции от положительного аргумента заключено в интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, то сумму двух аркфункций от положительных аргументов можно представить в виде арккосинуса, а также в виде аркотангенса, а разность двух аркфункций от положительных аргументов можно представить в виде арксинуса, а также в виде арктангенса.

Ниже приведены образцы соответствующих преобразований.

1) Преобразовать в арккосинус $\arcsin x + \arcsin y$, где $0 < x < 1$ и $0 < y < 1$.

Имеем:

$$\cos (\arcsin x + \arcsin y) = \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2} - xy$$

(см. § 38), откуда

$$\arcsin x + \arcsin y = \arccos (\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2} - xy).$$

2) Преобразовать в арксинус $\arcsin x - \arcsin y$, где $0 < x < 1$ и $0 < y < 1$.

Имеем:

$$\sin (\arcsin x - \arcsin y) = x \sqrt{1-y^2} - y \sqrt{1-x^2},$$

откуда

$$\arcsin x - \arcsin y = \arcsin (x \sqrt{1-y^2} - y \sqrt{1-x^2}).$$

3) Преобразовать в арктангенс $\arccos x - \arccos y$, где $0 < x < 1$ и $0 < y < 1$.

Имеем:

$$\operatorname{tg} (\arccos x - \arccos y) = \frac{y \sqrt{1-x^2} - x \sqrt{1-y^2}}{xy + \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2}},$$

откуда

$$\arccos x - \arccos y = \arctg \frac{y \sqrt{1-x^2} - x \sqrt{1-y^2}}{xy + \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2}}.$$

Изложенным способом устанавливаются прочие различные формулы сложения аркфункций от положительных аргументов; нескольких таких формул приводятся ниже.

$$4) \arccos x + \arccos y = \arccos (xy - \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2}).$$

$$5) \arctg x + \arctg y = \arccos \left(\frac{1 - xy}{\sqrt{1+x^2} \sqrt{1+y^2}} \right).$$

$$6) \operatorname{arc} \sin x - \operatorname{arc} \operatorname{tg} y = \operatorname{arc} \sin \frac{x - y \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 + y^2}}.$$

Ф о р м у л ы с л о ж е н и я а р к ф у н к ц и й о т п р о и з в о л ь н ы х а р г у м е н т о в.

1) Выразить сумму

$$\gamma = \operatorname{arc} \sin x + \operatorname{arc} \sin y$$

через арксинус.

По определению арксинуса,

$$-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{arc} \sin x \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{arc} \sin y \leq \frac{\pi}{2},$$

откуда

$$-\pi \leq \operatorname{arc} \sin x + \operatorname{arc} \sin y \leq \pi.$$

Для дуги γ возможны следующие три случая.

$$\text{С л у ч а й I: } -\frac{\pi}{2} \leq \gamma \leq \frac{\pi}{2}.$$

Если числа x и y разных знаков или хотя бы одно из них равно нулю, то имеет место случай I. В самом деле, при $0 \leq x \leq 1$ и $-1 \leq y \leq 0$ имеем:

$$0 \leq \operatorname{arc} \sin x \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{arc} \sin y \leq 0,$$

откуда

$$-\frac{\pi}{2} \leq \gamma \leq \frac{\pi}{2}.$$

При $x > 0$, $y > 0$ для дуги γ имеет место одна из следующих двух систем неравенств:

$$\text{а) } 0 < \gamma \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{или} \quad \text{б) } \frac{\pi}{2} < \gamma \leq \pi.$$

Необходимым и достаточным признаком, позволяющим отличить один от другого случаи а) и б), является выполнение неравенства

$$\cos \gamma \geq 0 \quad \text{в случае а) и} \quad \cos \gamma < 0 \quad \text{в случае б).}$$

В самом деле, взаимно исключающие друг друга соотношения а) и б) влекут за собой взаимно исключающие следствия $\cos \gamma \geq 0$ и $\cos \gamma < 0$ (соответственно), а потому эти следствия служат необходимыми и достаточными признаками наличия данных соотношений.

Вычислив $\cos \gamma$, получим:

$$\cos \gamma = \cos(\operatorname{arc} \sin x + \operatorname{arc} \sin y) = \sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - y^2} - xy.$$

При $x > 0$, $y > 0$ наличие случая I означает выполнение неравенств а), т. е. $\cos \gamma \geq 0$ или

$$\sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - y^2} \geq xy,$$

откуда $(1 - x^2)(1 - y^2) \geq x^2 y^2$ и, следовательно, $x^2 + y^2 \leq 1$.

Наличие случая I при $x < 0$, $y < 0$ означает выполнение неравенств

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x + \arcsin y < 0;$$

но тогда для положительных аргументов $-x$ и $-y$ имеет место случай I, а потому

$$(-x)^2 + (-y)^2 \leq 1 \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

С л у ч а й II: $\frac{\pi}{2} < \gamma < \pi$.

В этом случае $x > 0$, $y > 0$, т. е. выполняются неравенства б); из условия $\cos \gamma < 0$ получим $x^2 + y^2 > 1$.

Случай III: $-\pi \leq \gamma < -\frac{\pi}{2}$.

Этот случай имеет место при $x < 0$, $y < 0$ и

$$-\pi \leq \arcsin x + \arcsin y < -\frac{\pi}{2}.$$

Изменив знаки на противоположные придем к предыдущему случаю:

$$\pi \geq \arcsin(-x) + \arcsin(-y) > \frac{\pi}{2},$$

откуда $x^2 + y^2 > 1$.

Из сопоставления результатов следует, что признаком случая I при одинаковых по знаку значениях аргументов (т. е. при $xy > 0$) может служить неравенство $x^2 + y^2 \leq 1$. Случай II имеет место, если $x > 0$, $y > 0$ и $x^2 + y^2 > 1$. Случай III имеет место, если $x < 0$, $y < 0$ и $x^2 + y^2 > 1$.

Дуги γ и $\gamma' = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$ имеют одинаковый синус, но (по определению арксинуса) $-\frac{\pi}{2} \leq \gamma' \leq \frac{\pi}{2}$, следовательно, в случае I $\gamma = \gamma'$; в случае II $\gamma = \pi - \gamma'$ и в случае III $\gamma = -\pi - \gamma'$.

Итак, имеем окончательно:

$$\arcsin x + \arcsin y = \begin{cases} \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}); \\ \quad xy \leq 0 \text{ или } x^2 + y^2 \leq 1. \\ \pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}); \\ \quad x > 0, y > 0 \text{ и } x^2 + y^2 > 1. \\ -\pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}); \\ \quad x < 0, y < 0 \text{ и } x^2 + y^2 > 1. \end{cases} \quad (1)$$

Пример.

$$1. \quad \arcsin \frac{3}{5} + \arcsin \frac{5}{13} = \arcsin \frac{56}{65}; \quad \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{5}{13}\right)^2 < 1.$$

2. Заменяя в формуле (1) x на $-x$, получим:

$$\arcsin x - \arcsin y = \begin{cases} \arcsin(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}); \\ \quad xy \geq 0, \text{ или } x^2 + y^2 \leq 1. \\ \pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}); \\ \quad x > 0, y < 0 \text{ и } x^2 + y^2 > 1. \\ -\pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}); \\ \quad x < 0, y > 0 \text{ и } x^2 + y^2 > 1. \end{cases} \quad (2)$$

3. Выразить сумму $\gamma = \arccos x + \arccos y$ через арккосинус. В силу основных неравенств

$$0 \leq \arccos x \leq \pi \quad \text{и} \quad 0 \leq \arccos y \leq \pi,$$

имеем

$$0 \leq \arccos x + \arccos y \leq 2\pi.$$

Возможны следующие два случая.

С л у ч а й I: $0 \leq \gamma \leq \pi$. Если $0 \leq \arccos x + \arccos y \leq \pi$, то $\arccos x \leq \pi - \arccos y$.

Приняв во внимание, что обе дуги $\arccos x$ и $\pi - \arccos y$ расположены в промежутке $[0, \pi]$ и что в этом промежутке косинус убывает, получим:

$$x \geq \cos(\pi - \arccos y) = -\cos(\arccos y) = -y,$$

и, следовательно: $x \geq -y$, откуда $x + y \geq 0$.

С л у ч а й II: $\pi < \gamma \leq 2\pi$. Если

$$\pi < \arccos x + \arccos y \leq 2\pi,$$

то

$$\pi - \arccos y < \arccos x,$$

откуда при помощи рассуждений, аналогичных предыдущим, получим $x + y < 0$. Из сопоставления результатов следует, что случай I имеет место, если $x + y \geq 0$, а случай II, если $x + y < 0$.

Из равенства

$$\cos(\arccos x + \arccos y) = xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$$

следует, что дуги

$$\gamma = \arccos x + \arccos y \quad \text{и} \quad \gamma' = \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})$$

имеют одинаковый косинус.

В случае I $\gamma = \gamma'$; в случае II $\gamma = 2\pi - \gamma'$, следовательно,

$$\arccos x + \arccos y = \begin{cases} \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}); \\ \quad x + y \geq 0. \\ 2\pi - \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}); \\ \quad x + y < 0. \end{cases} \quad (3)$$

4. Заменяя y на $-y$ и приняв во внимание, что

$$\arccos(-y) = \pi - \arccos y$$

и

$$\begin{aligned} \arccos(-xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}) &= \\ &= \pi - \arccos(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}), \end{aligned}$$

получим:

$$\arccos x - \arccos y = \begin{cases} -\arccos(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}), & x \geq y, \\ \arccos(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}), & x < y. \end{cases} \quad (4)$$

Пример.

$$\arccos \frac{3}{7} + \arccos \frac{9}{11} = \arccos \left(-\frac{13}{77} \right).$$

5. Выразить сумму $\gamma = \arctg x + \arctg y$ через арктангенс. Из неравенств

$$-\frac{\pi}{2} < \arctg x < \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \frac{\pi}{2} < \arctg y < \frac{\pi}{2}$$

следует

$$-\pi < \arctg x + \arctg y < \pi.$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны соответствующим рассуждениям, относящимся к сумме арксинусов.

Возможны следующие случаи:

$$\text{случай I: } -\frac{\pi}{2} \leq \gamma \leq \frac{\pi}{2};$$

$$\text{случай II: } \frac{\pi}{2} < \gamma < \pi;$$

$$\text{случай III: } -\pi < \gamma < -\frac{\pi}{2}.$$

В случае I дуга γ оканчивается в правой (замкнутой) полуокружности и в случаях II и III — в левой (открытой) полуокружности. В случае I имеем $\cos \gamma \geq 0$, а в случаях II и III $\cos \gamma < 0$.

Так как

$$\cos \gamma = \frac{1 - xy}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}},$$

то в случае I $xy \leq 1$. В случаях II и III $xy > 1$.

С л е д с т в и я:

а) Если числа x и y разных знаков или хотя бы одно из них

равно нулю, то имеет место случай I. Если x и y — числа одного знака, то случай I имеет место при $xy < 1$

b) Случай II имеет место при $x > 0, y > 0$, если $xy > 1$.

c) Случай III имеет место при $x < 0, y < 0$, если $xy > 1$.

d) Равенство $\gamma = \pm \frac{\pi}{2}$ имеет место при $xy = 1$ (тогда $\cos \gamma = 0$);
если же

$$xy \neq 1, \quad \text{то} \quad \gamma \neq \pm \frac{\pi}{2}.$$

Дуга

$$\gamma' = \arctg \frac{x+y}{1-xy}$$

содержится в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ и $\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \gamma'$. Следовательно, $\gamma = \gamma'$ в случае I, $\gamma = \pi + \gamma'$ в случае II и $\gamma = -\pi + \gamma'$ в случае III. Из сопоставления изложенного получим формулу:

$$\arctg x + \arctg y = \begin{cases} \arctg \frac{x+y}{1-xy}; & xy < 1 \\ \pi + \arctg \frac{x+y}{1-xy}; & x > 0, xy > 1 \\ -\pi + \arctg \frac{x+y}{1-xy}; & x < 0, xy > 1. \end{cases} \quad (5)$$

Если $xy = 1$, то выражение $\arctg \frac{x+y}{1-xy}$ не имеет смысла, в этом случае дуга γ не имеет тангенса и не может быть представлена в виде арктангенса.

Так, например,

$$\arctg 3 + \arctg \frac{1}{2} = \pi + \arctg (-7) = \pi - \arctg 7.$$

В данном случае $3 \cdot \frac{1}{2} > 1$.

6. Заменяя y на $-y$, получим:

$$\arctg x - \arctg y = \begin{cases} \arctg \frac{x-y}{1+xy}; & xy > -1 \\ \pi + \arctg \frac{x-y}{1+xy}; & x > 0, xy < -1 \\ -\pi + \arctg \frac{x-y}{1+xy}; & x < 0, xy < -1. \end{cases} \quad (6)$$

Если в выведенных формулах сложения положить $x = y$, то получим следующие формулы «удвоения»:

$$2 \arcsin x = \begin{cases} \arcsin (2x \sqrt{1-x^2}); & |x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \pi - \arcsin (2x \sqrt{1-x^2}); & \frac{1}{\sqrt{2}} < x \leq 1 \\ -\pi - \arcsin (2x \sqrt{1-x^2}); & -1 \leq x < -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad (7)$$

$$2 \arccos x = \begin{cases} \arccos (2x^2 - 1); & 0 \leq x \leq 1 \\ 2\pi - \arccos (2x^2 - 1); & -1 \leq x < 0. \end{cases} \quad (8)$$

$$2 \operatorname{arctg} x = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2}; & |x| < 1 \\ \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2} + \pi; & x > 1 \\ \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2} - \pi; & x < -1. \end{cases} \quad (9)$$

Следуя методу, изложенному на рассмотренных выше примерах, можно установить формулы деления пополам (см. стр. 232):

$$\frac{1}{2} \arcsin x = \arcsin \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{2}; \quad (10)$$

$$\frac{1}{2} \arccos x = \arccos \sqrt{\frac{1+x}{2}}; \quad (11)$$

$$\frac{1}{2} \arcsin x = \begin{cases} \arccos \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{2}, & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ -\arccos \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{2}, & \text{если } -1 \leq x \leq 0. \end{cases} \quad (12)$$

Выведенными формулами не ограничиваются возможные преобразования суммы аркфункций. Не обязательно рассматривать сумму или разность одноименных аркфункций. Так, например, можно вывести формулы преобразования суммы $\arcsin x + \operatorname{arctg} y$ в любую другую аркфункцию. Можно было бы рассмотреть формулы преобразования суммы большего числа, чем двух аркфункций. Приемы выполнения подобных преобразований выяснены на рассмотренных случаях.

§ 42. Примеры преобразования сумм аркфункций

При преобразовании суммы аркфункций с конкретными числовыми данными следует по возможности избегать пользования громоздкими общими формулами, и нет необходимости помнить эти формулы наизусть. Вычисление тригонометрических

функций от аркфункций и их сумм выполняется на основе теорем сложения и известных соотношений, имеющих место для тригонометрических функций. По конкретным числовым данным во многих случаях бывает возможно непосредственно установить, в какой четверти оканчивается рассматриваемая сумма аркфункций.

Примеры.

В примерах 1—5 показаны различные преобразования сумм и разностей аркфункций с числовыми данными.

1. Доказать, что

$$\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \arctg \frac{\sqrt{2}}{2} = \arctg (\sqrt{2} + 1)^2.$$

Решение. Имеем:

$$\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}, \quad \text{а} \quad \arctg \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\pi}{4},$$

ибо $\frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ и $\arctg \frac{\sqrt{2}}{2} < \arctg 1 = \frac{\pi}{4}$. Следовательно, сумма дуг в правой части доказываемого равенства заключена в первой четверти. Взяв тангенс от левой части, получим:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \left(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \arctg \frac{\sqrt{2}}{2} \right) &= \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \arctg \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \\ &= \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} = (\sqrt{2} + 1)^2. \end{aligned}$$

Следовательно, правая и левая части равны (как дуги в I четверти).

2. Доказать, что

$$\arccos \frac{1}{2} + \arccos \frac{1}{7} = \arccos \left(-\frac{11}{14} \right).$$

Решение. Левая часть есть дуга, содержащаяся в верхней полуокружности. Вычислим косинус левой части:

$$\begin{aligned} \cos \left(\arccos \frac{1}{2} + \arccos \frac{1}{7} \right) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} - \sqrt{1 - \frac{1}{4}} \sqrt{1 - \frac{1}{49}} = \\ &= \frac{1}{14} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{48}}{7} = -\frac{11}{14}. \end{aligned}$$

Правая часть также содержится в верхней полуокружности, имеет тот же косинус, что и левая, следовательно, дуги равны.

3. Доказать, что

$$2 \arctg \frac{1}{5} + \arctg \frac{1}{4} = \arctg \frac{32}{43}.$$

Решение. Так как $\frac{1}{5} < 1$, то $\arctg \frac{1}{5} < \frac{\pi}{4}$, а потому дуга $2 \arctg \frac{1}{5}$ содержится в первой четверти. Следовательно, левая часть содержится

в верхней полуокружности. Имеем

$$\operatorname{tg}\left(2 \arctg \frac{1}{5}\right)=\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}}=\frac{5}{12}.$$

Вычисляем тангенс левой части

$$\operatorname{tg}\left(2 \arctg \frac{1}{5}+\arctg \frac{1}{4}\right)=\frac{\frac{5}{12}+\frac{1}{4}}{1-\frac{5}{12} \cdot \frac{1}{4}}=\frac{32}{43}.$$

Так как тангенс левой части положителен, то она содержится в первой четверти. Левая и правая части суть дуги первой четверти, имеющие одинаковый тангенс, следовательно, эти дуги равны.

4. Доказать, что

$$\arccos \sqrt{\frac{2}{3}}-\arccos \frac{\sqrt{6}+1}{2 \sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}.$$

Решение. Левая часть заключена в правой полуокружности; вычислим ее синус:

$$\begin{aligned} & \sin \left(\arccos \sqrt{\frac{2}{3}}-\arccos \frac{\sqrt{6}+1}{2 \sqrt{3}}\right)= \\ & =\sqrt{1-\frac{2}{3}} \cdot \frac{\sqrt{6}+1}{2 \sqrt{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}+1}{2 \sqrt{3}}\right)^2}= \\ & =\frac{\sqrt{6}+1}{6}-\frac{\sqrt{2}}{6} \sqrt{5-2 \sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}+1}{6}-\frac{\sqrt{2}}{6}(\sqrt{3}-\sqrt{2})=\frac{1}{2} . \end{aligned}$$

Следовательно, левая часть равна $\frac{\pi}{6}$.

5. Доказать, что

$$\arctg \frac{1}{3}+\arctg \frac{1}{5}+\arctg \frac{1}{7}+\arctg \frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}.$$

Решение. Каждая из дуг в левой части меньше, чем $\frac{\pi}{4}$, а потому левая часть содержится в верхней полуокружности. Вычисляем (последовательно) тангенс левой части:

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg}\left(\arctg \frac{1}{3}+\arctg \frac{1}{5}\right)=\frac{4}{7} ; \\ & \operatorname{tg}\left[\left(\arctg \frac{1}{3}+\arctg \frac{1}{5}\right)+\arctg \frac{1}{7}\right]=\frac{\frac{4}{7}+\frac{1}{7}}{1-\frac{4}{49}}=\frac{7}{9} ; \\ & \operatorname{tg}\left[\left(\arctg \frac{1}{3}+\arctg \frac{1}{5}\right)+\arctg \frac{1}{8}\right]=\frac{\frac{7}{9}+\frac{1}{8}}{1-\frac{7}{9} \cdot \frac{1}{8}}=1 . \end{aligned}$$

Единственная дуга в интервале $(0, \pi)$, имеющая тангенс, равный 1, есть $\frac{\pi}{4}$.

Непосредственное преобразование сумм аркфункций (без пользования готовыми формулами) можно успешно применять также и в ряде случаев, когда аргументы аркфункций являются буквенными выражениями (т. е. содержат буквы-аргументы либо параметры)

Примеры. 6. Вычислить сумму

$$y = \arctg x + \arctg \frac{1-x}{1+x}.$$

Решение. Имеем:

$$\operatorname{tg} y = \frac{x + \frac{1-x}{1+x}}{1 - x \frac{1-x}{1+x}} = 1.$$

Так как $-\pi < y < \pi$, то $y = \frac{\pi}{4}$ либо $y = -\frac{3}{4}\pi$. Равенство $y = -\frac{3}{4}\pi$ может иметь место лишь при условии, если выражения находящиеся под знаками обоих арктангенсов, отрицательны:

$$x < 0 \quad \text{и} \quad \frac{1-x}{1+x} < 0.$$

Эта система неравенства удовлетворяется, если $x < -1$.

Итак имеем:

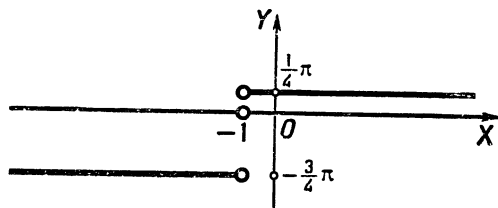
$$y = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & \text{если } x > -1, \\ -\frac{3}{4}\pi, & \text{если } x < -1. \end{cases}$$

На чертеже 167 представлен график данной функции.

7 Доказать тождество

$$2 \arctg \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \arccos x$$

Решение. Область определения левой части находится из условия $\frac{1-x}{1+x} \geq 0$, откуда



Черт. 167

$$\text{I) } \begin{cases} 1-x \geq 0 \\ 1+x > 0 \end{cases},$$

или

$$\text{II) } \begin{cases} 1-x \leq 0 \\ 1+x < 0 \end{cases}.$$

Первая система неравенств имеет общее решение $-1 < x \leq 1$, а вторая противоречива. Областью определения правой части служит сегмент

$-1 \leq x \leq 1$. Следовательно, совместное рассмотрение левой и правой частей доказываемого тождества возможно в промежутке $-1 < x \leq 1$. Левая и правая части содержатся каждая в промежутке $[0, \pi]$. Для доказательства тождества достаточно установить равенство косинусов от правой и от левой частей. Имеем:

$$\begin{aligned} \cos \left(2 \arctg \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right) &= 2 \cos^2 \left(\arctg \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right) - 1 = \\ &= \frac{2}{1 + \frac{1-x}{1+x}} - 1 = x, \end{aligned}$$

откуда следует справедливость доказываемого тождества

Примечание. Тождество можно доказать, положив в формуле

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}, \quad \alpha = \arccos x.$$

8. Вычислить сумму

$$\begin{aligned} \arctg \frac{x}{1+1 \cdot 2 \cdot x^2} + \arctg \frac{x}{1+2 \cdot 3 \cdot x^2} + \dots + \arctg \frac{x}{1+n(n+1)x^2} = \\ = \sum_{k=1}^n \arctg \frac{x}{1+k(k+1)x^2}. \end{aligned}$$

Решение. Рассмотрим разность

$$\gamma = \arctg (k+1)x - \arctg kx,$$

где k — натуральное число; эта разность содержится в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Так, при $x \geq 0$ имеем:

$$0 \leq \arctg kx \leq \arctg (k+1)x < \frac{\pi}{2}$$

и $0 \leq \gamma < \frac{\pi}{2}$. Аналогично при $x \leq 0$ получим $-\frac{\pi}{2} < \gamma \leq 0$. Следовательно, дугу γ можно преобразовать в арктангенс:

$$\gamma = \arctg \frac{(k+1)x - kx}{1 + (k+1)kx^2} = \arctg \frac{x}{1 + k(k+1)x^2}.$$

Положив последовательно $k = 1, 2, \dots, n$:

$$\arctg 2x - \arctg x = \arctg \frac{x}{1+1 \cdot 2 \cdot x^2},$$

$$\arctg 3x - \arctg 2x = \arctg \frac{x}{1+2 \cdot 3 \cdot x^2},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\arctg (n+1)x - \arctg nx = \arctg \frac{x}{1+n(n+1)x^2},$$

и, просуммировав, получим:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{1+k(k+1)x^2} &= \operatorname{arc\,tg} (n+1)x - \operatorname{arc\,tg} x = \\ &= \operatorname{arc\,tg} \frac{nx}{1+(n+1)x^2}\end{aligned}$$

Положив, в частности, $x = 1$, получим:

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{1+k+k^2} = \operatorname{arc\,tg} \frac{n}{n+2}.$$

9. Вычислить сумму

$$S_n = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \dots + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2n^2}.$$

Решение. Каждое из слагаемых меньше, чем $\frac{\pi}{4}$. Суммируем последовательно:

$$S_1 = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2}, \quad S_2 = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2 \cdot 2^2} = \operatorname{arc\,tg} \frac{2}{3} < \frac{\pi}{4};$$

$$S_3 = S_2 + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2 \cdot 3^2} = \operatorname{arc\,tg} \frac{2}{3} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2 \cdot 3^2} =$$

$$= \operatorname{arc\,tg} \frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{2 \cdot 3^2}}{1 - \frac{1}{3^3}} = \operatorname{arc\,tg} \frac{3}{4} < \frac{\pi}{4}.$$

Применим метод математической индукции. Допустим, что при некотором k имеем

$$S_k = \operatorname{arc\,tg} \frac{k}{k+1},$$

тогда получим:

$$\begin{aligned}S_{k+1} &= \operatorname{arc\,tg} \frac{k}{k+1} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2(k+1)^2} = \\ &= \operatorname{arc\,tg} \frac{\frac{k}{k+1} + \frac{1}{2(k+1)^2}}{1 - \frac{k}{k+1} \cdot \frac{1}{2(k+1)^2}} = \operatorname{arc\,tg} \frac{k+1}{k+2}.\end{aligned}$$

Согласно принципу математической индукции формула

$$S_n = \operatorname{arc\,tg} \frac{n}{n+1}$$

верна при произвольном натуральном n .

На примерах 10—13 показано исследование некоторых функций, заданных формулами, содержащими обратные тригонометрические операции.

10. Исследовать функцию

$$y = \operatorname{arc\,cos} x + \operatorname{arc\,cos} \frac{x + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}}.$$

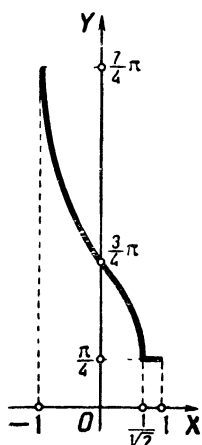
Решение Преобразуем второе слагаемое. Имеем:

$$\begin{aligned} \arccos x - \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} &= \arccos x - \frac{\pi}{4} = \\ &= \begin{cases} -\arccos \frac{x + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}}; & x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \arccos \frac{x + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}}; & x < \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases} \end{aligned}$$

Это преобразование можно выполнить либо непосредственно, заметив что при $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$ дуга $\arccos x - \frac{1}{\sqrt{2}}$ оканчивается в четвертой четверти, а при $x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ в первой, либо можно воспользоваться готовой формулой (4) (см предыдущий параграф).

Следовательно,

$$\begin{aligned} \arccos \frac{x + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}} &= \begin{cases} -\arccos x + \frac{\pi}{4}; & x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \arccos x - \frac{\pi}{4}; & x < \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases} \\ y &= \begin{cases} 2\arccos x - \frac{\pi}{4}; & x < \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \frac{\pi}{4}; & x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases} \end{aligned}$$



Черт. 168

Построим график данной функции. Областью определения служит сегмент $[-1, 1]$. На сегменте $\left[-1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ функция

$$y = 2\arccos x - \frac{\pi}{4}$$

убывает от $\frac{7}{4}\pi$ до $\frac{\pi}{4}$. На сегменте $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$ функция имеет значение равное $\frac{\pi}{4}$ (черт. 168).

11. Исследовать функцию

$$y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}.$$

Решение. Область определения находится из условия

$$\left| \frac{2x}{1+x^2} \right| \leq 1 \quad \text{или} \quad 2|x| < (1+x^2).$$

Последнее неравенство справедливо при всех значениях x . Следовательно, областью определения служит интервал $-\infty < x < +\infty$.

Воспользуемся формулой (стр 232).

$$\sin (2 \operatorname{arctg} x) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

Рассмотрим две дуги. $2 \operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{arcsin} \frac{2x}{1+x^2}$, имеющие одинаковый синус. Для дуги $2 \operatorname{arctg} x$ имеют место неравенства $-\pi < 2 \operatorname{arctg} x < \pi$, для второй дуги имеем:

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arcsin} \frac{2x}{1+x^2} < \frac{\pi}{2}.$$

Если $-1 \leq x \leq 1$, то $-\frac{\pi}{4} \leq \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{4}$.

Следовательно,

$$-\frac{\pi}{2} \leq 2 \operatorname{arctg} x \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad 2 \operatorname{arctg} x = \operatorname{arcsin} \frac{2x}{1+x^2}$$

Для значений $x < -1$ имеем $-\pi < 2 \operatorname{arctg} x < -\frac{\pi}{2}$, а потому

$$\operatorname{arcsin} \frac{2x}{1+x^2} = -\pi - 2 \operatorname{arctg} x.$$

Если $x > 1$, то $\operatorname{arcsin} \frac{2x}{1+x^2} = \pi - 2 \operatorname{arctg} x$.

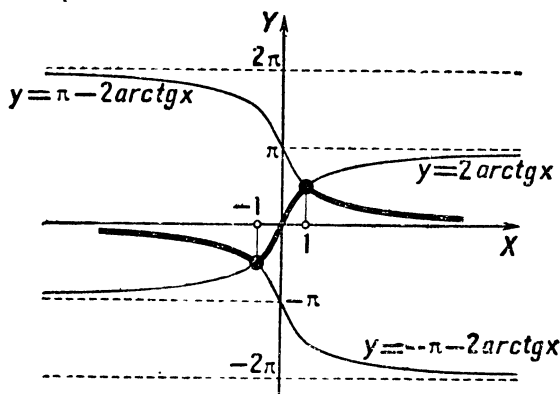
Итак, получим:

$$y = \begin{cases} -\pi - 2 \operatorname{arctg} x; & x < -1; \\ 2 \operatorname{arctg} x; & -1 \leq x \leq 1; \\ \pi - 2 \operatorname{arctg} x; & 1 < x \end{cases}$$

Откуда имеем:

x	$-\infty$	$< x <$	-1	$< x <$	1	$< x <$	$+\infty$
y	0	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0

График данной функции получается путем соединения дуг трех линий как показано на чертеже 169.



Черт 169

Примечание. Наличие угловых точек при $x = \pm 1$ можно обнаружить методом дифференциального исчисления. Вычислив производную, получим:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{1 - \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{(1+x^2) - 2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{|1-x^2|(1+x^2)}, \quad \text{где } x \neq \pm 1.$$

Правая производная в точке 1 равна $f'_+(1) = -1$, а левая равна $f'_-(1) = 1$. Следовательно, $x = 1$ есть угловая точка.

12. Исследовать функцию

$$y = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

Решение. Так как при любом значении x

$$|1-x^2| \leq 1+x^2,$$

то областью определения служит интервал $-\infty < x < +\infty$. Воспользуемся формулой (стр. 232):

$$\cos(2 \arctg x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

Рассмотрим две дуги, имеющие одинаковый косинус:

$$2 \arctg x \quad \text{и} \quad \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2};$$

в силу определения аркфункций имеем:

$$-\pi < 2 \arctg x < \pi \quad \text{и} \quad 0 \leq \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq \pi.$$

Функция четная. Следовательно,

$$\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} = \begin{cases} 2 \arctg x; & x \geq 0, \\ -2 \arctg x; & x \leq 0. \end{cases}$$

Отсюда находим:

x	$-\infty$	$< x <$	0	$< x <$	$+\infty$
y	π	$\searrow$	0	$\nearrow$	π

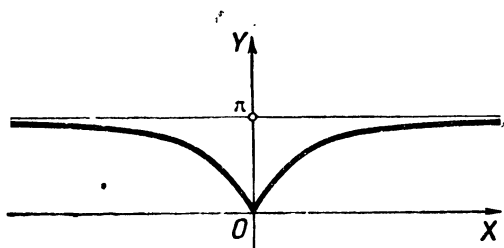
График представлен на чертеже 170 (начало координат является угловой точкой).

13. Исследовать функцию

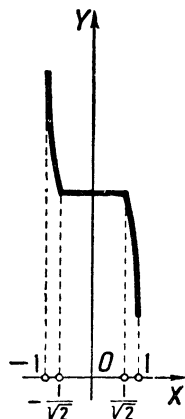
$$y = \arcsin x + 3 \arccos x + \arcsin(2x\sqrt{1-x^2}).$$

Решение. Согласно формуле (7) (стр 254)

$$\arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) = \begin{cases} 2 \arcsin x; & |x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}; \\ \pi - 2 \arcsin x; & \frac{1}{\sqrt{2}} < x \leq 1; \\ -\pi - 2 \arcsin x; & -1 \leq x < -\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$



Черт 170



Черт 171

Приняв во внимание, что $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, получим:

$$y = \begin{cases} \frac{3}{2} \pi; & -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}; \\ \frac{\pi}{2} + 4 \arccos x; & \frac{1}{\sqrt{2}} < x \leq 1; \\ -\frac{3}{2} \pi + 4 \arccos x; & -1 \leq x < -\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

График представлен на чертеже 171.

§ 43. Некоторые свойства полиномов Чебышева

Известно, что n -й полином Чебышева

$$T_n(x) = x^n - C_n^2 x^{n-2} (1-x^2) + C_n^4 x^{n-4} (1-x^2)^2 - \dots$$

совпадает на сегменте $[-1; 1]$ с функцией, заданной формулой $\cos(n \arccos x)$, что позволяет установить ряд замечательных свойств полиномов Чебышева.

Теорема. Для последовательности $\{T_n(x)\}$ полиномов Чебышева имеет место рекуррентная формула

$$T_{n+1}(x) \equiv 2xT_n(x) - T_{n-1}(x). \quad (1)$$

Доказательство. Положим в тождестве

$$\cos(n+1)\varphi = 2\cos n\varphi \cos \varphi - \cos(n-1)\varphi$$

$\varphi = \arccos x$, тогда получим:

$$\begin{aligned} \cos[(n+1)\arccos x] &= 2\cos[n\arccos x]\cos(\arccos x) - \\ &\quad - \cos[(n-1)\arccos x], \end{aligned}$$

откуда следует справедливость тождества (1) на сегменте $[-1, 1]$. Левая и правая части (1) суть многочлены, значения которых равны при бесконечном множестве значений аргумента $-1 \leq x \leq 1$, следовательно, многочлены тождественны над полем действительных (комплексных) чисел, ч. т. д.

Пользуясь рекуррентной формулой (1), можно последовательно вычислять полиномы Чебышева. Первые два полинома найдем непосредственно:

$$T_0(x) = \cos(0 \arccos x) = 1, \quad T_1(x) = \cos(\arccos x) = x.$$

Для нахождения следующих полиномов применяем формулу (1):

$$\begin{aligned} T_2(x) &= 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1; \\ T_3(x) &= 2xT_2(x) - T_1(x) = 4x^3 - 3x; \\ T_4(x) &= 2xT_3(x) - T_2(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1 \end{aligned}$$

и т. д.

Теорема. Многочлен $T_n(x)$ имеет n различных действительных корней; все корни $T_n(x)$ содержатся в интервале $(-1, 1)$.

Доказательство. Из формулы

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

следует, что $T_n(x) = 0$, если

$$n \arccos x = \frac{2k-1}{2} \pi, \quad \text{откуда} \quad x = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}.$$

Полагая $k = 1, 2, 3, \dots, n$, получим n различных корней $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$x_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi.$$

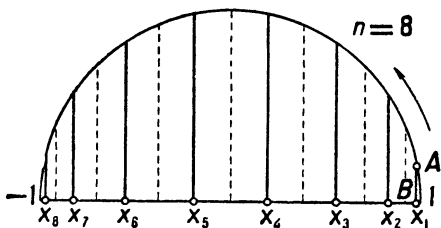
В самом деле, если $1 \leq k < l \leq n$, то $0 < \frac{2k-1}{2n} \pi < \frac{2l-1}{2n} \pi < \pi$, а потому $x_k > x_l$. При значениях k , отличных от рассмотренных, никаких новых значений для x_n получено быть не может, так как

многочлен $T_n(x)$ не может иметь больше, чем n различных действительных корней. Это же видно и из общей формулы для x_k

$$\begin{aligned} x_{n+p} &= \cos \frac{(2n+2p-1)\pi}{2n} = \cos \left(\pi + \frac{(2p-1)\pi}{2n} \right) = \\ &= \cos \left(\pi - \frac{(2p-1)\pi}{2n} \right) = \cos \frac{2(n-p)+1}{2n} \pi = x_{n-p+1}. \end{aligned}$$

Так, например, $x_{n+1} = x_n$; $x_{n+2} = x_{n-1}$; $x_{n+3} = x_{n-2}$ и т. д. Числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ суть простые корни, ибо все они различны, ч. т. д.

Для построения корней T_n можно поступить следующим образом: разделим полуокружность единичного радиуса на $2n$ равных частей, занумеруем точки деления в направлении, указанном на чертеже 172, и отметим точку A , ближайшую к точке B с абсциссой 1. Затем, начиная с точки A , спроектируем на отрезок $[-1, 1]$, через одну, точки деления. Полученные в проекции точки и являются геометрическим изображением корней полинома $T_n(x)$.



Черт. 172

На сегменте $-1 \leq x \leq 1$ значения полиномов Чебышева принадлежат тому же сегменту $[-1; 1]$

$$-1 \leq T_n(x) \leq 1.$$

Это следует из равенства $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ на сегменте $-1 \leq x \leq 1$.

Вычислим те значения x на сегменте $[-1, 1]$, для которых $T_n(x) = \pm 1$; так как $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, то

$$T_n(x) = 1, \quad \text{если } n \arccos x = 2k\pi;$$

$$T_n(x) = -1, \quad \text{если } n \arccos x = (2k+1)\pi.$$

Таким образом,

$$T_n(x'_m) = (-1)^{m-1}, \quad \text{если } n \arccos x'_m = m\pi.$$

Отсюда найдем:

$$x'_0 = 1; \quad x'_1 = \cos \frac{\pi}{n}; \quad x'_2 = \cos \frac{2\pi}{n}; \dots; \quad x'_n = -1.$$

Итак,

$$T_n(x'_0) = T_n(1) = 1; \quad T_n(x'_1) = -1; \quad T_n(x'_2) = 1, \dots,$$

$$T_n(x_n) = T_n(-1) = (-1)^n.$$

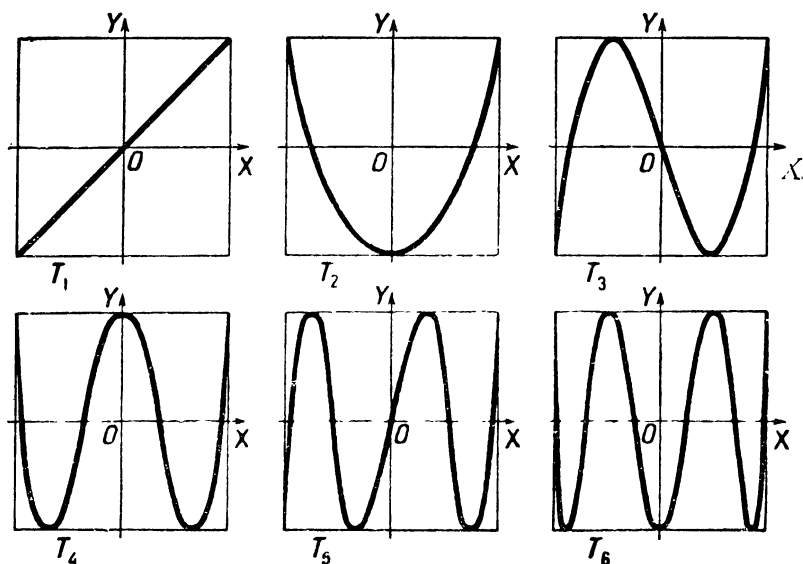
Из формулы

$$y = T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

получим промежутки монотонности полиномов Чебышева:

x	$\dots$	$\cos \frac{5\pi}{n}$	$< x <$	$\cos \frac{4\pi}{n}$	$< x <$	$\cos \frac{3\pi}{n}$	$< x <$	$\cos \frac{2\pi}{n}$	$< x <$	$\cos \frac{\pi}{n}$	$< x <$	1
$y = T_n(x)$	$\dots$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

Графики шести первых полиномов Чебышева представлены на чертеже 173.



Черт. 173

Теория многочленов $T_n(x)$ была разработана П. Л. Чебышевым в его труде «Вопросы о наименьших величинах, связанных с приближенным представлением функции». П. Л. Чебышевым была поставлена и решена следующая задача: среди многочленов вида

$$P(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_n$$

найти такой многочлен, который на данном сегменте имеет наименьшее отклонение от нуля, т. е. для которого наибольшее значение его абсолютной величины на данном сегменте является наименьшим.

Многочлены, обладающие этим свойством, играют важную роль в анализе и в его приложениях. Докажем, что полиномы Чебышева решают изложенную задачу для сегмента $[-1, 1]$.

Теорема. Из всех многочленов степени n , имеющих коэффициент при x^n равный единице, наименьшее отклонение от нуля на сегменте $[-1, 1]$ имеет полином

$$\bar{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x).$$

Доказательство. Коэффициент при x^n многочлена $\bar{T}_n(x)$ равен 1, так как старший коэффициент $T_n(x)$ равен 2^{n-1} (§ 17). Наибольшее значение $|\bar{T}_n(x)|$ на сегменте $[-1, 1]$ есть $\frac{1}{2^{n-1}}$, так как наибольшее и наименьшее значения $T_n(x)$ суть ± 1 .

Итак, отклонение от нуля на сегменте $[-1, 1]$ многочлена $\frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$ равно $\frac{1}{2^{n-1}}$. Предположим, вопреки утверждению теоремы, что некоторый многочлен

$$P_n(x) = x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \dots + p_0$$

имеет на сегменте $[-1, 1]$ отклонение от нуля меньшее, чем $\frac{1}{2^{n-1}}$. Согласно этому предположению, многочлен $P_n(x)$ отличен от многочлена $\bar{T}_n(x)$ и на сегменте $[-1, 1]$ удовлетворяет неравенствам:

$$-\frac{1}{2^{n-1}} < P_n(x) < \frac{1}{2^{n-1}}. \quad (2)$$

Рассмотрим точки

$$x'_0 = 1, \quad x'_1 = \cos \frac{\pi}{n}, \quad x'_2 = \cos \frac{2\pi}{n}, \dots, \quad x'_n = -1.$$

В этих точках имеем:

$$\begin{aligned} \bar{T}_n(x'_0) &= \frac{1}{2^{n-1}}, \quad \bar{T}_n(x'_1) = -\frac{1}{2^{n-1}}, \quad \bar{T}_n(x'_2) = \frac{1}{2^{n-1}}, \dots, \\ \bar{T}_n(x'_n) &= \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Разность $R(x) = \bar{T}_n(x) - P_n(x)$ есть многочлен степени не выше $n-1$. Согласно неравенствам (2) и неравенствам (3), будем иметь

$$R(x'_0) > 0, \quad R(x'_1) < 0, \quad R(x'_2) > 0, \dots$$

Сегмент $[-1, 1]$ разбит при помощи точек $x'_0, x'_1, \dots, x'_n$ на n сегментов. Рассмотрим один из этих сегментов; его границами служат две соседние точки x'_{i+1} и x'_i , разность $R(x)$ обращается в нуль по крайней мере в одной точке каждого из сегментов $[x'_{i+1}, x'_i]$. В самом деле, $R(x)$ в концах сегментов $[x'_{i+1}, x'_i]$ имеет разные знаки, а потому, в силу непрерывности, обращается в нуль по крайней мере в одной внутренней точке каждого сегмента. Следовательно, $R(x) \equiv 0$, так как, будучи многочленом степени не выше $n - 1$, он имеет по меньшей мере n корней, а потому

$$R_n(x) \equiv \overline{T}_n(x),$$

что противоречит сделанному предположению. Следовательно, не существует многочлена, имеющего на сегменте $[-1, 1]$ отклонение от нуля меньше, чем $\frac{1}{2^{n-1}}$, а потому $\overline{T}_n(x)$ есть многочлен, наименее уклоняющийся от нуля, ч. т. д.



Глава пятая

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

§ 44. Тригонометрические уравнения

Уравнение

$$F(x, y, \dots, z) = 0 \quad (F)$$

называется элементарным трансцендентным, если $F(x, y, \dots, z)$ есть элементарная трансцендентная функция. Следовательно, функция $F(x, y, \dots, z)$ содержит элементарные трансцендентные операции над неизвестными и не может быть представлена никаким алгебраическим выражением*.

Система уравнений

$$F_1 = 0, F_2 = 0, \dots, F_k = 0 \quad (F_i)$$

называется трансцендентной, если хотя бы одно из уравнений, входящих в ее состав, является трансцендентным.

Уравнение

$$F_1(x, y, \dots, z) = F_2(x, y, \dots, z)$$

называется трансцендентным, если эквивалентное ему уравнение

$$F_1(x, y, \dots, z) - F_2(x, y, \dots, z) = 0$$

трансцендентно**.

* Так, например, уравнение

$$\lg 10^{x^2+1} = 1$$

не является трансцендентным, ибо его левая часть, хотя и содержит трансцендентные операции, но на самом деле трансцендентной функцией не является:

$$\lg 10^{x^2+1} \equiv x^2 + 1.$$

** Так, например, уравнение

$$x^2 + 2^x = 1 + 2^x$$

эквивалентно алгебраическому уравнению $x^2 - 1 = 0$, а потому и не считается трансцендентным.

В тригонометрии рассматриваются трансцендентные уравнения, содержащие тригонометрические и обратные тригонометрические операции над неизвестными.

В общем случае элементарное трансцендентное уравнение нельзя решить элементарными средствами, т. е. *нельзя установить правил, позволяющих получить общее решение уравнения путем последовательного выполнения ряда арифметических действий и элементарных операций над данными (известными) числами* (коэффициенты, параметры и пр.). Однако в ряде частных случаев общее решение трансцендентного уравнения можно выразить одной или несколькими формулами, содержащими только лишь элементарные операции над известными числами.

В тригонометрии под названием тригонометрических уравнений рассматриваются частные виды уравнений (систем), содержащих тригонометрические операции над неизвестными. Мы не даем определения понятия тригонометрического уравнения в о б щ е м в и д е по следующей причине: это определение было бы плодотворным, если бы выделение класса уравнений, названных тригонометрическими, связывалось с установлением общих методов их решения и исследования; на самом же деле речь идет лишь о тех или иных частных видах уравнений (называемых тригонометрическими) и специальных (а не общих) приемах их решения.

П р и м е ч а н и е. Принятые во многих старых учебниках определения нельзя признать удачными. Например, под определение тригонометрического уравнения, как содержащего неизвестное под знаками тригонометрических функций, подойдут многие уравнения, неразрешимые элементарными средствами. Так, например, уравнение

$$x + \sin x = 1$$

линейное относительно x и $\sin x$, неразрешимое элементарными средствами, обычно не называют тригонометрическим. С другой стороны, если сделать оговорку, что неизвестные должны содержаться т о л ь к о л и ш ь под знаками тригонометрических функций, то под это определение не подойдет, например, такая система:

$$\sin x + \sin y = a, \quad x + y = b,$$

приводимая обычно в учебниках среди тригонометрических уравнений.

Вопрос о том, с л е д у е т или н е с л е д у е т данное уравнение, содержащее тригонометрические функции, считать тригонометрическим, не имеет принципиального значения; и нет никаких неудобств, когда этот термин применяется к тем уравнениям, которые рассматриваются в каждом данном случае.

В практике решения тригонометрических уравнений наиболее часто встречаются уравнения вида

$$f(x) = 0, \quad (f)$$

где $f(x)$ — периодическая функция. Период l функции $f(x)$ (обычно наименьший положительный) будем называть п е р и о д о м у р а в н е н и я (f) . Для уравнения, о б л а д а ю щ е г о п е р и о д о м, достаточно найти все его решения, принадлежащие какому-либо полусегменту равному по длине периоду уравнения, например полусегменту $0 \leq x < l$. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ — множество всех решений уравнения (f) на полусегменте $[0, l]$ (для уравнений, рассматриваемых в элементарной математике, это множество, как правило, к о н е ч н о); тогда, в силу периодичности данного уравнения, множество всех его решений составитс я из двухсторонних арифметических прогрессий $x_1 + k_1l, x_2 + k_2l, x_3 + k_3l, \dots$ (где $k_1, k_2, k_3, \dots$ — произвольные целые числа) с разностью равной l . Так, например, первую прогрессию в развернутом виде можно записать следующим образом:

$$\dots x_1 - 2l, \quad x_1 - l, \quad x_1, \quad x_1 + l, \quad x_1 + 2l, \dots$$

Из изложенного следует, что *множество (если оно непусто) всех решений уравнения, обладающего периодом, можно представить в виде совокупности двухсторонних арифметических прогрессий с разностью равной периоду уравнения.*

В частности, в § 12 для простейших тригонометрических уравнений были получены следующие формулы общих решений:

Уравнение	Общее решение
a) $\cos x = m$ период 2π	$x = \pm \arccos m + 2k\pi$, если $ m \leq 1$
	не имеет решений, если $ m > 1$
b) $\sin x = m$ период 2π	$x = (-1)^n \arcsin m + n\pi$, если $ m \leq 1$
	не имеет решений, если $ m > 1$
c) $\operatorname{tg} x = m$ период π	$x = \operatorname{arctg} m + k\pi$, где m — произвольное действительное число
d) $\operatorname{ctg} x = m$ период π	$x = \operatorname{arccotg} m + k\pi$, где m — произвольное действительное число

Так, при $|m| > 1$ множество решений уравнения а) пусто, при $|m| \leq 1$ состоит из двух арифметических прогрессий (двухсторонних):

$$\dots, \arccos m - 2\pi, \quad \arccos m, \quad \arccos m + 2\pi, \dots, \\ \dots, -\arccos m - 2\pi, \quad -\arccos m, \quad -\arccos m + 2\pi, \dots$$

Эти прогрессии в общем случае различны, однако, в частных случаях могут совпадать. Так как для обеих прогрессий разность одинакова: $d = 2\pi$, то для совпадения прогрессий необходимо и достаточно равенство какого-либо члена первой прогрессии какому-либо члену второй прогрессии:

$$\arccos m + 2k\pi = -\arccos m + 2l\pi,$$

откуда

$$\arccos m = (l - k)\pi.$$

Так как $0 \leq \arccos m \leq \pi$, то значения k и l должны удовлетворять системе неравенств

$$0 \leq (l - k) \leq 1.$$

Следовательно, или $l = k$ или $l - k = 1$.

В первом случае $\arccos m = 0$, $m = 1$ и обе прогрессии обращаются в одну: $\{2k\pi\}$. Во втором случае $\arccos m = \pi$, $m = -1$ и обе прогрессии обращаются в одну: $\{(2k + 1)\pi\}$.

При $m = 0$ обе прогрессии хотя и различны, но их члены можно объединить в одну прогрессию с разностью π . В самом деле, в этом случае $\arccos m = \frac{\pi}{2}$ и общие члены первой и второй прогрессий соответственно суть:

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{и} \quad -\frac{\pi}{2} + 2l\pi = \frac{\pi}{2} + (2l - 1)\pi.$$

Это суть числа вида $\frac{\pi}{2} + n\pi$ — при n четном получаются члены первой прогрессии, а при n нечетном — второй.

Аналогично общее решение уравнения б) либо пусто, либо (в общем случае) состоит из двух арифметических прогрессий.

Общее решение уравнения с), а также уравнения д) есть двусторонняя арифметическая прогрессия с разностью π .

Решение уравнения вида

$$\cos f(x) = \varphi(x) \tag{1}$$

равносильно нахождению общего решения уравнения

$$f(x) = \pm \arccos \varphi(x) + n\pi, \tag{2}$$

с целочисленным параметром n .

Сказанное (с надлежащим изменением) относится к прочим уравнениям того же вида, но для которых вместо $\cos f(x)$ берется какая-либо другая тригонометрическая функция от функции $f(x)$.

В частности, если функция $f(x)$ алгебраическая, а функция $\varphi(x)$ постоянная: $\varphi(x) = m$ ($= \text{const}$), то уравнение (2) является алгебраическим.

Всякое множество решений тригонометрического уравнения, заданное формулой, содержащей целочисленный параметр, будем называть *серией решений*. Серия решений может быть общим решением, а может являться некоторой частью (правильной) множества всех решений уравнения. Так, для уравнения $\sin x = 0$ серия решений $x = 2k\pi$ есть часть множества всех решений $x = n\pi$.

Примеры. 1 Решить уравнение $\sin(kx + b) = m$ (где $k \neq 0$).

Общее решение состоит (вообще говоря) из двух арифметических прогрессий или пусто. В самом деле, уравнение

$$\sin(kx + b) = m$$

при $|m| > 1$ не имеет решений, а при $|m| \leq 1$ имеет бесконечное множество решений

$$kx + b = (-1)^n \arcsin m + n\pi,$$

откуда

$$x = (-1)^n \frac{\arcsin m}{k} - \frac{b}{k} + \frac{n\pi}{k}.$$

Одну прогрессию получим при n четном, а другую — при n нечетном, для каждой из прогрессий разность равна $\frac{2\pi}{k}$.

Примерами уравнений этого типа могут служить:

$$a) \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{5}, \text{ откуда } 2x + \frac{\pi}{4} = \pm \arccos \frac{4}{5} + 2k\pi$$

и $x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{4}{5} - \frac{\pi}{8} + k\pi$, или в градусной мере $x \approx \pm 18^\circ 26' - 22^\circ 30' + 180^\circ k$;

$$b) \operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}, \text{ откуда } 3x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + k\pi \text{ или } x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}.$$

$$2. \text{ Решить уравнение } \sin 2^x = -\frac{1}{2}.$$

Решение.

$$2^x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + n\pi$$

или

$$2^x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + n\pi,$$

где n — целое число. Условие $2^x > 0$ показывает, что последнее уравнение (эквивалентное данному) имеет решения лишь при тех значениях n , при которых его правая часть положительна. Это уравнение не имеет решений при значениях $n = 0, -1, -2, \dots$, при которых его правая часть отрицательна.

Ответ.

$$x = \log_2 \left[(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + n\pi \right],$$

где n — произвольное натуральное число.

$$3. \text{ Решить уравнение } \cos(\sin x) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Решение.

$$\sin x = \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi.$$

Последнее уравнение имеет решение при условии $\left| \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right| \leq 1$, откуда найдем единственно возможное значение $k = 0$.

Итак данное уравнение эквивалентно следующему

$$\sin x = \pm \frac{\pi}{6}.$$

Ответ.

$$x = \pm \arcsin \frac{\pi}{6} + n\pi,$$

$\arcsin \frac{\pi}{6}$ можно приближенно найти по таблицам:

$$\arcsin \frac{\pi}{6} \approx \arcsin 0,5236 \approx 31^\circ 34' \approx 0,5509 \text{ (радиан)}$$

4. Решить уравнение

$$\cos x^2 = \frac{1}{2}.$$

Решение.

$$x^2 = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

Правая часть последнего уравнения неотрицательна при $k \geq 1$; кроме того, при $k = 0$ она содержит неотрицательное число $\frac{\pi}{3}$. Общее решение данного уравнения состоит из серии

$$x = \pm \sqrt{\pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi},$$

где k — натуральное число, и из двух решений $x = \pm \sqrt{\frac{\pi}{3}}$.

§ 45. Об особых случаях решения уравнений

Понятие корня уравнения (см. «Специальный курс элементарной алгебры», § 55)

$$f_1(x) = f_2(x) \quad (i)$$

может быть расширено в так называемых особых случаях, когда хотя бы одна из функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ теряет смысл. Именно, вводится следующее дополнительное определение — принцип предельного перехода:

Если в точке $x = a$ хотя бы одна из функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ теряет смысл, но

$$\lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) - f_2(x)] = 0,$$

то число a считается корнем (особым) уравнения (i)*.

* При этом предполагается, что точка a является предельной точкой для множества допустимых значений аргумента. В противном случае принцип предельного перехода теряет смысл.

Это дополнительное определение принимается обычно в анализе. Однако школьный курс элементарной математики вынужден отказаться от применения принципа предельного перехода*. В силу сказанного, возможны две точки зрения на случай, когда при некотором значении $x = a$, хотя бы одно из выражений $f_1(x)$ или $f_2(x)$ теряет смысл.

I. Согласно первой точке зрения, дополнительное определение корня в особом случае не принимается, а потому, $x = a$ не считается корнем уравнения.

II. Согласно второй точке зрения, надо произвести исследование предела $\lim_{x \rightarrow a} [f_1 - f_2]$: если этот предел не существует, или не имеет смысла, или отличен от нуля, то a не есть корень уравнения; если же этот предел равен нулю, то a есть корень (особый).

Возможно придерживаться как той, так и другой точки зрения, но во избежание недоразумений (там, где они могут возникнуть) надо указывать, какая из этих точек зрения принимается.

Примеры.

1. Решить уравнение

$$\frac{1 - \cos 2x}{2 \sin x} = \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}. \quad (1)$$

Решение. Выполним последовательно преобразования, заменяющие данное уравнение уравнениями ему эквивалентными:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos 2x}{2 \sin x} - \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} &= 0; \\ \frac{2 \sin^2 x \cos^2 x - \sin x \sin 2x}{2 \sin x \cos^2 x} &= 0; \\ \frac{\sin x \sin 2x (\cos x - 1)}{2 \sin x \cos^2 x} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Приравняем поочередно нулю множители числителя

$$\sin x = 0, \quad \sin 2x = 0, \quad \cos x - 1 = 0,$$

откуда найдем:

$$x = n\pi, \quad x = k \frac{\pi}{2}, \quad x = 2m\pi.$$

Первая и третья серии решений содержатся во второй (k — четное и $k = 4m$), поэтому все три серии можно объединить в одну $x = k \frac{\pi}{2}$.

При таком способе могут появиться посторонние решения, это суть те решения, при которых знаменатель левой части уравнения (2) (эквивалентного (1)) обращается в нуль. В данном случае любое значение x из серии $x = k \frac{\pi}{2}$ является особым. При k четном, $k = 2n$, левая часть уравнения (1) теряет смысл, а при k нечетном, $k = 2n + 1$, — правая.

Согласно первой точке зрения, уравнение (1) не имеет решений и все решения $x = k \frac{\pi}{2}$ следует считать посторонними.

* Обоснование и применение принципа предельного перехода требуют знакомства с понятием предела функции и наличия навыков в нахождении пределов, что выходит за рамки школьной программы.

Согласно второй точке зрения надо исследовать предел левой части уравнений (2), т. е. предел

$$\lim \left[\frac{\sin x \cdot \sin 2x (\cos x - 1)}{2 \sin x \cos^2 x} \right] = \lim [\sin x - \operatorname{tg} x]$$

в каждой из точек $x = \frac{k\pi}{2}$.

При k четном этот предел равен нулю, при k нечетном этот предел (конечный) не существует:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2n+1}{2} \pi} [\sin x - \operatorname{tg} x] = +\infty.$$

Следовательно, числа вида $x = k\pi$ суть корни (особые) уравнения (1) и формула $x = k\pi$ дает его общее решение

2. Решить уравнение $\lg \cos x = 0$.

Решение. Область определения правой части устанавливается из условия $\cos x > 0$, откуда получим совокупность интервалов

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

Из данного уравнения найдем общее решение:

$$\cos x = 1 \text{ и } x = 2k\pi.$$

Рассмотрим любое значение x , при котором $\cos x < 0$. Положим для определенности $x = \pi$. При $x = \pi$ левая часть данного уравнения теряет смысл, однако число π не может служить особым корнем. В самом деле, левая часть не определена не только в точке π , но и в некоторой ее окрестности, а потому $\lim_{x \rightarrow \pi} \lg \cos x$ не имеет смысла, и следовательно, теряет смысл применение принципа предельного перехода.

Точки $x = \frac{2k+1}{2} \pi$ (концы интервалов, составляющих область определения) также не являются решениями уравнения, так как в каждой из этих точек

$$\lim \lg \cos x = -\infty.$$

§ 46. Соотношения между двумя дугами, имеющими одинаковое значение данной тригонометрической функции

Теорема. Необходимым и достаточным условием того, чтобы 1° две дуги u и v имели одинаковый синус

$$\sin u = \sin v,$$

является наличие соотношения:

$$u = (-1)^n v + n\pi;$$

2° чтобы дуги u и v имели одинаковый косинус:

$$\cos u = \cos v,$$

является наличие соотношения:

$$u = \pm v + 2k\pi;$$

3° чтобы дуги u и v , отличные от дуг вида $\frac{2k+1}{2}$, имели одинаковый тангенс, является наличие соотношения

$$u = v + n\pi,$$

где n — некоторое целое число.

Доказательство. Докажем утверждение 1°.

Условие достаточно. В самом деле, если имеет место соотношение $u = (-1)^n v + n\pi$, то в зависимости от четности или нечетности n имеем:

$$\sin u = \sin \begin{cases} v + 2k\pi & (n = 2k), \\ (\pi - v) + 2k\pi & (n = 2k + 1), \end{cases}$$

в обоих случаях $\sin u = \sin v$.

Условие необходимо. Пусть $\sin u = \sin v$; обозначим через m общее значение синуса двух дуг u и v :

$$\sin u = m, \quad \sin v = m.$$

Рассмотрим множество всех дуг, имеющих синус, равный m :

$$(-1)^n \arcsin m + n\pi; \quad (1)$$

каждая из дуг u и v содержится в выражении (1) при некотором значении n :

$$\left. \begin{aligned} u &= (-1)^{n_1} \arcsin m + n_1 \pi, \\ v &= (-1)^{n_2} \arcsin m + n_2 \pi. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Если числа n_1 и n_2 одинаковой четности (т. е. оба четные или нечетные), то вычтем почленно равенства (2):

$$u - v = (n_1 - n_2)\pi = 2k\pi,$$

где $n_1 - n_2$ есть некоторое четное число $2k$. Если n_1 и n_2 — числа различной четности, то сложим почленно (2):

$$u + v = (n_1 + n_2)\pi = (2k + 1)\pi,$$

где $n_1 + n_2 = 2k + 1$ есть некоторое нечетное число. Итак, если дуги u и v имеют одинаковый синус, то либо их разность равна целому числу периодов $2k\pi$, либо их сумма равна нечетному числу полупериодов $(2k + 1)\pi$.

Следовательно,

$$u = \begin{cases} v + 2k\pi \\ -v + (2k + 1)\pi \end{cases} = (-1)^n v + n\pi.$$

Утверждение 2° доказывается аналогично.

Условие достаточно. В самом деле, если

$$u = \pm v + 2k\pi,$$

то

$$\cos u = \cos (\pm v + 2k\pi) = \cos (\pm v) = \cos v.$$

Условие необходимо. Обратно, если $\cos u = \cos v = m$, то

$$u = \pm \arccos m + 2n_1\pi,$$

$$v = \pm \arccos m + 2n_2\pi.$$

Складывая или вычитая (в зависимости от знаков при $\arccos m$ в правых частях), получим:

$$u \pm v = 2(n_1 \pm n_2)\pi = 2n\pi,$$

где $n = n_1 \pm n_2$ — целое число.

Также доказывается утверждение 3°, если

$$u = v + n\pi, \quad \text{то} \quad \operatorname{tg} u = \operatorname{tg} v.$$

Обратно, если $\operatorname{tg} u = \operatorname{tg} v = m$, то $u = \arctan m + k_1\pi$ и $v = \arctan m + k_2\pi$, откуда

$$u = v + (k_1 - k_2)\pi = v + n\pi, \quad \text{ч. т. д.}$$

Сформулировать и доказать соответствующую теорему для котангенса предоставляем учащимся.

Если в случае 3° одна из дуг, например v , имеет вид $\frac{2k+1}{2}\pi$, то при наличии соотношения $u = v + n\pi$ дуга u имеет тот же вид:

$$u = \frac{2(k+n)+1}{2}\pi.$$

В этом случае $\operatorname{tg} u$ и $\operatorname{tg} v$ не существуют.

Обратно, если $\operatorname{tg} u$ и $\operatorname{tg} v$ не существуют, то дуги u и v имеют вид:

$$u = \frac{2k_1+1}{2}\pi, \quad v = \frac{2k_2+1}{2}\pi.$$

В этом случае

$$u = v + (k_1 - k_2)\pi = v + n\pi.$$

Таким образом, в общем случае соотношение $u = v + n\pi$ служит признаком (необходимым и достаточным) того, что либо дуги u и v имеют одинаковый тангенс, либо ни для одной из них тангенс не существует.

Примечание. Теорему можно доказать другим способом. Например, утверждение 1° можно доказать так: рассмотрим равенство

$$\sin u - \sin v = 0 \quad \text{или} \quad 2 \sin \frac{u-v}{2} \cos \frac{u+v}{2} = 0,$$

откуда (необходимое и достаточное условие):

$$\sin \frac{u-v}{2} = 0 \quad \text{или} \quad \cos \frac{u+v}{2} = 0,$$

и, следовательно,

$$u-v=2k\pi \quad \text{или} \quad u+v=(2k+1)\pi.$$

Объединив формулы в одну, придем к тому же окончательно-му результату.

Рассмотрим уравнение

$$\sin f(x, y, \dots, z) = \sin \varphi(x, y, \dots, z),$$

выражающее равенство синусов от двух функций. Это уравнение равносильно уравнению с целочисленным параметром n :

$$f = (-1)^n \varphi + n\pi$$

(для краткости аргументы не пишем).

Аналогично, уравнение

$$\cos f = \cos \varphi$$

эквивалентно уравнению

$$f = \pm \varphi + 2n\pi.$$

Уравнение

$$\operatorname{tg} f = \operatorname{tg} \varphi \tag{3}$$

не всегда эквивалентно уравнению

$$f = \varphi + n\pi. \tag{4}$$

В самом деле, всякое решение уравнения (3) есть решение уравнения (4), но не всякое решение (4) служит решением (3). Всякое решение уравнения (4), при котором $\operatorname{tg} f$ и $\operatorname{tg} \varphi$ не имеют смысла, является посторонним для уравнения (3).

Решения уравнения (4), посторонние для (3), находятся из условия

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

или из равносильного ему условия

$$f = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Примеры.

1 Решить уравнение

$$\sin x = \cos x.$$

Решение. Имеем:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x,$$

откуда

$$\frac{\pi}{2} - x = \pm x + 2k\pi; \tag{1}$$

выбрав в правой части знак $+$, получим

$$2x = \frac{\pi}{2} - 2k\pi, \quad \text{откуда} \quad x = \frac{\pi}{4} - k\pi.$$

Заметив, что коэффициент $-k$ можно заменить на k (ибо $-k$, равно как и k , может иметь произвольные целые значения), получим серию решений:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Выбор знака минус в правой части (1) приводит к противоречивому уравнению.

2. Решить уравнение

$$\sin 3x + \sin 12^\circ = 0.$$

Решение.

$$\sin 3x = -\sin 12^\circ \quad \text{или} \quad \sin 3x = \sin (-12^\circ),$$

откуда

$$3x = (-1)^n (-12^\circ) + n \cdot 180^\circ \quad \text{и, следовательно,} \quad x = (-1)^{n+1} 4^\circ + 60^\circ \cdot n.$$

3. Решить уравнение

$$\cos 3x + \cos 5x = 0.$$

Решение.

$$\cos 3x = -\cos 5x$$

или

$$\cos (3x + \pi) = \cos 5x,$$

откуда

$$3x + \pi = \pm 5x + 2k\pi.$$

Уравнение имеет две серии решений

$$x = \frac{(2k-1)\pi}{8} \quad \text{и} \quad x = \frac{(2k-1)\pi}{-2} = (2k_1+1) \frac{\pi}{2}$$

(заменяем k на $-k_1$).

4. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} \frac{2}{3} x = 1. \quad (1)$$

Решение. Заменяем данное уравнение следующим

$$\operatorname{tg} \frac{2}{3} x = \operatorname{ctg} x. \quad (2)$$

При переходе от уравнения (1) к (2) область определения изменилась: из области определения (1) исключились значения вида $l\pi$ и, с другой стороны, к этой области присоединились значения вида $\frac{\pi}{2} + l\pi$ [где l — целое число и $\frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{2} + l\pi \right) \neq n\pi$].

Решаем уравнение (2):

$$\operatorname{tg} \frac{2}{3} x = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - x \right), \quad (3)$$

$$\frac{2}{3} x = \frac{\pi}{2} - x + k\pi; \quad x = \frac{3\pi(2k+1)}{10}.$$

В полученной серии могут содержаться решения, посторонние для уравнения (3), которые находятся из уравнения

$$\frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi}{2} + l\pi, \quad \text{это числа вида } x = l\pi.$$

Таких чисел в рассматриваемой серии не содержится, уравнению (1) числа этого вида не удовлетворяют.

Числа вида

$$x = \frac{\pi}{2} + l\pi \quad \left(\text{тогда } \frac{3}{2} x = k_1 \pi \right)$$

могут появиться в качестве посторонних решений уравнения (1). Это будет иметь место, если

$$\frac{3\pi(2k+1)}{10} = \frac{\pi}{2} + l\pi$$

или

$$3k - 5l = 1. \quad (4)$$

Следовательно, $\frac{3k-1}{5}$ должно быть целым числом l , что имеет место для чисел

$$k = 2 + 5t,$$

дающих при делении на 5 остаток 2. Эти значения k дают посторонние решения уравнения (1).

§ 47. Решение уравнений посредством подстановок

В настоящем параграфе будут рассматриваться тригонометрические уравнения вида

$$F(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x) = 0, \quad (F)$$

где $F(u, v, w, z)$ есть некоторое аналитическое выражение от аргументов u, v, w, z , не содержащее никаких других аргументов. В частных случаях уравнение (F) может содержать не все, а лишь некоторые из тригонометрических функций.

Рассмотрим частный случай, когда уравнение (F) содержит лишь одну тригонометрическую функцию. Возьмем, например, уравнение

$$f(\cos x) = 0. \quad (f)$$

Выполним подстановку $\cos x = t$, тогда получим:

$$f(t) = 0. \quad (f_t)$$

Составим смешанную систему

$$f(t) = 0, \quad -1 \leq t \leq 1. \quad (f_t, t)$$

Всякое решение $t = t_1$ смешанной системы (f_t, t) дает серию решений (f), которую найдем, решив простейшее уравнение:

$$\cos x = t_1, \quad \text{откуда } x = \pm \arccos t_1 + 2k\pi.$$

Множество всех решений уравнения (f) состоит из множества всех серий, соответствующих всевозможным решениям смешанной

системы (f_t, t) . Если смешанная система не имеет решений, то данное тригонометрическое уравнение также не имеет решений. В частности, если (f) есть алгебраическое уравнение (не обращающееся в тождество) относительно косинуса, то (f_t) также является алгебраическим уравнением. В этом случае система (f_t, t) имеет конечное (быть может, пустое) множество решений, тогда и данное уравнение (f) либо не имеет решений, либо имеет бесконечное множество решений, состоящее из конечного числа серий.

Аналогично, решение уравнения вида

$$f(\sin x) = 0$$

подстановкой

$$\sin x = t$$

приводится к решению смешанной системы и к решению ряда простейших тригонометрических уравнений.

Решение уравнения

$$f(\operatorname{tg} x) = 0$$

приводится к решению уравнения

$$f(t) = 0$$

без присоединения неравенств, так как тангенс может принимать произвольное действительное значение.

Рассмотрим уравнение

$$F(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x) = 0,$$

содержащее несколько тригонометрических функций от неизвестного. Все содержащиеся в уравнении функции можно выразить через одну из них, а потому решение уравнения (F) приводится к решению уравнения (f_t) . Однако формулы, выражающие тригонометрические функции друг через друга, содержат радикалы, и преобразования, связанные с освобождением от них, могут внести посторонние решения. Эти решения должны быть устранены проверкой.

Примеры.

1. Решить уравнение

$$2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0.$$

Решение. Положив $\cos x = t$, составим смешанную систему

$$2t^2 + 3t - 2 = 0, \quad -1 \leq t \leq 1.$$

Корни квадратного уравнения суть $t = \frac{1}{2}$ и $t = -2$. Смешанная система имеет единственное решение $t = \frac{1}{2}$, откуда найдем.

$$\cos x = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

2. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x - 3 = 0.$$

Решение. Положив $t = \operatorname{tg} x$, получим:

$$t^3 + t^2 - 3t - 3 = 0 = (t+1)(t-1)(t+3) = 0$$

или, разложив (над полем действительных чисел) на множители левую часть:

$$(t+1)(t-\sqrt{3})(t+\sqrt{3})=0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} x = -1 \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} x = \pm \sqrt{3},$$

и следовательно,

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad \text{и} \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + n\pi.$$

3. Решить уравнение

$$\sin x + \cos x = 1. \quad (1)$$

Решение. Выразим косинус через синус:

$$\cos x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x}.$$

Положив $\sin x = t$, составим смешанную систему

$$t \pm \sqrt{1 - t^2} = 1; \quad -1 \leq t \leq 1; \quad (2)$$

освободив уравнение от радикала, получим

$$2t^2 - 2t = 0, \quad \text{откуда} \quad t_1 = 0 \quad \text{и} \quad t_2 = 1.$$

Значение $t = \sin x = 0$ удовлетворяет уравнению (1) при $\cos x = 1$. Следовательно, для решения $t_1 = 0$ следует взять знак $+$ перед радикалом. Решения уравнения (1), соответствующие корню $t_1 = 0$, суть

$$x = 2k\pi,$$

так как из общей формулы $x = n\pi$ следует исключить нечетные значения n , дающие для косинуса значение -1 .

Значение $t_2 = 1$ удовлетворяет уравнению (2), откуда найдем

$$\sin x = 1 \quad \text{и} \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

Итак, имеем две серии решений:

$$x = 2k\pi, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

§ 48. Рационализирующие подстановки

Рассмотрим уравнение

$$R(\cos x, \sin x, \dots) = 0,$$

рациональное относительно содержащихся в левой части тригонометрических функций. Если для выражения R известна рационализирующая подстановка, т. е. все входящие в него тригонометрические функции выражаются в виде рациональных функций от некоторого промежуточного аргумента t , то применение этой подстановки приведет к рациональному уравнению относительно t .

В соответствии с перечисленными в § 23 основными рационализирующими подстановками, отметим следующие способы рационализации тригонометрических уравнений.

1) Универсальной подстановкой $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ приводится к рациональному относительно t в с я к о е уравнение

$$R(\cos x, \sin x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x) = 0, \quad (R)$$

рациональное относительно тригонометрических функций о д н о г о и т о г о ж е аргумента x . Всякое (действительное) решение $t=t_1$ уравнения (R) (после подстановки) дает серию решений тригонометрического уравнения

$$x = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} t_1 + 2k\pi.$$

Посредством универсальной подстановки могут быть найдены все решения уравнения (R) , за исключением решений вида $x = (2k+1)\pi$ (в этом случае $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ не существует). Наличие или отсутствие решений этого вида может быть установлено проверкой.

Применим универсальную подстановку к решению уравнения, линейного относительно косинуса и синуса

$$a \sin x + b \cos x = c, \quad (1)$$

(где $a \neq 0$ и $b \neq 0$)

Положив $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, получим:

$$\frac{2at + b(1 - t^2) - c(1 + t^2)}{1 + t^2} = 0.$$

Сократив на $\frac{1}{1+t^2} \neq 0$, получим квадратное уравнение:

$$t^2(c + b) - 2at + c - b = 0. \quad (2)$$

Числа вида $x = (2k+1)\pi$ удовлетворяют данному уравнению, если $-b = c$, поэтому исследованию подлежат два случая.

С л у ч а й 1° Если $a^2 + b^2 \geq c^2$, то корни (действительные) квадратного уравнения (2) находятся по формуле

$$t = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{c + b}.$$

Общее решение данного уравнения есть

$$x = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{c + b} + 2k\pi.$$

Если $c^2 > a^2 + b^2$, то уравнение (1) не имеет решений, так как корни уравнения (2) мнимые.

С л у ч а й 2°. $b = -c$. В этом случае данное уравнение имеет серию решений:

$$x = (2k + 1)\pi.$$

Уравнение (2) обращается в уравнение 1-й степени, из которого найдем вторую серию решений:

$$x = -2 \arctg \frac{b}{a} + 2k\pi.$$

II. Уравнение $R(\cos x, \sin x) = 0$, содержащее $\cos x$ (или $\sin x$), лишь в четных степенях рационализируется подстановкой

$$t = \sin x \quad (\text{или } t = \cos x).$$

III. Уравнение

$$a_0 \sin^n x + a_1 \sin^{n-1} x \cos x + a_2 \sin^{n-2} \cos^2 x + \dots + a_n \cos^n x = 0 \quad (1)$$

называется однородным тригонометрическим уравнением.

С л у ч а й 1°. $a_0 \neq 0$.

Умножив обе части уравнения (1) на $\frac{1}{\cos^n x}$, получим

$$a_0 \operatorname{tg}^n x + a_1 \operatorname{tg}^{n-1} x + \dots + a_n = 0. \quad (2)$$

Так как $\frac{1}{\cos x} \neq 0$, то появление посторонних корней произойти не может. Область определения уравнения (2) уже области определения уравнения (1) так как левая часть уравнения (2) теряет смысл при значениях $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, а левая часть уравнения (1) имеет смысл при всех значениях x . Однако, ни одно из чисел $\frac{\pi}{2} + k\pi$ не удовлетворяет уравнению (1); в самом деле, положив в (1) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, получим противоречивое следствие $\cos x = \sin x = 0$. Следовательно, потери решений произойти не может, а потому уравнения (1) и (2) эквивалентны.

С л у ч а й 2°. Несколько первых коэффициентов равно нулю

$$a_0 = a_1 = \dots = a_{k-1} = 0; \quad \text{но } a_k \neq 0.$$

В этом случае уравнение примет вид:

$$\cos^k x (a_k \sin^{n-k} x + a_{k+1} \sin^{n-k-1} x \cos x + \dots + a_n \cos^{n-k} x) = 0;$$

оно эквивалентно совокупности двух уравнений:

$$\cos x = 0 \quad \text{и} \quad a_k \sin^{n-k} x + a_{k+1} \sin^{n-k-1} x \cos x + \dots + a_n \cos^{n-k} x = 0,$$

первое из которых есть простейшее уравнение, а для второго имеет место случай 1°.

П р и м е ч а н и е. Однородное уравнение может быть сведено к алгебраическому подстановкой $t = \operatorname{ctg} x$ (два возможных случая предлагаем рассмотреть учащимся).

Ниже указаны некоторые тригонометрические уравнения, приводящиеся к однородным:

1°.

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d.$$

Достаточно правую часть заменить на $d(\sin^2 x + \cos^2 x)$, чтобы получить однородное уравнение 2-й степени.

2°.

$$a \sin^4 x + b \sin^3 x \cos x + c \sin^2 x \cos^2 x + d \sin x \cos^3 x + \cos^4 x = f.$$

Достаточно правую часть заменить на $f \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x)^2$, чтобы получить однородное уравнение 4-й степени.

3°.

$$a \sin^2 x + b \sin 2x + c \cos 2x + d \cos^2 x = e.$$

Достаточно преобразовать $\sin 2x$ и $\cos 2x$ по формулам двойного аргумента и заменить e на $e(\sin^2 x + \cos^2 x)$, чтобы получить однородное уравнение 2-й степени.

Примеры.

1. Решить уравнение

$$(\cos x - \sin x)(2 \operatorname{tg} x + \sec x) + 2 = 0.$$

Р е ш е н и е. Применив универсальную подстановку, после преобразований получим:

$$-\frac{3t^4 + 6t^3 + 8t^2 - 2t - 3}{(1+t^2)(1-t^2)} = 0,$$

откуда (разложив числитель на множители):

$$(3t^2 - 1)(t^2 + 2t + 3) = 0.$$

Действительные корни последнего уравнения суть $t = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, откуда

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

Данное уравнение не имеет решений вида $(2k+1)\pi$, а потому полученная серия является общим решением.

2. Решить уравнение

$$3 - 7 \cos^2 x \sin x - 3 \sin^3 x = 0.$$

Решение. Положим $t = \sin x$, заменим $\cos^2 x$ на $1 - t^2$ и составим смешанную систему:

$$4t^3 - 7t + 3 = 0, \quad -1 \leq t \leq 1.$$

Кубическое уравнение имеет три действительные корни:

$$t_1 = 1 \quad t_2 = \frac{1}{2}, \quad t = -\frac{3}{2},$$

неравенствам удовлетворяют два первые, откуда:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{и} \quad x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi.$$

3. Решить уравнение

$$\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = 1 + \sin 2x.$$

Решение. Для рационализации достаточно положить $\operatorname{tg} x = t$, так как

$$\sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

рационально выражается через t . Имеем:

$$\frac{1+t}{1-t} = 1 + \frac{2t}{1+t^2},$$

откуда

$$2(1+t)t^2 = 0.$$

Из последнего уравнения найдем два различных решения

$$t = -1 \quad \text{и} \quad t = 0,$$

откуда:

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad \text{и} \quad x = k\pi.$$

4. Решить уравнение

$$5 \cos 2x = 4 \sin x.$$

Решение. Так как $\cos 2x$ выражается рационально через $\sin x$:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x,$$

то для рационализации достаточно положить $t = \sin x$, тогда получим:

$$10t^2 + 4t - 5 = 0,$$

откуда:

$$t = \frac{-2 \pm \sqrt{4+50}}{10} = \sin x$$

и

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{-2 \pm \sqrt{54}}{10} + n\pi.$$

5. Решить однородное уравнение

$$2 \sin^3 x - \sin^2 \cos x + 2 \sin x \cos^2 x - \cos^3 x = 0.$$

Решение. Разделив обе части на $\cos^3 x$ и положив $t = \operatorname{tg} x$, получим:

$$2t^3 - t^2 + 2t - 1 = 0$$

или, разложив левую часть на множители,

$$(t^2 + 1)(2t - 1) = 0.$$

Это уравнение имеет один действительный корень $t = \frac{1}{2}$, которому соответствует серия решений:

$$x = \arctg \frac{1}{2} + k\pi.$$

6. Решить уравнение

$$6 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x - 5 \cos^2 x = 2.$$

Решение. Заменяя правую часть на $2 \cos^2 x + 2 \sin^2 x$, после переноса всех членов в левую часть получим однородное уравнение

$$4 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x - 7 \cos^2 x = 0;$$

положив $t = \operatorname{tg} x$, получим:

$$4t^2 + 3t - 7 = 0, \text{ откуда } t_1 = -\frac{7}{4}, \quad t_2 = 1$$

и, следовательно,

$$x = -\arctg \frac{7}{4} + k\pi \quad \text{и} \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

7. Решить уравнение

$$\sin 2x = \cos 2x - \sin^2 x + 1.$$

Решение. Преобразуем функции двойного аргумента и свободный член:

$$2 \sin x \cos x = (\cos^2 x - \sin^2 x) - \sin^2 x + (\cos^2 x + \sin^2 x)$$

или

$$\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0.$$

Положим $\operatorname{tg} x = t$:

$$t^2 + 2t - 2 = 0, \quad \text{откуда} \quad t = -1 \pm \sqrt{3}$$

и

$$x = \arctg (-1 \pm \sqrt{3}) + k\pi.$$

§ 49. О преобразовании формул общего решения тригонометрического уравнения

Во многих практически часто встречающихся случаях общее решение тригонометрического уравнения может быть задано при помощи конечного числа серий решений. Разбиение общего решения на серии можно осуществить различными способами, а потому общее решение тригонометрического уравнения можно задать различными системами формул. Пусть, например, некоторая серия решений задана формулой

$$x = f(n)$$

(где n — целочисленный параметр).

Разбив все целые числа на четные и нечетные $n = 2k$ и $n = 2k_1 + 1$, можно разбить данную серию на две серии

$$x = f(2k) \quad \text{и} \quad x = f(2k_1 + 1);$$

можно разбить данную серию на три серии, например, так:

$$x = f(3k), \quad x = f(3k + 1), \quad x = f(3k + 2) \quad \text{и т. д.}$$

Возможно также преобразование, при котором несколько серий объединяются в одну, т. е. задаются одной формулой.

Возможно, что в двух сериях окажутся одинаковые решения, в таком случае можно, оставив эти решения в одной серии, исключить их из другой.

Мы ограничимся рассмотрением лишь частного случая, когда общее решение тригонометрического уравнения можно составить из конечного множества двухсторонних арифметических прогрессий*.

Ниже указаны некоторые общие положения, относящиеся к двусторонним арифметическим прогрессиям, часто применяющиеся при преобразовании формул решений тригонометрических уравнений.

Рассмотрим произвольную двустороннюю арифметическую прогрессию

$$\dots, a - 2d, a - d, a, a + d, a + 2d, \dots, a + nd, \dots, \quad \{a + nd\}.$$

1°. За начальный член этой прогрессии (соответствующей значению $n = 0$) можно принять любой ее член. Положим, например, $b = a + kd$ (где k — произвольное целое число), тогда прогрессия

$$\dots, b - d, b, b + d, b + 2d, \dots, b + ld, \dots \quad \{b + ld\}$$

состоит из тех же членов, что и первая прогрессия. В самом деле,

$$a + nd = (a + kd) + (n - k)d = b + (n - k)d.$$

Значит, член $a + nd$, содержащийся в первой прогрессии под номером n , содержится во второй прогрессии под номером $n - k$, а всякий член $b + ld = a + (l + k)d$ второй прогрессии содержится в первой под номером $l + k$.

Так, например, общее решение простейшего уравнения $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ может быть представлено в виде:

$$x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \quad \text{или в виде} \quad x = \frac{2}{3}\pi + n\pi \quad (\text{здесь} \quad k = n + 1).$$

2°. Если $\delta = kd$, то все члены прогрессии

$$\dots, a - 2\delta, a - \delta, a, a + \delta, a + 2\delta, \dots \quad \{a + n\delta\}$$

содержатся среди членов прогрессии $\{a + nd\}$. В самом деле, $a + n\delta = a + nk d$, т. е. n -й член прогрессии $\{a + n\delta\}$ содержится в прогрессии $\{a + nd\}$ под номером nk .

Так, например, общее решение уравнения

$$\sin x \cdot \sin 3x = 0$$

состоит из двух прогрессий:

$$x = k\pi \quad \text{и} \quad x = n\frac{\pi}{3}.$$

* Этим случаем обычно ограничивается школьная учебная литература

Члены первой прогрессии содержатся во второй, а потому общее решение может быть задано формулой $x = \frac{\pi n}{3}$ (здесь $\delta = 3d$).

3°. Пусть k — некоторое натуральное число; члены прогрессии $\{a + nd\}$ можно разбить на k арифметических прогрессий с разностью kd следующим образом:

$$\dots, a - kd, \quad a, \quad a + kd, \quad \dots \quad (0)$$

$$\dots, (a + d) - kd, \quad a + d, \quad (a + d) + kd, \quad \dots \quad (1)$$

$$\dots, (a + 2d) - kd, \quad (a + 2d), \quad (a + 2d) + kd, \quad \dots \quad (2)$$

$$\dots, [a + (k - 1)d] - kd, \quad a + (k - 1)d, \quad [a + (k - 1)d] + kd, \quad \dots \quad (k - 1)$$

Эти k прогрессий составлены из членов прогрессии $\{a + nd\}$, причем всякий член прогрессии $\{a + nd\}$ содержится среди членов одной из этих прогрессий. В самом деле, разделим число n на k (с остатком):

$$n = sk + r$$

(где $r = 0, 1, 2, \dots, k - 1$), тогда член $a + nd$ содержится в r -й прогрессии под номером s .

Обратно, если даны k прогрессии с общей разностью kd , содержащие члены $a, a + d, a + 2d, \dots, a + (k - 1)d$ (каждый из этих членов может содержаться лишь в одной прогрессии), то такие прогрессии можно объединить в одну прогрессию с разностью d .

Так, например, двустороннюю прогрессию с разностью 2: $\dots, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \dots$, которую образуют нечетные числа, можно разбить на следующие три прогрессии с разностью 6:

$$-11, \quad -5, \quad 1, \quad 7, \quad 13, \dots,$$

$$-9, \quad -3, \quad 3, \quad 9, \quad 15, \dots,$$

$$-7, \quad -1, \quad 5, \quad 11, \quad 17, \dots$$

Если периодом (не обязательно наименьшим положительным) уравнения является 2π , то множество всех его решений в пределах одного периода удобно изображать точками единичной окружности. Число прогрессий с разностью 2π , из которых состоит общее решение, равно числу геометрически различных точек единичной окружности.

Чтобы показать, что различные формулы изображают одно и то же множество решений, достаточно убедиться, что на единичной окружности эти формулы определяют одно и то же множество точек.

Примечания: 1. Для уравнений с периодом не равным 2π применение указанной геометрической интер-

претации может привести к ошибкам. Так, например, множество всех решений уравнения $\cos \frac{x}{2} = 1$ есть $x = 4k\pi$ (период уравнения равен 4π). На единичной окружности получим точку $A(1, 0)$, однако, не всякая дуга $2n\pi$, оканчивающаяся в точке A , служит решением уравнения. Для геометрического изображения корней уравнений с периодом не равным 2π следует пользоваться не единичной окружностью, а числовой прямой.

II. Вопрос о преобразовании формул общего решения не имеет принципиального значения. Вовсе не обязательно подвергать каким-либо преобразованиям правильно составленные формулы общего решения.

При решении уравнения различными способами его общее решение может оказаться представленным посредством различных формул; в связи с этим иногда и возникает потребность в преобразовании друг в друга полученных формул.

Примеры.

1. Общее решение уравнения $2 \sin^2 x = 1$ (период уравнения π можно задать) формулами

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + n\pi \quad (I) \quad \text{и} \quad x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{4} + n\pi \quad (II)$$

(черт. 174, римскими цифрами отмечены номера серий). Разобьем общее решение на четыре арифметические прогрессии:

$$x = \begin{cases} \frac{\pi}{4} + 2n\pi \\ -\frac{\pi}{4} + (2n+1)\pi \end{cases} = \begin{cases} \frac{\pi}{4} + 2n\pi \\ \frac{3\pi}{4} + 2n\pi \end{cases}$$

и

$$x = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} + 2n\pi \\ \frac{\pi}{4} + (2n+1)\pi \end{cases} = \begin{cases} \frac{7}{4}\pi + 2n\pi \\ \frac{5}{4}\pi + 2n\pi \end{cases} \quad (\text{свойство } 1^\circ)$$

Все четные прогрессии можно объединить в одну:

$$x = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}. \quad (\text{свойство } 3^\circ)$$

Объединение серий (I) и (II) можно выполнить также следующим образом:

$$x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi = (4k \pm 1) \frac{\pi}{4}.$$

Две прогрессии $\{4k+1\}$ и $\{4k-1\}$ образуют множество всех нечетных чисел $\{2n+1\}$ (при $n=2k$ получим первую прогрессию, при $n=2k-1$ — вторую), а потому

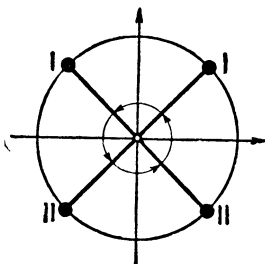
$$x = (2n+1) \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + n \frac{\pi}{2}.$$

2. Общее решение уравнения, рассмотренного на стр. 273 (пример 1а), на основании свойств 1° может быть преобразовано так:

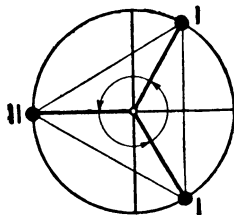
$$x = \pm 18^\circ 26' - 22^\circ 30' + 180^\circ n = \begin{cases} -4^\circ 4' + 180^\circ n \\ -40^\circ 36' + 180^\circ n \end{cases} = \begin{cases} 175^\circ 56' + 180^\circ n \\ 139^\circ 24' + 180^\circ n \end{cases}$$

3. Решить уравнение

$$\sin^2 x - \cos^2 x = \cos x.$$



Черт. 174



Черт. 175

Решение. Положив $t = \cos x$, получим:

$$2t^2 + t - 1 = 0, \text{ откуда } t_1 = \frac{1}{2} \text{ и } t_2 = -1.$$

Следовательно, получим две серии решений:

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ и } x = (2k+1)\pi. \quad (\text{черт. 175})$$

Полученные три арифметические прогрессии можно объединить в одну:

$$x = \begin{cases} -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \pi + 2k\pi \end{cases} = \begin{cases} -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi = -\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}n \\ \left(\frac{4}{3}\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi \end{cases} n = \frac{(2\pi-1)\pi}{3}.$$

4. Общее решение уравнения

$$\sin \frac{x}{3} \sin \frac{x}{5} = 0$$

состоит из двух геометрических прогрессий:

$$x = 3k\pi \text{ и } x = 5l\pi.$$

Однако эти прогрессии имеют общие члены: при k , кратном числу 5, члены первой прогрессии содержатся во второй, а при l , кратном числу 3, члены второй прогрессии содержатся в первой. Общее решение может быть представлено при помощи семи прогрессий, не имеющих попарно общих членов:

$$x = 15k\pi, \quad x = 3\pi(5k + 1), \quad x = 3\pi(5k + 2), \\ x = 3\pi(5k + 3), \quad x = 3\pi(5k + 4), \quad x = 5\pi(3k + 1), \quad x = 5\pi(3k + 2).$$

Эти прогрессии можно представить в виде следующих четырех серий:

$$x = 15k\pi, \quad x = 3\pi(5k \pm 1), \quad x = 3\pi(5k \pm 2), \quad x = 5\pi(3k \pm 1),$$

объединив попарно в одну формулу 2-ю и 5-ю, 3-ю и 4-ю, 6-ю и 7-ю прогрессии.

5. Решить уравнение

$$2 \cos^2 4x + \sin^2 3x = 1.$$

Решение. Выполним рационализирующую подстановку $t = \cos 2x$

$$2 \cos^2 4x = 2(2t^2 - 1)^2 = 8t^4 - 8t^2 + 2;$$

$$\sin^2 3x = \frac{1}{2}(1 - \cos 6x) = \frac{1}{2}[1 - \cos(3 \cdot 2x)] = \frac{1}{2}(1 - 4 \cos^3 2x + 3 \cos 2x) = \\ = \frac{1}{2} - 2t^3 + \frac{3}{2}t,$$

получим уравнение

$$16t^4 - 4t^3 - 16t^2 + 3t + 3 = 0 \quad \text{или} \quad (4t^2 - 3)(4t^2 - t - 1) = 0,$$

$$\cos 2x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{и} \quad \cos 2x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{8},$$

следовательно,

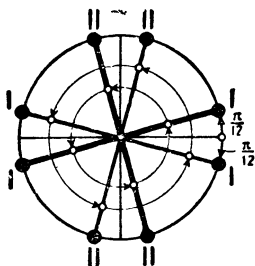
$$x = \pm \frac{\pi}{12} + k\pi, \quad x = \pm \frac{5}{12}\pi + k\pi \quad \text{и} \quad x = \pm \arccos \frac{1 \pm \sqrt{17}}{8} + 2k\pi.$$

Первые две серии решений можно объединить в одну. Имеем:

$$x = \begin{cases} \frac{\pi}{12} + k\pi \\ -\frac{\pi}{12} + k\pi, \end{cases} \quad (I)$$

$$x = \begin{cases} \frac{5}{12}\pi + k\pi \\ -\frac{5}{12}\pi + k\pi \end{cases} = \begin{cases} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) + k\pi \\ \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right) + k\pi \end{cases} = \begin{cases} -\frac{\pi}{12} + (2k+1)\frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{12} + (2k-1)\frac{\pi}{2} \end{cases}. \quad (II)$$

Эти четыре прогрессии с разностью π можно объединить в две с разностью $\frac{\pi}{2}$:



$$x = \begin{cases} \frac{\pi}{12} + n \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{12} + n \frac{\pi}{2} \end{cases} = \pm \frac{\pi}{12} + n \frac{\pi}{2}.$$

Выполненное преобразование пояснено на чертеже 176, число 2π есть период уравнения (хотя и не наименьший положительный).

Черт. 176

§ 50. Различные частные приемы решения тригонометрических уравнений

При решении тригонометрических уравнений широко применяется разложение левой части уравнения

$$f(x) = 0 \quad (f)$$

на множители. Из общих положений теории уравнений известно, что если левая часть уравнения (f) представлена в виде произведения

$$f(x) \equiv f_1(x) f_2(x) \dots f_n(x),$$

то достаточно решить совокупность уравнений

$$f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = 0, \dots, f_n(x) = 0, \quad (f_i)$$

объединив в одно множество все решения каждого из уравнений (f_i) .

При решении совокупности уравнений (f_i) следует брать лишь те корни, которые принадлежат общей части областей определения всех уравнений (f_i) . Если, например, при некотором значении $x = a$ удовлетворяется какое-либо (хотя бы одно) из уравнений (f_i) , а левая часть некоторого другого уравнения теряет смысл, то значение $x = a$ не может служить решением данного уравнения (посторонний корень).

При разложении на множители левой части данного уравнения $f(x) = 0$ широко применяются формулы преобразования сумм тригонометрических функций в произведения.

В практике решения тригонометрических уравнений д р о б н ы х р а ц и о н а л ь н ы х относительно содержащихся в них тригонометрических функций пользуются общими правилами пре-

образования дробных выражений с целью их упрощения. Обычные преобразования уравнений, заключающиеся в сокращении дробных выражений на общие функциональные множители числителя и знаменателя, в сокращении взаимнопротивоположных (функциональных) слагаемых, в применении законов арифметических действий, в «отбрасывании» общего знаменателя, в возведении в натуральную степень обеих частей уравнения, не могут сузить область определения данного уравнения, а могут лишь ее расширить, поэтому применение указанных преобразований может повлечь за собой появление посторонних решений, но не может привести к потере корней. Отсюда вытекает следующее практически важное указание: *если при решении уравнения применяются преобразования, не сужающие его область определения, то в процессе решения нет необходимости следить за изменением области определения уравнения, а достаточно решить преобразованное уравнение и проверить его корни подстановкой в данное уравнение.*

Если кроме «упрощения» уравнения (сокращение на функциональные сомножители, сокращение взаимно-противоположных слагаемых, «отбрасывание» общего знаменателя) не применялись никакие другие преобразования, то посторонними решениями могут оказаться лишь те значения неизвестного, при которых левая или правая части данного уравнения теряют смысл.

При проверке корней полезно (в целях сокращения работы) иметь ввиду следующие указания: для уравнения $f(x) = 0$, обладающего периодом, достаточно подвергнуть испытанию корни на каком-либо промежутке, например, $\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right)$ равном по длине периоду уравнения.

Если кроме того функция $f(x)$ является четной (либо нечетной), то наличие корня $x = a$ влечет за собой наличие взаимно-противоположного корня $x = -a$. В этом случае достаточно ограничиться проверкой лишь неотрицательных корней на сегменте $\left[0, \frac{l}{2}\right]$ по длине равном полупериоду уравнения.

Примечание. Если применяется принцип предельного перехода, то испытанию подлежат все те значения неизвестного (в пределах периода либо полупериода уравнения), при которых теряет смысл левая либо правая часть исходного уравнения.

Примеры. В примерах 1 и 2 показано применение формул преобразования сумм в произведения с целью разложения левой части уравнения на множители.

1. Решить уравнение

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x.$$

Решение. Преобразуем левую часть:

$$\begin{aligned} \sin x + \sin 2x + \sin 3x &= (\sin x + \sin 3x) + \sin 2x = \\ &= 2 \sin 2x \cos x + \sin 2x = 2 \sin x \cos x (2 \cos x + 1). \end{aligned}$$

Преобразуем правую часть:

$$1 + \cos x + \cos 2x = (1 + \cos 2x) + \cos x = 2 \cos^2 x + \cos x = \\ = \cos x (2 \cos x + 1).$$

Перенесем все члены в левую часть и представим данное уравнение в виде

$$(2 \cos x + 1) \cos x (2 \sin x - 1) = 0.$$

Приравнявая поочередно нулю три сомножителя получим три серии решений:

$$x = \pm \frac{2}{3} \pi + 2k\pi, \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + k\pi.$$

2. Решить уравнение

$$\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$$

Решение. После переноса всех членов в левую часть, разложим ее на множители следующим образом:

$$\sin^2 x - \sin^2 3x + \sin^2 2x = (\sin x - \sin 3x)(\sin x + \sin 3x) + \sin^2 2x = \\ = -4 \cos 2x \sin x \sin 2x \cos x + \sin^2 2x = -2 \cos 2x \sin^2 2x + \sin^2 2x = \\ = \sin^2 2x (1 - 2 \cos 2x).$$

Данное уравнение эквивалентно совокупности двух уравнений:

$$\sin 2x = 0 \quad \text{и} \quad 2 \cos 2x = 1, \quad \text{откуда} \quad x = \frac{k\pi}{2} \quad \text{и} \quad x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$$

В примерах 3—6 показано применение преобразования произведений в суммы и в частности преобразования понижения степени.

3. Решить уравнение

$$\sin x + 2 \sin x \cos(a - x) - \sin a = 0.$$

Решение. Преобразуем в сумму средний член; тогда уравнение примет вид:

$$\sin x + \sin(2x - a) = 0 \quad \text{или} \quad \sin(2x - a) = \sin(-x),$$

откуда

$$2x - a = (-1)^{n+1} x + n\pi \quad \text{и} \quad x = \frac{a + n\pi}{2 + (-1)^n}.$$

4. Решить уравнение

$$\sin x \sin 7x = \sin 3x \sin 5x.$$

Решение. Преобразуем в сумму правую и левую части:

$$\frac{\cos 6x - \cos 8x}{2} = \frac{\cos 2x - \cos 8x}{2} \quad \text{или} \quad \cos 6x = \cos 2x,$$

откуда

$$6x = \pm 2x + 2k\pi \quad \text{и} \quad x = \frac{k\pi}{2}, \quad x = \frac{n\pi}{4}.$$

Первая серия содержится во второй (при четном n) и потому общее решение выражается формулой $x = \frac{n\pi}{4}$.

5. Решить уравнение

$$\sin^2 x - \cos^2 x = \cos \frac{x}{2}.$$

Решение. Применяя формулу косинуса двойного аргумента, получим

$$-\cos 2x = \cos \frac{x}{2} \quad \text{или} \quad \cos(2x + \pi) = \cos \frac{x}{2},$$

откуда

$$2x + \pi = \pm \frac{x}{2} + 2k\pi,$$

$$(4 \pm 1)x = (4k - 2)\pi$$

и, наконец,

$$x = \frac{2(2k-1)\pi}{5} \quad \text{и} \quad x = \frac{2(2k-1)\pi}{3}.$$

6. Решить уравнение

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2.$$

Решение. Применяя преобразование понижения степени, получим эквивалентное уравнение:

$$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = 0.$$

Для разложения левой части на множители группируем первое слагаемое со вторым, третье с четвертым

$$\cos 3x \cos x + \cos x \cos 7x = 0$$

или

$$\cos x (\cos 3x + \cos 7x) = 0$$

и окончательно

$$\cos x \cos 2x \cos 5x = 0,$$

откуда найдем три серии решений:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \quad x = \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5}.$$

Решения первой серии содержатся в третьей (черт. 177). В самом деле,

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{5\pi}{10} + 5k\frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5} + 5k\frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{10} + (5k+2)\frac{\pi}{5};$$

общее решение состоит из двух серий:

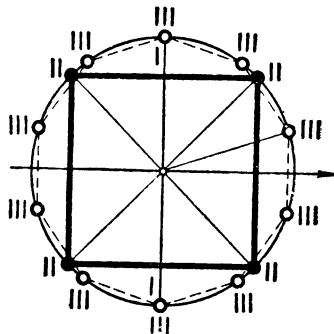
$$x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad x = \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5}.$$

7. Решить уравнение

$$\sin x \sin 3x = \frac{1}{2}.$$

Решение. Преобразуем левую часть в сумму

$$\cos 2x - \cos 4x = 1.$$



Черт. 177

Подставив в левую часть $\cos 4x = 2 \cos^2 2x - 1$, получим уравнение

$$(2 \cos 2x - 1) \cos 2x = 0,$$

из которого найдем две серии решений

$$x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi \quad \text{и} \quad x = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}.$$

Ниже приведены примеры преобразования уравнений, изменяющие область определения уравнения.

8. Решить уравнение

$$\sin 2x \cos x \operatorname{tg} x = 0. \quad (1)$$

Решение. Сократив левую часть уравнения на $\cos x$, получим уравнение

$$\sin x \sin 2x = 0 \quad \text{или} \quad 2 \sin^2 x \cos x = 0. \quad (2)$$

Общее решение найдем из уравнения

$$\sin x = 0, \quad \text{откуда} \quad x = k\pi.$$

Уравнение $\cos x = 0$ можно не рассматривать, так как если $\cos x = 0$, то левая часть уравнения (1) теряет смысл

Примечание. Применение метода предельного перехода дает $\lim \sin 2x \cos x \operatorname{tg} x = \lim 2 \sin^2 x \cos x = 0$.

$$x \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

Следовательно, $\frac{\pi}{2}$, а также все числа $\frac{\pi}{2} + k\pi$ суть особые решения уравнения

9. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} x + \frac{\cos x}{1 + \sin x} = 2. \quad (1)$$

Решение. Умножим обе части на $1 + \sin x$, а затем на $\cos x$. Получим последовательно

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x + \sin x \operatorname{tg} x + \cos x &= 2(1 + \sin x), \\ \sin x + \sin^2 x + \cos^2 x &= 2 \cos x (1 + \sin x), \\ (\sin x + 1)(1 - 2 \cos x) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Уравнение (2) есть следствие уравнения (1) с более широкой областью определения.

Общее решение (1) найдем, решив уравнение

$$1 - 2 \cos x = 0, \quad \text{откуда} \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

Уравнение (1) имеет период 2π ; для проверки полученной серии корней достаточно проверить лишь два корня $x = \frac{\pi}{3}$ и $x = -\frac{\pi}{3}$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \left(\pm \frac{\pi}{3} \right) + \frac{\frac{1}{2}}{1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}} &= \pm \sqrt{3} + \frac{1}{2 \pm \sqrt{3}} = \\ &= \pm \sqrt{3} + (2 \mp \sqrt{3}) = 2. \end{aligned}$$

Уравнение $\sin x + 1 = 0$ дает серию посторонних решений.

10. Решить уравнение

$$\frac{\operatorname{tg} 4x}{\operatorname{tg} x} = 1.$$

Решение. Имеем последовательно

$$\operatorname{tg} 4x - \operatorname{tg} x = 0, \quad \text{откуда}$$

$$4x = x + k\pi \quad \text{и} \quad x = \frac{k\pi}{3}.$$

В процессе решения уравнения область его определения расширилась. Левая часть данного уравнения есть четная периодическая функция с периодом π , а правая — постоянна. Поэтому достаточно испытать лишь два корня 0 и $\frac{\pi}{3}$, принадлежащие полупериоду $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ данного уравнения.

Корень $x = 0$ посторонний.

Корень $x = \frac{\pi}{3}$ удовлетворяет уравнению.

В промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ равном по длине периоду уравнение имеет два корня $\pm \frac{\pi}{3}$.

Серия $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$ дает общее решение уравнения.

11. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x = 0. \quad (1)$$

Решение. Выполняем последовательно тождественные преобразования:

$$\frac{\sin 3x}{\cos x \cos 2x} + \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = 0. \quad (2)$$

$$\frac{\sin 3x [\cos 3x + \cos x \cos 2x]}{\cos x \cos 2x \cos 3x} = 0. \quad (3)$$

Разложим на множители числитель:

$$\begin{aligned} \cos 3x + \cos x \cos 2x &= (4 \cos^3 x - 3 \cos x) + \cos x (2 \cos^2 x - 1) = \\ &= 2 \cos x (3 \cos^2 x - 2). \end{aligned}$$

Подставив в левую часть уравнения (2), после сокращения получим

$$\frac{\sin 3x (3 \cos^2 x - 2)}{\cos 2x \cos 3x} = 0,$$

откуда $\sin 3x = 0$ и $3 \cos^2 x - 2 = 0$. Из этих уравнений найдем две серии решений:

$$x = k \frac{\pi}{3}, \quad x = \pm \arccos \sqrt{\frac{2}{3}} + k\pi.$$

Левая часть уравнения (1) — нечетная функция с периодом π . Поэтому достаточно проверить три корня, принадлежащие положительному полупериоду $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{\pi}{3} \quad \text{и} \quad x_2 = \arccos \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Для проверки можно воспользоваться уравнением (3) эквивалентным уравнению (1). Корни x_1 , x_2 и x_3 получены из условия обращения в нуль числителя, при этом (как легко проверить) ни один из множителей знаменателя не равен нулю. Следовательно, x_1 , x_2 и x_3 удовлетворяют уравнению (3) и эквивалентному ему уравнению (1).

12. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4 \cos^2 x}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} \frac{x}{2}}. \quad (1)$$

Решение. Выполняем последовательно тождественные преобразования и упрощения уравнения:

$$\begin{aligned} -\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{4 \cos^2 x \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{-\cos x}, \\ \operatorname{tg} x &= 2 \sin x \cos x, \\ \frac{\sin x (1 - 2 \cos^2 x)}{\cos x} &= 0, \\ \sin x \cos 2x &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

откуда

$$x = k\pi \quad \text{и} \quad x = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}.$$

Уравнение (2) есть следствие (1) с более широкой областью определения.

Число π — период уравнения (1), обе его части суть нечетные функции, поэтому достаточно проверить лишь два корня уравнения (2) $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{\pi}{4}$, содержащиеся на сегменте $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Оба эти корня для уравнения (1) являются посторонними.

Уравнение (1) не имеет решений.

На примерах 13 и 14 показан прием решения некоторых тригонометрических уравнений посредством введения вспомогательного угла.

Примеры.

13. Решить уравнение

$$a \sin x + b \cos x = c, \quad (1)$$

где $|a| + |b| \neq 0$.

Решение. Введем вспомогательный угол φ (см. § 24):

$$\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{b}{a}.$$

Разделив обе части уравнения на $\pm \sqrt{a^2 + b^2}$ (взятый с надлежащим знаком, см. стр. 124), получим:

$$\sin(x + \varphi) = \frac{c}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}}, \quad (2)$$

и, наконец,

$$x = (-1)^n \operatorname{arc} \sin \frac{c}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}} + n\pi - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{b}{a}.$$

Исходное уравнение эквивалентно (2), а потому имеет решения, если

$$\left| \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq 1$$

или $c^2 \leq a^2 + b^2$. Если $c^2 > a^2 + b^2$, то уравнение не имеет решений.

Рассмотрим, например, уравнение

$$\sqrt{3} \cos x + \sin x = 1.$$

Разделив обе части на 2, положим $\varphi = \frac{\pi}{3}$, получим

$$\sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2}, \text{ откуда } x = (-1)^n \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + n\pi.$$

Геометрическая интерпретация. Решение уравнения (1) можно толковать как отыскание точки $X = \cos x$, $Y = \sin x$, в которой прямая линия

$$bX + aY = c \quad (3)$$

пересекается с единичной окружностью

$$X^2 + Y^2 = 1.$$

Введение вспомогательного угла из условий $\cos \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$,

$\sin \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ есть приведение уравнения прямой (3) к нормальному виду.

При этом $\left| \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$ есть расстояние прямой (3) от начала координат.

Прямая имеет с единичной окружностью общие точки в том и только в том случае, если

$$\left| \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq 1.$$

Так, например, чтобы решить уравнение

$$\cos \alpha + \sin \alpha = 1,$$

достаточно найти точки пересечения прямой $X + Y = 1$ и окружности $X^2 + Y^2 = 1$. Искомые точки суть $A(1,0)$ и $B(0,1)$, в этих точках оканчиваются дуги $2k\pi$ и $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

14. Решить уравнение

$$3 \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) + 4 \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) + 5 \sin \left(5x + \frac{\pi}{6} \right) = 0.$$

Решение. В силу формул приведения

$$\sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right) = \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right).$$

Введем вспомогательный угол, определяемый из условий

$$\cos \varphi = \frac{3}{5}, \quad \sin \varphi = \frac{4}{5}, \quad \text{т. е. } \varphi = \arctg \frac{4}{3}.$$

Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$\sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \cos \varphi + \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \sin \varphi = -\sin \left(5x + \frac{\pi}{6} \right)$$

или

$$\sin \left(x + \varphi - \frac{\pi}{3} \right) = \sin \left(-5x - \frac{\pi}{6} \right),$$

откуда получим две серии решений

$$x + \varphi - \frac{\pi}{3} = -5x - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{и, наконец,} \quad x = \frac{\pi}{36} - \frac{\varphi}{6} + \frac{k\pi}{3}$$

и

$$x + \varphi = 5x + \frac{\pi}{6} + (2k + 1)\pi, \quad \text{откуда} \quad x = \frac{\varphi}{4} - \frac{\pi}{24} + \frac{(2k + 1)}{4}\pi.$$

Указанные выше и другие частные приемы решения тригонометрических уравнений применяются обычно в их различных комбинациях. Умение целесообразно пользоваться различными частными приемами приобретает лишь в результате длительной практики. Никакими общими правилами невозможно предусмотреть также различные искусственные приемы, вносящие упрощения в процесс решения тригонометрических уравнений.

Нередко одно и то же тригонометрическое уравнение может быть решено различными способами, при этом сравнительная простота процесса решения (вообще говоря) зависит от выбора способа решения. Так, например, уравнение линейное относительно синуса и косинуса

$$a \sin x + b \cos x = c$$

можно решить следующими способами:

1°. Посредством универсальной подстановки (см. стр. 284).

2°. Посредством введения вспомогательного угла (см. стр. 300):

$$\pm \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi) = c.$$

3°. Можно выразить одну тригонометрическую функцию через другую, например,

$$\cos x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x}.$$

4°. Можно возвести обе части в квадрат, тогда получится уравнение, приводящееся к однородному:

$$a^2 \sin^2 x + 2ab \cos x \sin x + b^2 \cos^2 x = c^2.$$

В частном случае при $a = b$ последнее уравнение примет особо простой вид:

$$ab \sin 2x = c^2 - a^2$$

5°. Рассмотрим тождество

$$(a \sin x + b \cos x)^2 + (a \cos x - b \sin x)^2 = a^2 + b^2.$$

В силу данного уравнения получим

$$(a \cos x - b \sin x)^2 = a^2 + b^2 - c^2.$$

Значения $\sin x$ и $\cos x$ определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} a \sin x + b \cos x &= c; \\ -b \sin x + a \cos x &= \pm \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}. \end{aligned}$$

Неизвестное x определяется по найденным значениям синуса и косинуса.

Первый способ не приводит к появлению посторонних решений, потеря решений имеет место лишь при $b = -c$ (см. стр. 284).

Второй и пятый способы также не приводят ни к потере, ни к появлению посторонних решений.

При третьем (а также при четвертом) способе возможно появление посторонних решений, что показано на примере решения уравнения $\sin x + \cos x = 1$ (см. стр. 283, пример 3).

Рассмотрим еще следующий пример, уравнение

$$\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg} x$$

решается непосредственно:

$$2\operatorname{tg} x = 0, \operatorname{tg} x = 0, x = k\pi.$$

Однако это же уравнение можно решить другим способом:

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(-x), \quad x = -x + n\pi, \quad x = \frac{n\pi}{2}.$$

Применение второго способа нецелесообразно, так как оно искусственно и, кроме того, вносит посторонние решения (см. стр. 279). Посторонние решения получаются при нечетных значениях $n=2k+1$, так как тогда теряют смысл левая и правая части уравнения.

Выбор наиболее целесообразных способов решения достигается практикой.

Примеры.

15. Решить уравнение

$$\sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x = \frac{3}{8}.$$

Решение. 1-й способ. Выразим степени тригонометрических функций через функции кратных дуг:

$$\cos^3 x = \frac{1}{4} [\cos 3x + 3 \cos x],$$

$$\sin^3 x = \frac{1}{4} [3 \sin x - \sin 3x];$$

подставив в уравнение, получим:

$$\frac{3}{4} [\sin x \cos 3x + \cos x \sin 3x] = \frac{3}{8}$$

или

$$\sin 4x = \frac{1}{2}, \quad \text{откуда} \quad x = (-1)^n \frac{\pi}{24} + \frac{n\pi}{4}.$$

2-й способ. К тому же результату придем, применив формулу для тригонометрических функций тройного аргумента:

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x, \quad \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x;$$

после подстановки получим:

$$3\sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{3}{8}, \text{ или } \sin 4x = \frac{1}{2}.$$

В данном примере оба способа равноценны в смысле простоты решения.

15. Решить уравнение

$$\sin x + \cos x + \sin x \cos x = 1.$$

Решение. 1-й способ. Перепишем уравнение в виде

$$\sin x + \cos x = 1 - \cos x \sin x. \quad (1)$$

После возведения в квадрат обеих частей и тождественных преобразований, получим:

$$1 + \sin 2x = 1 - \sin 2x + \frac{1}{4} \sin^2 2x \quad (2)$$

или

$$\sin 2x (8 - \sin 2x) = 0.$$

Так как второй множитель положителен, то

$$\sin 2x = 0, \quad \text{откуда } x = k \frac{\pi}{2}.$$

При переходе от уравнения (1) к (2) возможно появление посторонних корней (возведение обеих частей в квадрат).

Достаточно испытать корни $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \text{ и } \frac{3}{2}\pi$ в пределах одного периода уравнения.

Уравнению удовлетворяют два корня 0 и $\frac{\pi}{2}$.

Следовательно, получим две серии решений

$$x = 2k\pi \quad \text{и} \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

2-й способ. Положим

$$\cos x + \sin x = t;$$

имеем:

$$t^2 = 1 + 2 \sin x \cos x,$$

$$\text{откуда } \cos x \sin x = \frac{t^2 - 1}{2}.$$

Данное уравнение примет вид:

$$t^2 + 2t - 3 = 0,$$

откуда $t = 1$ и $t = -3$.

Следовательно, получим совокупность двух уравнений

$$\cos x + \sin x = 1 \quad \text{и} \quad \cos x + \sin x = -3.$$

Первое уравнение было решено выше (стр. 283). Второе уравнение не имеет решений, так как каждое из слагаемых в левой части по абсолютной величине не превосходит 1 и в сумме не может получиться число -3 .

Второй способ более искусственен, чем первый, но зато он не вносит посторонних решений.

16. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}^3 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right).$$

Решение. Если применить универсальную подстановку $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, то получится рациональное уравнение, однако, проще поступить иначе. Преобразуем правую часть следующим образом:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) &= \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = \\ &= \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} \cdot \frac{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}} = \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} \cdot \frac{1 - \sin x}{\cos x}. \end{aligned}$$

Данное уравнение примет вид

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{(1 - \sin x)^2}{(1 + \sin x) \cos x};$$

освободившись от знаменателя, получим:

$$3 \sin x = 1, \quad \text{откуда} \quad x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + n\pi.$$

17. Решить уравнение

$$\frac{\sin(x + 20^\circ)}{\sin(x + 22^\circ)} = \frac{2}{3}.$$

Решение. Составим следующую пропорцию:

$$\frac{\sin(x + 20^\circ) + \sin(x + 22^\circ)}{\sin(x + 22^\circ) - \sin(x + 20^\circ)} = \frac{5}{1}.$$

Разложив на множители числитель и знаменатель, получим

$$\frac{\operatorname{tg}(x + 21^\circ)}{\operatorname{tg} 1^\circ} = 5,$$

откуда

$$\operatorname{tg}(x + 21^\circ) = 5 \operatorname{tg} 1^\circ$$

и

$$x = -21^\circ + \arcsin(5 \operatorname{tg} 1^\circ) + 180^\circ \cdot k.$$

18. Решить уравнение

$$\sin^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}.$$

Решение. Выразим левую часть через функции двойного аргумента следующим образом:

$$\begin{aligned} \sin^4 x &= \frac{(1 - \cos 2x)^2}{4}; \\ \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\left[1 - \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)\right]^2}{4} = \frac{(1 + \sin 2x)^2}{4}. \end{aligned}$$

После подстановки и тождественных преобразований, получим:

$$\cos 2x - \sin 2x = 1 \quad \text{или} \quad \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

откуда

$$2x + \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi.$$

Следовательно

$$x = k\pi \quad \text{и} \quad x = -\frac{\pi}{4} + k\pi.$$

19. Решить уравнение

$$\sin^{10} x + \cos^{10} x = \frac{29}{16} \cos^4 2x.$$

Решение. В качестве рационализирующего параметра удобно принять $t = \cos^2 2x$, так как

$$\sin^{10} x + \cos^{10} x = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^5 + \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^5 = \frac{1 + 10t + 5t^2}{16}.$$

Подставив в данное уравнение, получим смешанную систему:

$$24t^2 - 10t - 1 = 0, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

которая имеет единственное решение $t = \frac{1}{2}$; следовательно,

$$\cos 2x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 2x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \quad x = \frac{(2k+1)\pi}{8}.$$

20. Решить уравнение

$$\sin^n x + \cos^n x = 1,$$

где $n \neq 2$ — натуральное число.

Решение. $n = 2m + 1$ — нечетное число.

Положим $X = \cos x$, $Y = \sin x$. Уравнению могут удовлетворять только дуги, оканчивающиеся в I четверти, так как во II, III и IV четвертях хотя бы одна из координат отрицательна: следовательно, хотя бы одно из чисел X^n и Y^n также отрицательно. Кроме того, $|X|^n \leq 1$, $|Y|^n \leq 1$, а потому $X^n + Y^n < 1$.

Искомая дуга x не может оканчиваться внутри I четверти. В самом деле, при $n = 1$ уравнение примет вид $X + Y = 1$, но, с другой стороны, X и Y суть катеты прямоугольного треугольника с гипотенузой равной 1, а потому $X + Y > 1$.

Если $n = 2k + 1 > 1$, то $n \geq 3$, имеем:

$$X^n = X^2 \cdot X^{n-2} < X^2, \quad \text{так как } 0 < X < 1.$$

По той же причине $Y^n < Y^2$, но тогда

$$X^n + Y^n < X^2 + Y^2 = 1.$$

Уравнению удовлетворяют дуги $x = 2k\pi$ и $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, оканчивающиеся в граничных точках I четверти.

Пусть $n = 2m$ — четное число. Искомая дуга x не может оканчиваться ни в какой внутренней точке четвертой единичного круга, так как $X^n = |X|^n < X^2$, $Y^n = |Y|^n < Y^2$ и тогда $X^n + Y^n < 1$.

Уравнению удовлетворяют дуги $x = \frac{k\pi}{2}$, оканчивающиеся в граничных точках четвертой единичного круга.

21. Решить уравнение

$$(\sin x + \cos x) \sqrt{2} = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x.$$

Решение. После преобразований получим эквивалентное уравнение

$$\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sin 2x}.$$

Так как при произвольном x

$$\left| \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right| \leq 1, \quad \text{а} \quad \left| \frac{1}{\sin 2x} \right| > 1,$$

то уравнение может удовлетвориться лишь теми значениями x , при которых

$$\text{а) } \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 1 \quad \text{и} \quad \sin 2x = 1$$

или

$$\text{б) } \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = -1 \quad \text{и} \quad \sin 2x = -1.$$

В случае а)

первое уравнение дает: $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, а второе: $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$.

Множество всех решений, общих для обоих уравнений, определяется формулой

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi.$$

В случае б)

первое уравнение дает: $x = -\frac{3}{4}\pi + 2k\pi$, а второе $x = -\frac{\pi}{4} + n\pi$. В этом случае уравнения не имеют общих решений.

Итак, общее решение данного уравнения есть $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$.

22. Решить уравнение

$$\cos(\pi \sin x) = \sin(\pi \cos x).$$

Решение. Имеем:

$$\cos(\pi \sin x) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \pi \cos x \right),$$

откуда

$$\frac{\pi}{2} - \pi \cos x = \pm \pi \sin x + 2k\pi$$

или

$$\pm 2 \sin x + 2 \cos x = 1 - 4k.$$

Получилось уравнение вида

$$a \sin x + b \cos x = c, \quad \text{где} \quad a = \pm 2, \quad b = 2, \quad c = -4k + 1.$$

Равенство $b + c = 0$, т. е. $3 = 4k$, не выполняется ни при каком значении k .

Общее решение данного уравнения находится по формуле (стр. 284)

$$x = 2 \arctg \frac{\pm 2 \pm \sqrt{7 + 8k - 16k^2}}{4k - 3} + 2n\pi,$$

где k — любое целое число, удовлетворяющее условию

$$7 + 8k - 16k^2 \geq 0,$$

а n — произвольное целое число. Следовательно, допустимые значения k суть целые числа, содержащиеся между корнями квадратного уравнения

$$16k^2 - 8k - 7 = 0.$$

Корни последнего уравнения суть $k_1 \approx -0,45$ и $k_2 \approx 0,95$. Следовательно, $k = 0$ есть единственное допустимое значение k , откуда

$$x = 2 \arctg \frac{\pm 2 \pm \sqrt{7}}{3} + 2n\pi.$$

§ 51. Тригонометрические уравнения, содержащие параметры

Решение тригонометрических уравнений, содержащих параметры, может представить значительные трудности, связанные с необходимостью решать неравенства и системы неравенств. В ряде случаев приходится решать уравнения и неравенства в целых числах. Никакой общей теории решения тригонометрических уравнений с параметрами не может быть построено.

Представление о решении уравнений, содержащих параметры, дано на рассмотренных ниже примерах.

Примеры.

1. Решить уравнение

$$a \sin x = b \cos \frac{x}{2}. \quad (1)$$

Решение. Имеем последовательно

$$2a \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - b \cos \frac{x}{2} = 0, \quad (2)$$

$$\cos \frac{x}{2} \left(2a \sin \frac{x}{2} - b \right) = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) эквивалентно совокупности уравнений:

$$\text{А) } \cos \frac{x}{2} = 0, \quad \text{В) } 2a \sin \frac{x}{2} = b.$$

Общее решение уравнений А) есть $x = (2k + 1)\pi$.

Решаем уравнение В): если $a \neq 0$, то $\sin \frac{x}{2} = \frac{b}{2a}$, последнее уравнение

имеет решение в том и только в том случае, если $\left| \frac{b}{2a} \right| \leq 1$ или $|b| \leq 2|a|$.

При $|b| > 2a$ уравнение В) противоречиво

Особый случай для уравнения В):

При $a = 0$, $b \neq 0$ уравнение В) противоречиво.

При $a = b = 0$ — удовлетворяется тождественно.

Объединив множества решений уравнений А) и В), получим общее решение уравнения (1).

Ответ. 1°. При $|b| \leq 2|a|$ и $a \neq 0$ две серии решений $x = (2k + 1)\pi$ и $x = (-1)^k 2 \arcsin \frac{b}{2a} + 2k\pi$.

2°. При $|b| > 2|a|$ одна серия решений $(2k+1)\pi$ (в частности, если $a=0, b \neq 0$).

3°. $a=b=0$. Уравнение удовлетворяется тождественно.

2. Решить уравнение

$$m \operatorname{tg} x + n \operatorname{ctg} x = 2. \quad (1)$$

Решение. Умножив обе части на $\operatorname{tg} x$, получим

$$m \operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x + n = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) с более широкой областью определения. Посторонними для (1) являются те решения (2), для которых $\operatorname{tg} x = 0$.

Решив уравнение (2) как квадратное относительно $\operatorname{tg} x$, получим:

$$\operatorname{tg} x = \frac{1 \pm \sqrt{1-mn}}{m},$$

где $m \neq 0$ и $mn \leq 1$.

Уравнению (2) удовлетворяет $\operatorname{tg} x = 0$, если $n=0$, тогда при $m \neq 0$ получим $m \operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x = 0$, откуда

$$\operatorname{tg} x = \frac{2}{m} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} x = 0;$$

второе простейшее уравнение дает серию посторонних решений.

Ответ. 1°. Если $m \neq 0, n \neq 0$ и $mn \leq 1$, то

$$x = \arcsin \frac{1 \pm \sqrt{1-mn}}{m} + k\pi.$$

2°. Если $m \neq 0, n=0$, то $x = \arcsin \operatorname{tg} \frac{2}{m} + k\pi$.

3°. Если $m=0, n \neq 0$, то $x = \arcsin \operatorname{ctg} \frac{2}{n} + k\pi$.

4°. Если $m=n=0$ или $mn > 1$, то уравнение противоречиво.

Геометрическая интерпретация.

Пусть $m > 0, n > 0$ и $0 < x < \frac{\pi}{2}$, тогда произведение

$$(m \operatorname{tg} x) \cdot (n \operatorname{ctg} x) = mn = \text{const.}$$

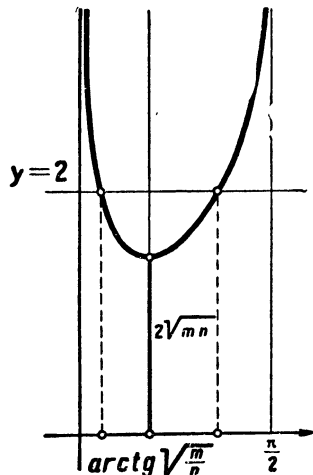
Сумма положительных слагаемых $y = m \operatorname{tg} x + n \operatorname{ctg} x$ имеет минимум $y_{\min}$ при $m \operatorname{tg} x = n \operatorname{ctg} x$, откуда $x = \arcsin \sqrt{\frac{m}{n}}$, при этом $y = 2\sqrt{mn}$ (черт. 178). Линия $y = m \operatorname{tg} x + n \operatorname{ctg} x$ пересекается с прямой $y=2$ лишь при условии $\sqrt{mn} < 1$, т. е. $mn < 1$.

3. Решить уравнение

$$\cos(x-a) = m \sin x - n \cos x.$$

Решение. Применив к левой части формулу $(C_{a-\beta})$, получим однородное тригонометрическое уравнение первой степени

$$\cos x (\cos a + n) + (\sin a - m) \sin x = 0;$$



Черт 178

если

$$m \neq \sin a, \text{ то } \operatorname{tg} x = \frac{\cos a + n}{m - \sin a};$$

если

$$m = \sin a, \quad n \neq -\cos a, \text{ то } \cos x = 0;$$

если

$$m = \sin a, \quad n = -\cos a,$$

то уравнение удовлетворяется тождественно.

О т в е т.

1°. Если $m \neq \sin a$, то

$$x = \arctg \frac{\cos a + n}{m - \sin a} + k\pi.$$

2°. Если $m = \sin a$, $n \neq -\cos a$, то

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

3°. Если $m = \sin a$, $n = -\cos a$, то уравнение удовлетворяется тождественно.

4. Решить уравнение

$$\cos(ax + b) = \cos(a_1 x + b_1).$$

Р е ш е н и е. Имеем

$$ax + b = \pm(a_1 x + b_1) + 2k\pi,$$

откуда

$$(a \mp a_1)x = -b \pm b_1 + 2k\pi. \quad (1)$$

(знаки берутся либо верхние, либо нижние). При $|a| \neq |a_1|$ получим:

$$x = \frac{1}{a \pm a_1} (-b \mp b_1 + 2k\pi).$$

Особые случаи: $|a| = |a_1|$. Пусть, например, $a = a_1 \neq 0$, тогда, взяв в левой части равенства (1) знак $+$ перед a_1 , получим:

$$x = \frac{1}{2a} (-b - b_1 + 2k\pi).$$

Если взять верхние знаки, то получим:

$$0 = -b + b_1 + 2k\pi.$$

Последнее соотношение противоречиво, если разность $b_1 - b$ не равна кратному 2π ; если же $b_1 = b + 2n\pi$, то (при $a = a_1$) данное уравнение удовлетворяется тождественно.

О т в е т.

1°. Если $|a| \neq |a_1|$, то $x = \frac{1}{a \pm a_1} (-b \mp b_1 + 2n\pi)$.

2°. Если $a = a_1 \neq 0$ и $b - b_1 \neq 2n\pi$, то

$$x = \frac{1}{2a} (-b - b_1 + 2k\pi).$$

3°. Если $a_1 = -a \neq 0$ и $b + b_1 \neq 2n\pi$, то

$$x = \frac{1}{2a} (-b + b_1 + 2k\pi).$$

4°. Если $a = a_1 \neq 0$ и $b - b_1 = 2n\pi$ или $a = -a_1 \neq 0$ и $b + b_1 = 2n\pi$, то уравнение удовлетворяется тождественно.

5°. Если $a = a_1 = 0$ и $b \neq \pm b_1 + 2n\pi$, то уравнение противоречиво.

6°. Если $a = a_1 = 0$ и $b = \pm b_1 + 2n\pi$, то уравнение удовлетворяется тождественно.

5. Решить уравнение

$$\frac{m}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 2x} = \frac{n(\cos x - \sin x)}{\operatorname{ctg} x - 1}. \quad (1)$$

Решение. Выполним последовательно тождественные преобразования

$$\frac{m \cos x \sin 2x}{\cos x} = \frac{n(\cos x - \sin x) \sin x}{\cos x - \sin x},$$

откуда

$$m \sin 2x - n \sin x = 0 \quad \text{или} \quad \sin x (2m \cos x - n) = 0.$$

Последнее уравнение эквивалентно совокупности двух уравнений

$$\sin x = 0 \quad \text{и} \quad 2m \cos x - n = 0. \quad (2)$$

Первое уравнение дает серию посторонних решений $x = k\pi$. Второе уравнение при $|n| \leq |2m|$ и $m \neq 0$ дает серию решений

$$x = \pm \arccos \frac{n}{2m} + 2k\pi. \quad (3)$$

Если $|n| > |2m|$, то второе уравнение (2) не имеет решений.

Исследуем, при каких значениях параметров m и n серия (3) содержит посторонние решения.

При переходе от (1) к (2) область определения последовательно расширялась за счет упрощения уравнения. Поэтому из серии (3) следует исключить те значения x , при которых левая или правая часть уравнения (1) теряет смысл, т. е. (черт. 179):

а) теряет смысл $\operatorname{tg} x$ либо $\operatorname{ctg} x$, либо

$\operatorname{ctg} 2x$, откуда $x = \frac{n\pi}{2}$;

б) $\operatorname{ctg} x = 1$, откуда $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$.

в) $\operatorname{tg} x = -\operatorname{ctg} 2x$ или $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \left(2x - \frac{\pi}{2} \right)$

откуда $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$; этот случай включается в случай а).

В соответствии с этим серия (3) содержит посторонние решения в следующих случаях:

А) $\arccos \frac{n}{2m} = 0$ или π , тогда $n = \pm 2m$; все решения посторонние (случай а);

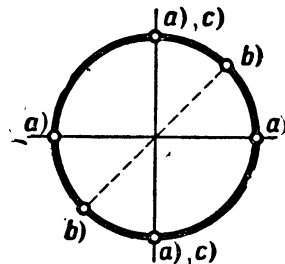
В) $\arccos \frac{n}{2m} = \frac{\pi}{2}$, тогда $n = 0$, $m \neq 0$ все решения посторонние (случай а);

С) $\arccos \frac{n}{2m} = \frac{\pi}{4}$, тогда $n = m\sqrt{2}$.

В серии (3) посторонними решениями являются $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ (случай в);

Д) $\arccos \frac{n}{2m} = \frac{3\pi}{4}$, тогда $n = -m\sqrt{2}$.

В серии (3) посторонними являются решения $-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$.



Черт. 179

О т в е т.

1°. Если $m \neq 0$, $|n| < 2|m|$ и $|n| \neq |m|\sqrt{2}$, то

$$x = \pm \arccos \cos \frac{2}{2m} + 2k\pi.$$

2°. Если $|n| \geq 2|m|$ (в частности $m = 0$, $n \neq 0$) или $n = 0$, $m \neq 0$, то уравнение противоречиво.

3°. Если $n = m\sqrt{2} \neq 0$, то $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$.

4°. Если $n = -m\sqrt{2} \neq 0$, $x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$.

5. Если $m = n = 0$, то уравнение удовлетворяется тождественно.

6. Решить уравнение

$$\frac{\sin mx}{\sin x} = \frac{\cos mx}{\cos x}. \quad (1)$$

Р е ш е н и е. Умножив обе части на $\sin x \cos x$, получим

$$\sin(m-1)x = 0. \quad (2)$$

Если $m \neq 1$, то из уравнения (2) найдем

$$x = \frac{k\pi}{m-1}. \quad (3)$$

В множестве всех решений уравнения (2) могут содержаться решения посторонние для уравнения (1), это те значения x , при которых $\cos x = 0$ либо $\sin x = 0$, т. е. значения вида $x = \frac{l\pi}{2}$ (l — целое число).

Итак, в серии (3) посторонними являются те корни, для которых

$$\frac{k\pi}{m-1} = \frac{l\pi}{2} \quad \text{или} \quad 2k = l(m-1). \quad (4)$$

Иными словами, в серии (3) посторонними являются те корни, для которых уравнение (4) имеет решения в целых числах относительно k и l (m — данное число).

При произвольном m следует исключить значение $k = 0$.

В частности, при $m = 2$ исключаются все значения k , так как уравнение (1) при любом k имеет решения в целых числах: $l = 2k$.

На том же основании при $m = 3$ исключаются все значения k . При $m = 4$ уравнение (1) примет вид $2k = 3l$. Оно имеет решения в целых числах при k , кратном числу 3: $k = 3k_1$, эти значения k исключаются.

При $m = \sqrt{2}$ уравнение (4) не имеет решений в целых числах, кроме $k = l = 0$, а потому серия (3) содержит лишь один посторонний корень $x = 0$.

При $m = \frac{1}{3}$ уравнение (4) примет вид $6k = -2l$, или $3k = -l$; оно имеет решения при любом k , все значения k исключаются.

О с о б ы й случай при $m = 1$; уравнение (1) удовлетворяется тождественно всеми допустимыми значениями x .

7. Решить уравнение

$$\sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x + a = 0.$$

Р е ш е н и е. Выделим полный квадрат из первых двух членов:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x.$$

Данное уравнение примет вид:

$$\sin^2 2x - 2\sin 2x - 2(1+a) = 0.$$

Положив $t = \sin 2x$, составим смешанную систему

$$t^2 - 2t - 2(a + 1) = 0, \quad -1 \leq t \leq 1. \quad (1)$$

Уравнение имеет в поле комплексных чисел решения:

$$t = 1 \pm \sqrt{2a - 3}.$$

Значения t действительны, если $2a + 3 \geq 0$, откуда $a \geq -\frac{3}{2}$.

Найдем значения параметра a , при которых хотя бы один из корней удовлетворяет неравенствам $-1 \leq t \leq 1$.

Полусумма корней равна 1:

$$\frac{t_1 + t_2}{2} = 1, \quad \text{следовательно,} \quad t_1 \leq 1 \leq t_2.$$

Равенство корней имеет место при $a = -\frac{3}{2}$, и тогда $t_1 = t_2 = 1$.

Если $a > -\frac{3}{2}$, то $t_1 < 1 < t_2$; больший корень смешанной системе не удовлетворяет. Меньший корень удовлетворяет системе (1) в том и только в том случае, если число -1 расположено вне сегмента корней или в его левом конце. Положив $t = -1$ в левой части уравнения (1), получим иско-
мое условие

$$1 - 2a \geq 0, \quad \text{откуда} \quad a \leq \frac{1}{2}.$$

Отв. 1°. Если $-\frac{3}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$, то данное уравнение имеет общее решение

$$x = (-1)^n \arcsin(1 - \sqrt{2a + 3}) + n\pi.$$

2°. Если $a < -\frac{3}{2}$ или $a > \frac{1}{2}$, то уравнение не имеет решений.

8. Решить уравнение

$$\cos^2(x + a) + \cos^2(x - a) = \sin 2a. \quad (1)$$

Решение. Применим к левой части преобразование понижения степени:

$$\cos(2x + 2a) + \cos(2x - 2a) = 2(\sin 2a - 1).$$

Преобразовав левую часть в произведение, получим

$$\cos 2a \cos 2x = \sin 2a - 1. \quad (2)$$

Обе части уравнения (2) суть периодические функции относительно параметра a с периодом π , поэтому достаточно ограничиться промежутком $-\frac{\pi}{2} < a \leq \frac{\pi}{2}$.

Если $\cos 2a \neq 0$, т. е. $a \neq \pm \frac{\pi}{4}$, то

$$\cos 2x = \frac{\sin 2a - 1}{\cos 2a}.$$

Заметив, что при $a \neq \pm \frac{\pi}{4}$ (выразить обе части через $\operatorname{tg} a$)

$$\frac{\sin 2a - 1}{\cos 2a} = \operatorname{tg}\left(a - \frac{\pi}{4}\right),$$

получим

$$\cos 2x = \operatorname{tg} \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right). \quad (3)$$

Последнее уравнение имеет решения в том и только в том случае, если

$$-1 \leq \operatorname{tg} \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) \leq +1. \quad (4)$$

Так как (по условию) $-\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, то $-\frac{3\pi}{4} < \alpha - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4}$.

Аргумент $\xi = \alpha - \frac{\pi}{4}$ в промежутке $-\frac{3}{4}\pi < \xi \leq \frac{\pi}{4}$ удовлетворяет условию (4): $-1 \leq \operatorname{tg} \xi \leq 1$, если (черт. 180) $-\frac{\pi}{4} \leq \xi \leq \frac{\pi}{4}$ или $-\frac{\pi}{4} \leq \alpha - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4}$ и, наконец, $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, при этом $\alpha \neq \frac{\pi}{4}$. Откуда получим два промежутка $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{4} < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

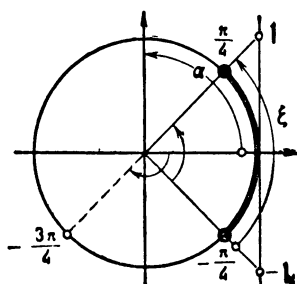
Приняв во внимание периодичность уравнения относительно параметра, получим совокупность промежутков

$$n\pi \leq \alpha < \frac{\pi}{4} + n\pi, \quad \frac{\pi}{4} + n\pi < \alpha \leq \frac{\pi}{2} + n\pi. \quad (\Delta)$$

Если α принадлежит какому-либо промежутку этой совокупности, то соответствующая серия решений находится из уравнения (3).

О с о б ы е с л у ч а и. При $\alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi$ уравнение (2), эквивалентное (1),

удовлетворяется тождественно, при $\alpha = -\frac{\pi}{4} + n\pi$ противоречиво.



Черт. 180

О т в е т. Уравнение (1):

1°. имеет серию решений

$$x = \pm \frac{1}{2} \arccos \operatorname{tg} \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) + k\pi,$$

если α принадлежит совокупности промежутков (Δ) ;

2°. удовлетворяется тождественно, если

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + n\pi;$$

3°. противоречиво, если $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + n\pi$ не принадлежит совокупности промежутков (Δ) .

9. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} (\alpha + x) \operatorname{tg} (\alpha - x) = 1 - 2 \cos 2x. \quad (1)$$

Р е ш е н и е. Уравнение имеет период π относительно параметра α , поэтому его достаточно рассмотреть в промежутке $-\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

Переписав уравнение в виде

$$\frac{\sin (\alpha + x) \sin (\alpha - x)}{\cos (\alpha + x) \cos (\alpha - x)} = \frac{1 - 2 \cos 2x}{1}, \quad (2)$$

составим производную пропорцию по правилу,

$$\text{если } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ то } \frac{b+a}{b-a} = \frac{d+c}{d-c};$$

получим:

$$\frac{\cos 2x}{\cos 2\alpha} = \frac{1 - \cos 2x}{\cos 2x}. \quad (3)$$

Применим подстановку $t = \cos 2x$ и составим смешанную систему:

$$t^2 + t \cos 2\alpha - \cos 2\alpha = 0, \quad -1 \leq t \leq 1. \quad (4)$$

Корни уравнения (4) действительны, если

$$\Delta = \cos^2 2\alpha + 4 \cos 2\alpha = \cos 2\alpha (\cos 2\alpha + 4) \geq 0.$$

Так как $\cos 2\alpha + 4 > 0$, то это неравенство эквивалентно следующему $\cos 2\alpha \geq 0$, последнее неравенство в промежутке $-\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ выполняется,

если $-\frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$.

1°. Если $\alpha = \pm \frac{\pi}{4}$, то уравнение (4) имеет двойной корень $t = 0$ — этот случай рассмотрен ниже как особый.

2°. Если $-\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{4}$, то корни уравнения (4) противоположны по знаку: $t_1 < 0 < t_2$.

Подставив в левую часть $t = 1$, получим $f(1) = 1 > 0$, следовательно, положительный корень t_2 меньше 1.

Подставив в левую часть $t = -1$, получим $f(-1) = 1 - 2 \cos 2\alpha$:

а) если $f(-1) \geq 0$ и $\Delta > 0$, то меньший корень содержится в промежутке $[-1, 0)$. Имеем $\cos 2\alpha \leq \frac{1}{2}$, откуда получим два промежутка:

$$\frac{\pi}{6} \leq \alpha < \frac{\pi}{4} \text{ и } -\frac{\pi}{4} < \alpha \leq -\frac{\pi}{6}. \quad (б)$$

В этом случае

$$-1 \leq t_1 < 0 < t_2 < 1;$$

б) если $f(-1) < 0$, $\Delta > 0$, т. е. $\cos 2\alpha > \frac{1}{2}$, откуда $-\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{6}$, то меньший корень расположен вне сегмента $[-1, 1]$. В этом случае имеем

$$t_1 < -1 < 0 < t_2 < 1.$$

Корни квадратного уравнения (4) суть

$$t_{1,2} = \frac{-\cos 2\alpha \pm \sqrt{\cos 2\alpha (\cos 2\alpha + 4)}}{2}.$$

В совокупности промежутков (б) смешанной системе удовлетворяют оба корня.

В интервале $-\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{6}$ смешанной системе удовлетворяет корень t_2 .

Среди решений смешанной системы (4) могут быть решения посторонние для (1). Это имеет место, если $\operatorname{tg}(\alpha + x)$, либо $\operatorname{tg}(\alpha - x)$ теряет смысл, т. е. если $x = \pm \alpha + \frac{\pi}{2} + l\pi$ (l — целое число), откуда

$$2x = \pm 2\alpha + 2l\pi + \pi \text{ и } \cos 2x = -\cos 2\alpha,$$

следовательно,

$$t_1 = -\cos 2\alpha \leq 0.$$

В этом случае

$$t_1^2 + t_1 \cos 2\alpha - \cos 2\alpha = -\cos 2\alpha = 0,$$

откуда

$$\alpha = \pm \frac{\pi}{4}.$$

Значения вида $x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi$ не могут удовлетворять уравнению (3), но они могут быть решениями (1); это имеет место, если

$$\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

Последнее не может иметь места при $-\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{4}$, так как

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) &= -\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \\ &= -\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{ctg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = -1. \end{aligned}$$

Случай же $\alpha = \pm \frac{\pi}{4}$ должен рассматриваться особо.

Итак, особые случаи следующие:

$$\cos 2\alpha = 0, \quad \alpha = \pm \frac{\pi}{4}.$$

Уравнение (1) примет вид

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1 - 2 \cos 2x,$$

откуда

$$1 = 1 - 2 \cos 2x, \quad \cos 2x = 0$$

и $x = \pm \frac{\pi}{4} + n\pi$ — это серия посторонних корней.

Отв. 1°. В совокупности промежутков

$$\frac{\pi}{6} + n\pi \leq \alpha < \frac{\pi}{4} + n\pi \quad \text{и} \quad -\frac{\pi}{4} + n\pi < \alpha \leq -\frac{\pi}{6} + n\pi$$

$$x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{-\cos 2\alpha \pm \sqrt{\cos 2\alpha (\cos 2\alpha + 4)}}{2} + k\pi.$$

2°. В совокупности интервалов

$$-\frac{\pi}{6} + n\pi < \alpha < \frac{\pi}{6} + n\pi$$

$$x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{-\cos 2\alpha + \sqrt{\cos 2\alpha (\cos 2\alpha + 4)}}{2} + k\pi.$$

3°. В совокупности сегментов

$$\frac{\pi}{4} + n\pi \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} + n\pi \quad \text{и} \quad -\frac{\pi}{2} + n\pi \leq \alpha \leq -\frac{\pi}{4} + n\pi.$$

Уравнение не имеет решений (либо корни (4) мнимые, либо особый случай).

Примечание. При составлении промежутков для значений α следует принять во внимание периодичность (период π) уравнения относительно параметра.

10. Найти условия, при которых уравнение

$$\sin^2 x + 2p \sin x + q = 0$$

имеет решения.

Решение. Заменяем уравнение смешанной системой

$$\left. \begin{array}{l} \text{(a)} \quad t^2 + 2pt + q = 0. \\ \text{(b)} \quad -1 \leq t \leq 1 \end{array} \right\}. \quad (1)$$

Если $\Delta = p^2 - q < 0$, то квадратное уравнение не имеет действительных корней, данное уравнение не имеет решений. В дальнейшем будем предполагать, что $\Delta \geq 0$, т. е. что $p^2 \geq q$.

С л у ч а й 1°. Оба корня уравнения (1) содержатся на сегменте $[-1, 1]$ (черт. 181). В этом случае (см «Специальный курс элементарной алгебры», § 83), подставив в левую часть $t=1$ и $t=-1$, получим неравенства (возможность кратного корня не исключается):

$$1 + 2p + q \geq 0 \quad (3)$$

и

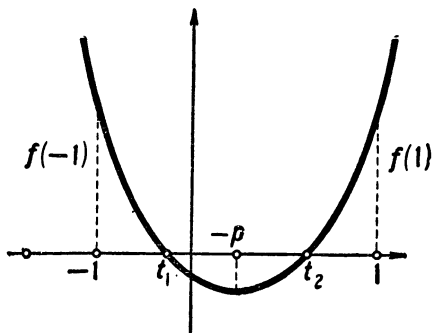
$$1 - 2p + q \geq 0, \quad (4)$$

и, кроме того,

$$-1 \leq p \leq 1, \quad (5)$$

и, наконец,

$$q \leq p^2. \quad (6)$$



Черт. 181

Требуется решить систему неравенств (3)–(6). Воспользуемся графическим способом (считаем p абсциссой, а q — ординатой точки плоскости).

Прямые $1 \pm 2p + q = 0$ пересекаются в точке $(0, -1)$ и служат касательными к параболе $p^2 = q$ в точках $(\pm 1, 1)$. В самом деле, если решать совместно уравнение параболы и уравнение какой-нибудь из этих прямых, то получится двукратный корень.

Искомые точки должны: 1) располагаться выше (или на) прямой $1 + 2p + q = 0$; а также выше (или на) прямой $1 - 2p + q = 0$; 2) принадлежать полосе, ограниченной прямыми $p = \pm 1$; 3) располагаться ниже (или на) параболы $q = p^2$. Перечисленным условиям удовлетворяют точки области (замкнутой) I (черт. 182). Аналитически эта область может быть задана неравенствами:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{если} & -1 \leq p \leq 0, \quad \text{то} \\ & -2q - 1 \leq q \leq p^2, \\ \text{если} & 0 \leq p \leq 1, \quad \text{то} \\ & 2p - 1 \leq q \leq p^2 \end{array} \right\}. \quad (1)$$

При указанных условиях тригонометрическое уравнение имеет две серии решений, соответствующие двум корням квадратного уравнения.

С л у ч а й 2°. Одни из корней принадлежат сегменту $[-1, 1]$. Возможно одно из двух расположений корней:

$$\text{a)} \quad -1 \leq t_1 < 1 < t_2,$$

$$\text{б)} \quad t_1 < -1 \leq t_2 \leq 1.$$

При расположении а) имеем

$$1 - 2p + q \geq 0, \quad (3)$$

$$1 + 2p + q < 0. \quad (7)$$

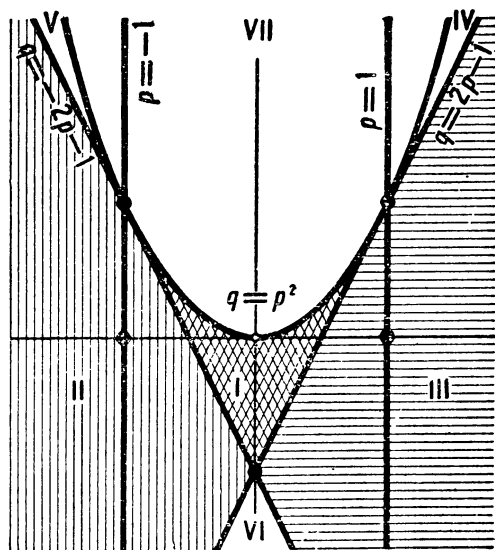
Искомые точки расположены выше (или на) прямой $1 - 2p + q = 0$ и ниже прямой $1 + 2p + q = 0$, при этом неравенство (6) удовлетворяется автоматически. На чертеже получаем область II. При расположении б) получим неравенства

$$1 - 2p + p < 0 \quad \text{и} \quad 1 + 2p + q \geq 0,$$

что на чертеже определяет область (III). Аналитически полученные условия выразятся так:

a) $p < 0, \quad -1 + 2p \leq q < -2p - 1; \quad (II)$

b) $p > 0, \quad -1 - 2p \leq q < 2p - 1. \quad (III)$



Черт. 182

При указанных условиях тригонометрическое уравнение имеет одну серию решений, соответствующую единственному решению смешанной системы.

Случай 3°. Оба корня квадратного трехчлена (1) расположены вне сегмента $[-1, 1]$. Возможно одно из трех расположений корней:

a) $t_1 \leq t_2 < -1 < 1,$

b) $-1 < 1 < t_1 \leq t_2,$

c) $t_1 < -1 < 1 < t_2.$

При расположении а) выполняются неравенства

$$1 + 2p + q > 0,$$

$$1 - 2p + q > 0, \quad p > 1.$$

На чертеже 166 получим область IV. Аналогично при расположении б) получим область V.

При расположении c) выполняются неравенства:

$$1 + 2p + q < 0, \quad 1 - 2p + q < 0.$$

На чертеже 166 получим область VI. Аналитически полученные условия выразятся так:

a) $1 < p < +\infty, \quad 2p - 1 < q < p^2;$

b) $-\infty < p < -1, \quad -2p - 1 < q < p^2.$

c) $-\infty < q < -1, \quad \frac{q+1}{2} < p < -\frac{q+1}{2}.$

В этом случае тригонометрическое уравнение не имеет решений.

Если точка (p, q) расположена выше параболы (область VII), то квадратное уравнение имеет мнимые корни, тригонометрическое уравнение не имеет решений.

11. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}(\pi \operatorname{tg} x) = \operatorname{ctg}(\pi \operatorname{ctg} x). \quad (I)$$

Решение. Перепишем уравнение так:

$$\operatorname{tg}(\pi \operatorname{tg} x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \pi \operatorname{ctg} x\right),$$

откуда

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{2} - \operatorname{ctg} x + k, \quad (2)$$

где k — произвольное целое число.

Значения x , при которых $\operatorname{tg} x = 0$, не удовлетворяют уравнению. Умножив обе части (2) на $\operatorname{tg} x$, получим эквивалентное уравнение, квадратное относительно $\operatorname{tg} x$:

$$2 \operatorname{tg}^2 x - (2k + 1) \operatorname{tg} x + 2 = 0.$$

Решив это уравнение относительно $\operatorname{tg} x$, получим:

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{4} (2k + 1 \pm \sqrt{(2k + 1)^2 - 16}). \quad (3)$$

При $k = 0, \pm 1, -2$ уравнение (3) не имеет решений, так как

$$(2k + 1)^2 - 16 < 0.$$

При переходе от уравнения (1) к уравнению (2) возможно появление посторонних решений. Это суть такие решения уравнения (2), при которых $\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x)$ теряет смысл (см. стр. 279), т. е. при которых

$$\operatorname{tg} x = m + \frac{1}{2},$$

где m — целое число. Найдем из формулы (3) всевозможные рациональные значения $\operatorname{tg} x$, среди которых содержатся (в частности) и значения вида $m + \frac{1}{2}$.

Значение $\operatorname{tg} x$ рационально тогда и только тогда, когда подкоренное выражение в формуле (3) есть квадрат целого числа:

$$(2k + 1)^2 - 16 = z^2 \quad \text{или} \quad (2k + 1)^2 - z^2 = 16. \quad (4)$$

Перепишем последнее уравнение так:

$$[(2k + 1) + z][(2k + 1) - z] = 16. \quad (5)$$

Из уравнения (4) следует, что z — нечетное число, а потому множители (заключенные в квадратные скобки), на которые разложено число 16, должны быть четными числами. Разложение числа 16 на произведение четных чисел возможно четырьмя способами: $2 \cdot 8$; $4 \cdot 4$; $(-2) \cdot (-8)$; $(-4) \cdot (-4)$; в соответствии с этим возможны следующие случаи:

$$\begin{array}{ll} \left. \begin{array}{l} (2k + 1) + z = 2 \\ (2k + 1) - z = 8 \end{array} \right\} & \text{(I)} \quad \left. \begin{array}{l} (2k + 1) + z = 8 \\ (2k + 1) - z = 2 \end{array} \right\} & \text{(II)} \\ \left. \begin{array}{l} (2k + 1) + z = 4 \\ (2k + 1) - z = 4 \end{array} \right\} & \text{(III)} \quad \left. \begin{array}{l} (2k + 1) + z = -2 \\ (2k + 1) - z = -8 \end{array} \right\} & \text{(IV)} \\ \left. \begin{array}{l} (2k + 1) + z = -8 \\ (2k + 1) - z = -2 \end{array} \right\} & \text{(V)} \quad \left. \begin{array}{l} (2k + 1) + z = -4 \\ (2k + 1) - z = -4 \end{array} \right\} & \text{(VI)} \end{array}$$

Из этих систем найдем следующие возможные значения для k :

$$2k_1 + 1 = 5, \quad k_1 = 2 \quad \text{и} \quad 2k_2 + 1 = -5, \quad k_2 = -3.$$

При $k = 2$ соответствующие значения $\operatorname{tg} x$ суть

$$\operatorname{tg} x = 2 \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} x = \frac{1}{2},$$

из которых второе дает посторонние решения.

При $k = -3$ соответствующие значения $\operatorname{tg} x$ суть

$$\operatorname{tg} x = -2 \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}.$$

из которых второе дает посторонние решения.

О т в е т.

$$x = \arctg \frac{2k+1 \pm \sqrt{4k^2+4k-15}}{4} + n\pi,$$

$$k \neq 0, \pm 1, \pm 2, -3,$$

$$x = \pm \arctg 2 + n\pi \quad (k = 2, -3).$$

§ 52. Некоторые системы тригонометрических уравнений и методы их решения

Решение и исследование тригонометрических систем уравнений может представить значительные трудности даже в тех сравнительно редких случаях, когда это решение выполнимо элементарными средствами. Ниже мы ограничимся (в основном) системами, которые наиболее часто встречаются в приложениях тригонометрии к вычислениям элементов геометрических фигур.

При рассмотрении однотипных систем мы не будем проводить подробных исследований для каждой системы, а будем ограничиваться указанием на методы решения и исследования ранее рассмотренных примеров.

Примеры.

1. Решить систему

$$\left. \begin{aligned} \sin x + \sin y &= a & (1) \\ x + y &= b & (2) \end{aligned} \right\}. \quad (I)$$

Решение. Преобразуем в произведение левую часть уравнения (2):

$$2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = a.$$

Воспользовавшись уравнением (2), получим эквивалентную систему:

$$2 \sin \frac{b}{2} \cos \frac{x-y}{2} = a; \quad x+y=b \quad (I')$$

$$\text{С л у ч а й 1}^\circ. \sin \frac{b}{2} \neq 0, \quad \text{т. е. } b \neq 2k\pi \quad \text{и} \quad \left| \frac{a}{2 \sin \frac{b}{2}} \right| \leq 1.$$

В этом случае, заменив первое уравнение эквивалентным ему уравнением (с целочисленным параметром), получим линейную систему:

$$x-y = \pm 2 \arccos \frac{a}{2 \sin \frac{b}{2}} + 4k\pi, \quad x+y=b,$$

из которой найдем общее решение:

$$x = \frac{b}{2} \pm \arccos \frac{a}{2 \sin \frac{b}{2}} + 2k\pi, \quad y = \frac{b}{2} \pm \arccos \frac{a}{2 \sin \frac{b}{2}} - 2k\pi$$

(перед арккосинусом знаки либо верхние, либо нижние).

С л у ч а й 2°. $b = 2k\pi$, $a \neq 0$ — система не имеет решений.

С л у ч а й 3°. $b = 2k\pi$, $a \neq 0$. Всякое решение уравнения (2) удовлетворяет (1), а потому общее решение системы может быть записано в виде $x, y = 2k\pi - x$ (где x — произвольное число).

С л у ч а й 4° $\left| \frac{a}{2 \sin \frac{b}{2}} \right| > 1$ — система не имеет решений.

Решить и исследовать данную систему можно методом подстановки. Выразим, например, y из второго уравнения и подставим в первое, тогда получим систему

$$(1 - \cos b) \sin x + \sin b \cos x = a, \quad y = b - x,$$

в которой первое уравнение — линейное относительно косинуса и синуса. Предлагаем в виде упражнения исследовать полученную систему и сравнить выводы с полученными выше результатами.

По тому же образцу решаются и исследуются системы:

$$\left. \begin{aligned} \sin x \pm \sin y &= a \\ x \pm y &= b \end{aligned} \right\}; \quad \left. \begin{aligned} \cos x \pm \cos y &= a \\ x \pm y &= b \end{aligned} \right\}.$$

Система (и аналогичные системы)

$$\sin x + \cos y = a, \quad x + y = b$$

сводится к предыдущей введением вместо y нового неизвестного $z = \frac{\pi}{2} - y$.

2. Решить систему

$$\sin x \sin y = a, \quad x + y = b.$$

Решение. Преобразовав в сумму левую часть первого уравнения, получим:

$$\cos(x - y) - \cos(x + y) = 2a, \quad x + y = b,$$

откуда

$$\cos(x - y) = 2a + \cos b, \quad x + y = b.$$

Дальнейшее решение и исследование проводится по образцу предыдущего примера.

Применение метода подстановки приведет к уравнению линейному относительно косинуса и синуса двойного аргумента (доказать).

Тем же способом решаются системы, у которых левая часть первого уравнения имеет вид

$$\cos x \cos y, \quad \cos x \sin y$$

и т. п., а второе уравнение

$$x \pm y = b.$$

3. Решить систему

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = a, \quad x + y = b.$$

Решение. Применив способ подстановки, получим (после упрощения) систему

$$\operatorname{tg} b \operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} b - a = 0, \quad y = b - x.$$

Первое уравнение решается как квадратное относительно $\operatorname{tg} x$.

Особые случаи. 1°. $\operatorname{tg} b = 0$, $b = n\pi$, $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = a$, $x + y = n\pi$ (n — данное целое число), откуда

$$2 \operatorname{tg} x = a, \quad y = n\pi - x;$$

$$x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a}{2} + k\pi, \quad y = -\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a}{2} + (n - k)\pi.$$

2°. $\operatorname{tg} b$ не существует $b = \frac{\pi}{2} + n\pi$,

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = a, \quad y = \frac{\pi}{2} + n\pi - x.$$

Подставив в первое уравнение, получим $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = a$ (последнее уравнение решается без труда).

Рассмотренным в настоящем примере способом решаются и исследуются системы

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = a \\ x \pm y = b \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} \operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y = a \\ x \pm y = b \end{array} \right\}.$$

4. Решить систему

$$\frac{\sin x}{\sin y} = a, \quad x + y = b. \quad (I)$$

Решение. Применив способ подстановки, получим систему эквивалентную данной

$$\sin b \operatorname{ctg} y = a + \cos b, \quad x = b - y.$$

Первое уравнение при $\sin b \neq 0$ приводится к простейшему относительно котангенса.

Особый случай: $\sin b = 0, b = n\pi$.

1°. Если $n = 2m$ — четное число, то $x = 2m\pi - y$ (из второго уравнения), откуда $\sin x = -\sin y$. При $a \neq -1$ первое уравнение системы противоречиво, система не имеет решений. При $a = -1$ первое уравнение удовлетворяется тождественно, общее решение имеет вид $x = 2m\pi - y$, где y — произвольное число отличное $k\pi$ (где k — целое число).

2°. Если $n = 2m - 1$ нечетное число, то аналогично получим следующее: при $a \neq 1$ система противоречива, а при $a = 1$

$$x = (2m - 1)\pi - y, \quad \text{где } y \neq k\pi.$$

Этим же приемом решаются и исследуются следующие тригонометрические системы:

$$\frac{\cos x}{\cos y} = a, \quad x \pm y = b, \quad \frac{\sin x}{\cos y} = a, \quad x \pm y = b \text{ и т. п.}$$

5. Решить систему

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = a, \quad x + y = b.$$

Способом подстановки уравнение приводится к квадратному относительно тангенса (исследование представим учащимся в виде упражнения).

6. Решить систему

$$\sin^2 x + \sin^2 y = a, \quad x + y = b.$$

Решение. Введем двойные аргументы, тогда получим систему

$$\cos 2x + \cos 2y = 2(1 - a), \quad 2x + 2y = 2b,$$

способ решения которой показан в примере 1.

7. Решить систему

$$\sin x \sin y = a, \quad \cos x \cos y = b. \quad (1)$$

Решение. Путем почленного сложения и вычитания получим систему

$$\cos(x + y) = b - a, \quad \cos(x - y) = b + a \quad (2)$$

эквивалентную данной. Эта система имеет решение в том и только в том случае, когда a и b удовлетворяют неравенствам:

$$-1 \leq b - a \leq 1, \quad -1 \leq b + a \leq 1.$$

Из этих неравенств получим (соответственно):

$$a - 1 \leq b \leq a + 1 \quad -a - 1 \leq b \leq -a + 1$$

Множество точек $M(a, b)$ плоскости, удовлетворяющих обоим этим неравенствам, образует квадрат (замкнутый, черт. 183); этот квадрат может быть задан следующими неравенствами (алгебраическое решение предоставляем учащимся, см. «Специальный курс элементарной алгебры»):

$$\left. \begin{aligned} -a - 1 \leq b \leq a + 1, \quad -1 \leq a \leq 0, \\ a - 1 \leq b \leq -a + 1, \quad 0 \leq a \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Если значения параметров a и b удовлетворяют условиям (3), то данная тригонометрическая система эквивалентна следующей системе двух линейных уравнений с двумя целочисленными параметрами:

$$x + y = \pm \arccos(b - a) + 2m\pi;$$

$$x - y = \pm \arccos(b + a) + 2n\pi,$$

откуда

$$x = \frac{\pm \arccos(b - a) \pm \arccos(b + a)}{2} + (m + n)\pi;$$

$$y = \frac{\pm \arccos(b - a) \mp \arccos(b + a)}{2} + (m - n)\pi,$$

где m и n — произвольные целые числа, а знаки перед арккосинусами в одной из формул (например, в верхней) могут быть взяты в произвольной комбинации (возможны 4 такие комбинации), а в другой формуле первый арккосинус берется с тем же, а второй — с обратным знаком (что в первой формуле).

Можно вместо $m + n$ и $m - n$ ввести другие параметры, положив

$$m + n = k, \quad m - n = l.$$

Но тогда k и l не могут считаться произвольными целыми числами, а должны быть числами одинаковой четности (т. е. оба четные либо оба нечетные), так как только при этом условии m и n будут целыми.

8. Решить систему

$$\sin x \cos y = a, \quad \cos x \cos y = b.$$

Решение. Случай 1°. Предположим, что $b \neq 0$ и $a \neq 0$. Заметив, что значения x и y , при которых $\cos x = 0$ или $\cos y = 0$, не могут служить решениями системы, разделим почленно первое уравнение на второе:

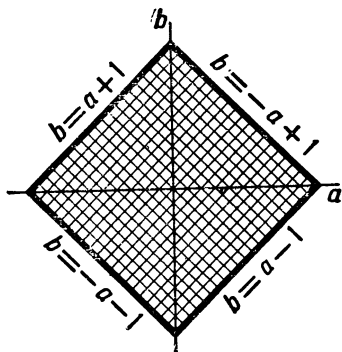
$$\operatorname{tg} x = \frac{a}{b}, \quad \text{откуда} \quad x = \arctg \frac{a}{b} + k\pi. \quad (1)$$

Подставив в первое уравнение, получим

$$(-1)^k \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos y = 1 \quad \text{при } b > 0$$

или

$$(-1)^{k+1} \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos y = 1 \quad \text{при } b < 0.$$



Черт. 183

Получилось простейшее уравнение относительно y , которое имеет решения при $\sqrt{a^2 + b^2} \leq 1$ (считаем, например, $b > 0$):

$$y = \pm \arccos (-1)^k \sqrt{a^2 + b^2} + n\pi, \quad (2)$$

формулы (1) и (2) дают общее решение системы. Если $\sqrt{a^2 + b^2} > 1$, то система не имеет решений.

П р и м е ч а н и е. При указанном способе решения, система

$$f = a, \quad \varphi = b \quad (I)$$

заменяется системой

$$\frac{f}{\varphi} = \frac{a}{b}; \quad f = a. \quad (II)$$

При $a \neq 0$ и $b \neq 0$ эти системы эквивалентны, что нетрудно установить (в общем виде) непосредственно.

С л у ч а й 2°. Одно из чисел a и b равно нулю. Пусть, например, $b = 0$, но $a \neq 0$, тогда из второго уравнения найдем

$$\cos x = 0 \quad \text{и} \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

(при $\cos y = 0$ первое уравнение не может удовлетворяться). Подставив в первое уравнение, получим простейшее уравнение $(-1)^k \cos y = a$, откуда при $|a| \leq 1$

$$y = \pm \arccos (-1)^k a + 2m\pi$$

Если $|a| > 1$, система не имеет решений.

С л у ч а й 3°. $a = b = 0$. В этом случае две серии решений системы определяются следующим образом:

$$1) \cos y = 0, \quad y = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad x - \text{произвольное число};$$

$$2) \sin x = 0, \quad \cos y = 0, \quad x = k\pi, \quad y = \frac{\pi}{2} + l\pi.$$

Но решения второй серии содержатся в первой, а потому вторую серию можно не учитывать.

9) Решить систему

$$\sin x + \sin y = a, \quad \cos x + \cos y = b.$$

Р е ш е н и е. Преобразовав левые части в произведение, получим систему:

$$\sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = \frac{a}{2}, \quad \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = \frac{b}{2},$$

которая решается и исследуется способом, изложенным в предыдущем примере (можно положить $u = \frac{x+y}{2}$, $v = \frac{x-y}{2}$).

10. Решить систему

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = a, \quad \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = b. \quad (1')$$

Р е ш е н и е. Если ввести новые неизвестные

$$u = \operatorname{tg} x, \quad v = \operatorname{tg} y,$$

то получится алгебраическая система

$$u + v = a, \quad \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = b, \quad (2)$$

которую можно заменить системой

$$u + v = a, \quad \frac{a}{u \cdot v} = b$$

откуда $a = buv$, и если $b \neq 0$, то u и v служат корнями квадратного уравнения

$$bz^2 - abz + a = 0. \quad (3)$$

Решение и исследование квадратного уравнения проводятся по обычным правилам.

Этот способ решения может внести посторонние решения, посторонним является всякое решение, для которого $u = 0$ или $v = 0$. Квадратное уравнение (3) имеет корень, равный 0, в том случае, если $a = 0$.

Итак, особому рассмотрению подлежат следующие случаи:

1°. $b = 0, a \neq 0$. В этом случае алгебраическая система (2), а также и тригонометрическая система противоречивы.

2°. $a = 0, b \neq 0$. Аналогично и в этом случае система противоречива

3°. $a = b = 0$. Система (2) имеет бесконечное множество решений $v = -u$, где u — произвольное отличное от нуля число. В этом случае общее решение тригонометрической системы дается формулой

$$y = -x + k\pi,$$

где x — произвольное число, отличное от чисел вида $n \frac{\pi}{2}$.

11. Решить систему

$$\operatorname{tg} x : \operatorname{tg} y : \operatorname{tg} z = a : b : c, \quad x + y + z = \pi. \quad (1)$$

Решение. Если $x + y + z = \pi$, то из условия $\operatorname{tg}(x + y + z) = 0$ (применить формулу, стр. 76), найдем условное соотношение

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z; \quad (2)$$

обозначим через t коэффициент пропорциональности, тогда первые два уравнения запишутся в виде

$$\operatorname{tg} x = at, \quad \operatorname{tg} y = bt, \quad \operatorname{tg} z = ct. \quad (3)$$

Подставив в соотношение (2), получим:

$$t[abct^2 - (a + b + c)] = 0,$$

откуда или

$$abct^2 - (a + b + c) = 0, \quad (4)$$

или $t = 0$. Если $t = 0$, то $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y = \operatorname{tg} z = 0$, т. е. $x = k\pi$, $y = m\pi$, $z = n\pi$; подставив в последнее уравнение (1), получим $k + m + n = 1$, откуда найдем серию решений:

$$x = k\pi, \quad y = m\pi, \quad z = (1 - k - m)\pi, \quad (5)$$

где k и m — произвольные целые числа.

При нахождении прочих решений подлежат рассмотрению следующие случаи.

Случай 1°. Ни одно из чисел a , b и c не равно нулю, тогда

$$t^2 = \frac{a + b + c}{abc}.$$

Если

$$\frac{a + b + c}{abc} \geq 0, \quad \text{то } t = \pm \sqrt{\frac{a + b + c}{abc}}.$$

Из равенства (3) найдем:

$$x = \arctg at + k\pi, \quad y = \arctg bt + m\pi, \quad z = \arctg ct + n\pi.$$

Коэффициент t определен из условия $\arctg(x + y + z) = 0$, а потому

$$\arctg at + \arctg bt + \arctg ct = \begin{cases} -\pi \\ 0 \\ \pi \end{cases}$$

Так, в частности, при $a > 0$, $b > 0$ и $c > 0$ сумма арктангенсов равна π , если перед радикалами взят знак $+$, и $-\pi$, если взят знак $-$. Из условия $x + y + z = \pi$ один из целочисленных параметров может быть выражен через два другие произвольные целочисленные параметра.

С л у ч а й 2°. Если хотя бы одно из чисел a , b и c равно нулю, но $a + b + c \neq 0$, то уравнение (4) не имеет решений.

С л у ч а й 3°. Если хотя бы одно из чисел a , b и c равно нулю, а также $a + b + c = 0$, то уравнение (4) удовлетворяется тождественно. Рассмотрим, например, случай $a = 0$, $b = -c \neq 0$ (аналогично рассматриваются прочие случаи). Имеем

$$\arctg x = 0, \quad \arctg y = -\arctg z, \quad \text{откуда } x = k\pi; \quad y = -z + m\pi.$$

Из последнего уравнения (1) найдем:

$$k + m = 1;$$

соответствующая серия решений выражается формулами

$$x = k\pi, \quad y = -z + (1 - k)\pi,$$

где z — произвольное число, неравное $\frac{\pi}{2} + n\pi$.

Заметим, что в этом случае последние формулы дают общее решение системы, ибо при $z = n\pi$ получаются решения серии (5).

12. Решить систему

$$\cos x : \cos y : \cos z = a : b : c, \quad x + y + z = \frac{\pi}{2}, \quad (1)$$

где a , b и c — положительные числа.

Решение. Имеем: $z = \frac{\pi}{2} - (x + y)$,

откуда в качестве следствия получим:

$$\cos z = \sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad (2)$$

и аналогичные равенства получим при помощи круговой перестановки аргументов x , y и z . В равенстве (2), линейном однородном относительно косинусов, можно эти косинусы заменить пропорциональными им числами, а потому получим:

$$\begin{aligned} c &= b \sin x + a \sin y; \\ a &= c \sin y + b \sin z; \\ b &= a \sin z + c \sin x. \end{aligned}$$

Умножив первое уравнение на c , второе уравнение — на $-a$ и третье — на b , после почленного сложения получим:

$$c^2 + b^2 - a^2 = 2bc \sin x, \quad \text{откуда } \sin x = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc}.$$

Аналогично найдем следующие два простейшие тригонометрические уравнения:

$$\sin y = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad \sin z = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ab}.$$

При данном способе возможно появление посторонних решений. В самом деле, в качестве следствия получится то же соотношение (2), если последнее уравнение (1) заменить уравнением $x + y + z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

§ 53. Уравнения, содержащие неизвестные под знаками аркфункций

Рассмотрим сначала простейшие уравнения:

$$\begin{aligned} \arcsin x = m, \quad \arccos x = m, \\ \operatorname{arctg} x = m, \quad \operatorname{arccotg} x = m, \end{aligned}$$

в которых требуется найти неизвестное по заданному значению одной из аркфункций. Рассмотрим подробно одно из этих уравнений

$$\arcsin x = m.$$

Так как значение арксинуса принадлежит сегменту $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, то это уравнение имеет решение лишь при условии $|m| \leq \frac{\pi}{2}$.

При соблюдении этого условия единственное (в силу монотонности арксинуса) решение есть

$$x = \sin m.$$

Аналогично рассматриваются прочие простейшие уравнения. Уравнение $\arccos x = m$ имеет единственное решение $x = \cos m$ при условии $0 \leq m \leq \pi$ и не имеет решений, если m не принадлежит сегменту $[0, \pi]$.

Уравнение

$$\operatorname{arctg} x = m \text{ имеет единственное решение } x = \operatorname{tg} m$$

при условии, если m принадлежит интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Уравнение

$\operatorname{arccotg} x = m$ имеет единственное решение $x = \operatorname{ctg} m$, если m принадлежит интервалу $(0, \pi)$.

Решение уравнения вида

$$f(\arcsin x) = 0$$

(по знаком функции f может быть любая другая аркфункция) посредством подстановки приводится к решению смешанной системы

$$f(t) = 0, \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

с последующим решением простейших уравнений (по числу решений смешанной системы).

Решение уравнения

$$f(\arcsin x, \arccos x) = 0$$

в силу тождества $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$ приводится к предыдущему случаю. Аналогичное замечание относится к уравнению

$$f(\arctg x, \operatorname{arctg} x) = 0.$$

Одним из наиболее распространенных приемов решения уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции, является выполнение некоторой тригонометрической операции над обеими частями данного уравнения. Этот способ решения приводит (в общем случае) к уравнению не эквивалентному данному. Рассмотрим, например, уравнения

$$f(x) = \varphi(x), \quad (I)$$

$$\sin f(x) = \sin \varphi(x). \quad (II)$$

Уравнение (II) есть следствие (I). Обратное не имеет места; в самом деле, уравнение (II) эквивалентно уравнению

$$f(x) = (-1)^n \varphi(x) + n\pi \quad (II_n)$$

с целочисленным параметром, и всякое решение (II_n) при $n \neq 0$ является посторонним для уравнения (I). Для устранения посторонних решений необходима проверка путем подстановки в уравнение (I).

Уравнение (I) также (в общем случае) не эквивалентно уравнению

$$\operatorname{tg} f(x) = \operatorname{tg} \varphi(x). \quad (III)$$

В самом деле, во-первых, всякое решение уравнения (I) (если такие решения существуют), при котором обе его части имеют значения вида $\frac{2k+1}{2}\pi$, является посторонним для уравнения (III)*, и, во-вторых, всякое решение (если оно существует) уравнения

$$f(x) = \varphi(x) + n\pi \quad (III_n)$$

при $n \neq 0$ есть решение уравнения (III) (если только не имеет места особый случай), но не является решением уравнения (I), все такие решения должны быть устранены проверкой. Итак, при переходе от уравнения (I) к (III) возможны как потеря, так и появление посторонних решений.

Так, например, уравнение

$$x = \pi - x \quad (I)$$

* В общем виде мы не касаемся вопроса о применимости принципа предельного перехода.

имеет единственно решение $x = \frac{\pi}{2}$, а уравнение

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(\pi - x) \quad (2)$$

имеет серию решений $x = k\pi$. При переходе от уравнения (1) и (2) появилась серия посторонних решений $x = k\pi$, а решение $x = \frac{\pi}{2}$ потеряно.

Во многих случаях в результате выполнения какой-либо тригонометрической операции над обеими частями уравнения, содержащего аркфункции, получается алгебраическое уравнение. В каждом таком случае все корни данного уравнения содержатся среди корней алгебраического уравнения, за исключением, быть может, случая перехода от уравнения (I) к уравнению (III), когда возможна потеря некоторых решений. Следовательно, для решения данного уравнения достаточно найти все решения алгебраического уравнения в поле действительных чисел и подвергнуть их проверке посредством подстановки в исходное уравнение. Алгебраические функции (получающиеся в результате выполнения тригонометрических операций над аркфункциями, вообще говоря, являются иррациональными. Следовательно, уравнения, получающиеся после выполнения тригонометрических операций над обеими частями данного уравнения, в общем случае будут также иррациональными. Для получения алгебраического уравнения необходимо еще (в общем случае) освобождение иррационального уравнения от радикалов, что в свою очередь может привести к появлению посторонних решений.

Источником появления посторонних решений могут быть также тождественные преобразования. Так, например, для уравнения

$$\arcsin f(x) = \arcsin \varphi(x)$$

множество допустимых значений неизвестного определяется из двух условий:

1°. значения x должны принадлежать области определения функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, рассматриваемых совместно;

2°. должны выполняться неравенства

$$|f(x)| \leq 1, \quad |\varphi(x)| \leq 1.$$

При переходе к уравнению

$$f(x) = \varphi(x)$$

(если это последнее уравнение рассматривать вне связи с данным) условия 2° отпадают. Изменение множества допустимых значений обусловлено тождественными преобразованиями:

$$\sin(\arcsin f(x)) = f(x), \quad \sin(\arcsin \varphi(x)) = \varphi(x).$$

Примеры.

1. Решить уравнение

$$3 \arcsin \sqrt{x} - \pi = 0.$$

Решение.

$$\arcsin \sqrt{x} = \frac{\pi}{3}, \quad \sqrt{x} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ и } x = \frac{3}{4}.$$

2. Решить уравнение

$$4 \arctg (x^2 - 3x + 3) - \pi = 0$$

Решение.

$$\arctg (x^2 - 3x + 3) = \frac{\pi}{4}, \quad x^2 - 3x + 3 = 1,$$

откуда

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2.$$

3. Решить уравнение

$$2 \arcsin x = 8.$$

Решение. Уравнение не имеет решений, так как оно имеет противоречивое следствие

$$\arcsin x = 4, \text{ но } 4 > \frac{\pi}{2}.$$

4. Решить уравнение

$$\pi - \arcsin x = \arcsin \cos x. \quad (1)$$

Решение. Возьмем синус от обеих частей:

$$\sin (\pi - \arcsin x) = \sin (\arcsin \cos x),$$

откуда

$$\sin (\arcsin x) = \sin (\arcsin \cos x)$$

или

$$x = \sqrt{1 - x^2}. \quad (2)$$

Возведя в квадрат обе части, получим:

$$2x^2 = 1,$$

откуда

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ и } x = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Значение $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ не есть корень иррационального уравнения (2). Это есть постороннее решение, появившееся в результате возведения в квадрат обеих частей уравнения (2). Значение $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ есть корень иррационального уравнения, но не есть решение данного уравнения (1), так как данное уравнение не имеет решений. В самом деле, противное предположение противоречит тождеству

$$\arcsin x + \arcsin \cos x = \frac{\pi}{2}$$

Значение $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ удовлетворяет другому уравнению:

$$\arcsin x = \arcsin \cos x.$$

Если взять синус от обеих частей этого последнего уравнения, то получится то же самое иррациональное уравнение.

5. Решить уравнение

$$\operatorname{arctg}(x+2) - \operatorname{arctg}(x+1) = \frac{\pi}{4}.$$

Р е ш е н и е. Взяв тангенс от обеих частей, получим квадратное уравнение:

$$x^2 + 3x + 2 = 0,$$

которое имеет корни $x_1 = -2$, $x_2 = -1$.

Оба найденные значения удовлетворяют уравнению.

6. Решить уравнение

$$\operatorname{arccos} x = \operatorname{arctg} x.$$

Р е ш е н и е. Взяв косинус от обеих частей, получим:

$$x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}},$$

откуда

$$x^2(x^2 + 1) = 1 \text{ или } x^4 + x^2 - 1 = 0.$$

Последнее уравнение имеет два действительных корня:

$$x_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \text{ и } x_2 = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}},$$

из которых данному уравнению удовлетворяет первый.

7. Решить уравнение

$$2 \operatorname{arcsin} x = \operatorname{arccos} 2x. \quad (1)$$

Р е ш е н и е. Имеем:

$$\cos(2 \operatorname{arcsin} x) = \cos(\operatorname{arccos} 2x),$$

откуда

$$1 - 2x^2 = 2x, \quad 2x^2 + 2x - 1 = 0, \quad (2)$$

следовательно,

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}.$$

Область определения уравнения (1) устанавливается системой двух неравенств:

$$|x| \leq 1 \text{ и } |2x| \leq 1, \text{ откуда } -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}.$$

Этим условиям удовлетворяет корень x_2 , который является решением уравнения (1), так как дуги $2 \operatorname{arcsin} x_2$ и $\operatorname{arccos} 2x_2$ содержатся в интервале $(0, \pi)$ и имеют одинаковый косинус, а потому они равны. Корень x_1 является посторонним для уравнения (1), так как $|x_1| > 1$; этот корень появился в результате расширения области определения при переходе от уравнения (1) к (2).

8. Решить уравнение

$$\operatorname{arcsin} mx = \operatorname{arccos} nx.$$

Р е ш е н и е. Возьмем синус от обеих частей (1):

$$\sin(\operatorname{arcsin} mx) = \sin(\operatorname{arccos} nx);$$

откуда получим иррациональное уравнение

$$mx = \sqrt{1 - n^2 x^2}.$$

По возведении обеих частей в квадрат, получим:

$$(m^2 + n^2) x^2 = 1, \quad \text{откуда} \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

Возможны следующие случаи:

1°. $m \geq 0, n \geq 0$, но, по крайней мере, одно из чисел m или n отлично от нуля. В этом случае уравнению может удовлетворить только положительное значение x , так как при $x \leq 0$ дуги $\arcsin x$ и $\arcsin nx$ расположены в различных промежутках.

Единственным решением уравнения является

$$x = \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

2°. $m \leq 0, n \leq 0$, но, по крайней мере, одно из чисел m или n отлично от нуля. В этом случае уравнение не может иметь положительных решений, и единственным его решением является

$$x = -\frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

3°. $m > 0, n < 0$. В этом случае уравнение (1) не имеет решений, так как аргументы аркфункций mx и nx имеют разные знаки, а поэтому дуги $\arcsin mx$ и $\arcsin nx$ расположены в различных промежутках. То же самое имеет место в случае $m < 0, n > 0$.

4°. $m = n = 0$. В этом случае уравнение противоречиво.

9. Решить уравнение

$$\arcsin 2x + \arcsin x = \frac{\pi}{3}. \quad (1)$$

Решение. Приравняв косинусы обеих частей:

$$\cos(\arcsin 2x + \arcsin x) = \frac{1}{2},$$

получим иррациональное уравнение:

$$\sqrt{1 - 4x^2} \sqrt{1 - x^2} - 2x^2 = \frac{1}{2}; \quad (2)$$

освободив от радикалов, получим:

$$28x^2 - 3 = 0.$$

Решив это квадратное уравнение, найдем

$$x = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{7}}.$$

Значение $x = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{7}}$ не может служить корнем данного уравнения. В самом деле, дуги $\arcsin\left(-\sqrt{\frac{3}{7}}\right)$ и $\arcsin\left(-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{7}}\right)$ содержатся в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ и их сумма не равна $\frac{\pi}{3}$.

Значение $x = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{3}{7}}$ является корнем данного уравнения: достаточно заметить, что при этом значении косинус от обеих частей уравнения (1) равен $\frac{1}{2}$.

Примечание I. Взятие косинуса, а не какой-нибудь другой тригонометрической операции, удобно (в данном случае), так как получается только одно слагаемое, содержащее радикалы, что позволяет освободить уравнение от иррациональности однократным возведением в квадрат обеих частей. Если, например, взять синус от обеих частей, то в левой части получатся два слагаемых, содержащие радикалы.

Примечание II. Значение $x = -\frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{3}{7}}$ удовлетворяет уравнению, которое получается из (1) заменой его правой части на $-\frac{\pi}{3}$; иррациональное уравнение (2) получится то же самое.

10. Решить уравнение

$$\arcsin x + \arccos(1 - x) = \arcsin(-x). \quad (1)$$

Решение. Выполнив преобразования, получим эквивалентное уравнение

$$2 \arcsin x + \arccos(1 - x) = 0,$$

откуда

$$2 \arcsin x = -\arccos(1 - x).$$

Приравняв косинусы обеих частей, получим:

$$\cos(2 \arcsin x) = 1 - x, \text{ откуда } 2x^2 - x = 0. \quad (2)$$

Корни уравнения (2) суть $x = 0$ и $x = \frac{1}{2}$. Подстановкой в данное уравнение установим, что ему удовлетворяет только первый корень $x = 0$. Второе значение $x = \frac{1}{2}$ является решением уравнения

$$\arcsin x - \arccos(1 - x) = \arcsin(-x).$$

11. Решить уравнение

$$\arcsin \frac{2}{3\sqrt{x}} - \arcsin \sqrt{1-x} = \arcsin \frac{1}{3}. \quad (1)$$

Решение. Приравняв синусы обеих частей, получим:

$$\frac{2}{3} - \sqrt{1 - \frac{4}{9x}} \sqrt{1-x} = \frac{1}{3}.$$

После освобождения от радикалов и преобразований получим квадратное уравнение $9x^2 - 12x + 4 = 0$, имеющее двукратный корень $x = \frac{2}{3}$. Подстановкой убедимся, что он удовлетворяет уравнению (1).

Примечание. То же самое квадратное уравнение получится, если уравнение (1) заменить уравнением

$$\arcsin \frac{2}{3\sqrt{x}} + \arcsin \sqrt{1-x} = \arcsin \frac{1}{3}. \quad (2)$$

Значение $x = \frac{2}{3}$ не удовлетворяет уравнению (2). В этом случае иррациональное уравнение примет вид:

$$\frac{2}{3} + \sqrt{1 - \frac{4}{9x}} \sqrt{1-x} = \frac{1}{3};$$

последнее уравнение решений не имеет.

12. Решить уравнение

$$2 \arccos x = \arcsin (2x \sqrt{1-x^2}). \quad (1)$$

Решение. Имеем:

$$\sin (2 \arccos x) = 2x \sqrt{1-x^2};$$

$$2x \sqrt{1-x^2} = 2x \sqrt{1-x^2}.$$

Последнее уравнение удовлетворяется тождественно на сегменте $-1 \leq x \leq 1$. При $x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ дуга $2 \arccos x$ оканчивается за пределами первой четверти, и уравнение (1) не удовлетворяется; при произвольном $x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ эта дуга содержится в первой (замкнутой) четверти; уравнение (1) удовлетворяется.

Итак, множество всех решений уравнения (1) есть сегмент $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1$; множество посторонних решений есть полусегмент $-1 \leq x < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

13. Решить систему

$$\arcsin x \arcsin y = \frac{\pi^2}{12},$$

$$\arccos x \arccos y = \frac{\pi^2}{24}.$$

Решение. Воспользовавшись тождеством $\arccos a = \frac{\pi}{2} - \arcsin a$, выразим левую часть второго уравнения через арксинусы.

$$\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x \right) \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin y \right) = \frac{\pi^2}{24}.$$

Выполнив подстановку $u = \arcsin x$, $v = \arcsin y$ и тождественные преобразования, получим систему:

$$uv = \frac{\pi^2}{12}, \quad uv - (u+v) \frac{\pi}{2} + \frac{5}{24} \pi^2 = 0.$$

Вычислив $u+v$ и uv , составим квадратное уравнение, корнями которого являются u и v :

$$12z^2 - 7\pi z + \pi^2 = 0,$$

$$\text{откуда } u_1 = \frac{\pi}{3}, \quad v_1 = \frac{\pi}{4} \text{ и } u_2 = \frac{\pi}{4}, \quad v_2 = \frac{\pi}{3}.$$

Следовательно, получим совокупность двух систем:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{arcsin} x &= \frac{\pi}{3} \\ \operatorname{arcsin} y &= \frac{\pi}{4} \end{aligned} \right\} \text{ и } \left. \begin{aligned} \operatorname{arcsin} x &= \frac{\pi}{4} \\ \operatorname{arcsin} y &= \frac{\pi}{3} \end{aligned} \right\}.$$

Данная система имеет два решения:

$$x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

14. Решить уравнение

$$\operatorname{arcsin} mx = 2 \operatorname{arctg} nx. \quad (1)$$

Решение. Взяв синус от обеих частей, получим:

$$\sin(\operatorname{arcsin} mx) = \sin(2 \operatorname{arctg} nx), \quad (2)$$

откуда

$$mx = \frac{2nx}{1 + n^2 x^2}. \quad (3)$$

Это уравнение, а также и (1) имеет очевидное решение $x = 0$. Для отыскания прочих решений (сократив на x) получим уравнение

$$m = \frac{2n}{1 + n^2 x^2},$$

или

$$mn^2 x^2 = 2n - m. \quad (4)$$

Если $m \neq 0$ и $n \neq 0$, то уравнение (4) имеет в поле комплексных чисел следующие корни:

$$x = \pm \frac{1}{n} \sqrt{\frac{2n - m}{m}}. \quad (5)$$

Значения x действительны, если $\frac{2n - m}{m} \geq 0$, откуда

$$\text{либо } \left. \begin{aligned} m &> 0 \\ m &\leq 2n \end{aligned} \right\} \text{ (I), либо } \left. \begin{aligned} m &< 0 \\ m &\geq 2n \end{aligned} \right\} \text{ (II).}$$

Подлежат рассмотрению следующие случаи:

Случай 1° $m > 0$, $n > 0$. Из неравенств (I) найдем $0 < m \leq 2n$; при этом условии из формулы (5) получим два действительных значения x :

$$x_1 = -\frac{1}{n} \sqrt{\frac{2n - m}{m}} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{2n - m}{m}}.$$

Множество допустимых значений неизвестного для уравнения (1) находится из условия $|mx| \leq 1$

Это последнее неравенство есть следствие уравнения (3), так как при всех значениях x

$$\frac{1 + n^2 x^2}{2} \geq \sqrt{n^2 x^2} = |nx|, \quad \text{т. е.} \quad \frac{2|nx|}{1 + n^2 x^2} \leq 1.$$

Чтобы положительный корень x_2 удовлетворял уравнению (1), необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$2 \arctg nx_2 < \frac{\pi}{2}, \text{ откуда } x_2 < \frac{1}{n}$$

или

$$\frac{2n - m}{m} < 1, \text{ т. е. } n < m.$$

Если $0 < n < m < 2n$, то дуги $\arcsin mx_2$ и $2 \arctg nx_2$ имеют одинаковый синус; обе эти дуги содержатся в первой четверти, а потому равны, т. е. x_2 удовлетворяет уравнению (1).

Отрицательный корень $x_1 = -x_2$ в данном случае также удовлетворяет уравнению (1).

Из изложенного следует, что при $m > 0, n > 0$ уравнение имеет:

а) единственный корень $x = 0$, если $2n < m$ (корни уравнения (4) мнимые), а также, если $2n = m$ (тогда $x_1 = x_2 = 0$);

б) три действительных корня, если $n < m < 2n$;

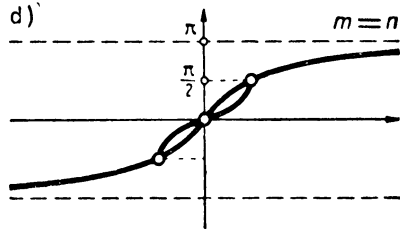
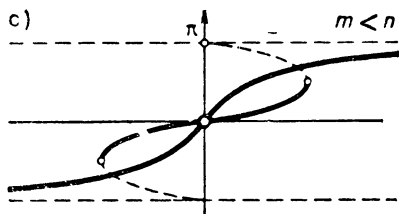
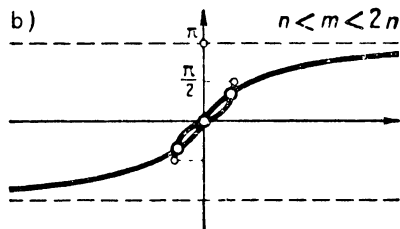
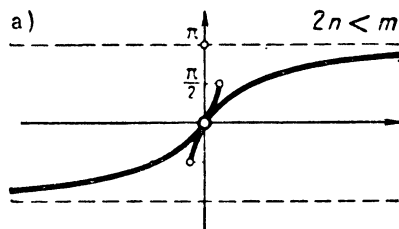
с) единственный корень $x = 0$, если $n > m$.

В последнем случае дуга $2 \arctg x_2$ оканчивается во второй четверти и аналогично $2 \arctg x_1 < -\frac{\pi}{2}$.

Примечание. Если $n = m$, то $x_1 = -\frac{1}{m}, x_2 = \frac{1}{m}$.

В этом случае «граничном» для б) и с) имеем

$$\arcsin mx = 2 \arctg mx = \pm \frac{\pi}{2}$$



Черт 184

Результаты исследования пояснены графически на чертеже 184.

С л у ч а й 2°. $m < 0, n < 0$ рассматриваются аналогично предыдущему случаю. Уравнение (1) можно заменить эквивалентным уравнением

$$\arcsin(-mx) = 2 \arctg(-nx),$$

что равносильно замене m и n на $-m$ и $-n$.

С л у ч а й 3°. Числа m и n — противоположных знаков. Уравнение (1) имеет единственное решение $x = 0$.

С л у ч а й 4°. $m = 0$, $n \neq 0$ либо $m \neq 0$, $n = 0$.

Уравнение имеет единственное решение $x = 0$.

С л у ч а й 5°. $m = n = 0$. Уравнение (1) удовлетворяется тождественно.

При изложении способа при переходе от уравнения (1) к уравнению (2) могут появиться посторонние решения, что и имело место в случае 1с). В этом случае корень x_1 удовлетворяет уравнению

$$\arcsin mx = -\pi - 2 \arctg nx,$$

а корень x_2 — уравнению

$$\arcsin mx = \pi - 2 \arctg nx.$$

П р и м е ч а н и е. Переход от уравнения (1) к уравнению (2) путем вычисления с и н у с а от обеих частей удобен тем, что в результате получается рациональное уравнение.

§ 54. Примеры решения некоторых трансцендентных уравнений

В настоящем параграфе приведены примеры решения некоторых трансцендентных уравнений, содержащих различные сложные трансцендентные функции от неизвестного.

Примеры.

1. Решить уравнение

$$\log_a (\sin x + \cos x) = b.$$

Р е ш е н и е. Данное уравнение эквивалентно уравнению

$$\sin x + \cos x = a^b \quad \text{или} \quad \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{a^b}{\sqrt{2}}. \quad (2)$$

Чтобы уравнение (2) имело решения, необходимо и достаточно выполнения условия

$$\left| \frac{a^b}{\sqrt{2}} \right| \leq 1 \quad \text{или} \quad 0 < a^b \leq \sqrt{2}. \quad (3)$$

Если основание логарифмов $a > 1$, то неравенства (3) эквивалентны неравенствам

$$-\infty < b \leq \frac{1}{2} \log_a 2.$$

Если $a < 1$, то $\frac{1}{2} \log_a 2 \leq b < +\infty$.

При соблюдении условия (3) имеем серию решений:

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{a^b}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4} + n\pi.$$

2. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{3} \sin a^x + \cos a^x = b. \quad (1)$$

Р е ш е н и е. Решаем уравнение, эквивалентное данному:

$$\sin \left(a^x + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{b}{2}. \quad (2)$$

Если $|b| > 2$, то уравнение (2) не имеет решений, если $|b| \leq 2$, то получим эквивалентное уравнение с целочисленным параметром:

$$a^x = (-1)^n \arcsin \frac{b}{2} - \frac{\pi}{6} + n\pi.$$

Последнее уравнение эквивалентно совокупности двух уравнений

$$a^x = \arcsin \frac{b}{2} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \quad (3)$$

$$a^x = \frac{5\pi}{6} - \arcsin \frac{b}{2} + 2k\pi. \quad (3')$$

Из неравенства $a^x > 0$ определяются условия, при которых уравнения (3) и (3') имеют решения:

1°. Для уравнения (3)

$$\arcsin \frac{b}{2} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi > 0,$$

откуда

$$k = \begin{cases} 0, 1, 2, \dots, m, \dots, & \text{если } 1 < b \leq 2, \\ 1, 2, \dots, m, \dots, & \text{если } -2 \leq b \leq 1; \end{cases}$$

2°. Для уравнения (3')

$$\frac{5\pi}{6} - \arcsin \frac{b}{2} + 2k\pi > 0,$$

откуда $k = 0, 1, 2, \dots, m, \dots$

Итак, если $|b| \leq 2$, то уравнение имеет две серии решений:

$$x = \log_a \left(\arcsin \frac{b}{2} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right) \text{ и } x = \log_a \left(\frac{5\pi}{6} - \arcsin \frac{b}{2} + 2k\pi \right),$$

где значения k для каждой серии определяются соответственно условиями 1° и 2°.

3. Решить уравнение

$$\sin(\pi \operatorname{arctg} x) = \cos(\pi \operatorname{arctg} x).$$

Решение. Положив $u = \pi \operatorname{arctg} x$, получим:

$$\sin u = \cos u, \text{ откуда } u = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Для вычисления x получим уравнение

$$\operatorname{arctg} x = \frac{1}{4} + k.$$

Значения k , при которых последнее уравнение имеет решение, определяются из условия

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{1}{4} + k < \frac{\pi}{2}, \text{ откуда } k = 0, 1, -1.$$

Уравнение имеет три решения:

$$x = \operatorname{tg} \frac{1}{4}, \quad x = -\operatorname{tg} \frac{3}{4}, \quad x = \operatorname{tg} \frac{5}{4}.$$

4. Решить уравнение

$$\lg(\operatorname{arctg} x) + \lg(\operatorname{arctg} x) = a. \quad (1)$$

Решение. Найдем область определения уравнения:

$$\arcsin \operatorname{tg} x > 0, \quad \arcsin \operatorname{ctg} x > 0, \quad \text{откуда } x > 0.$$

Уравнение (1) эквивалентно следующему:

$$\arcsin \operatorname{tg} x \arcsin \operatorname{ctg} x = 10^a.$$

Положив $t = \arcsin \operatorname{tg} x$, получим смешанную систему:

$$t^2 - \frac{\pi}{2} t + 10^a = 0, \quad 0 < t < \frac{\pi}{2}.$$

Корни квадратного уравнения суть:

$$t = \frac{\pi \pm \sqrt{\pi^2 - 16 \cdot 10^a}}{4}.$$

Корни действительны, если

$$\pi^2 - 16 \cdot 10^a \geq 0, \quad \text{откуда } a \leq 2 \lg \frac{\pi}{4}.$$

При этом условии корни t_1 и t_2 квадратного уравнения положительны, точка $\frac{\pi}{2}$ лежит вне сегмента корней, так как

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + 10^a > 0 \text{ и}$$
$$0 < t_1 \leq t_2 < \frac{\pi}{2}, \quad \text{так как } \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, при $a < 2 \lg \frac{\pi}{4}$ уравнение имеет два решения:

$$x = \operatorname{tg} \frac{\pi \pm \sqrt{\pi^2 - 16 \cdot 10^a}}{4}.$$

5. Решить уравнение

$$(\cos x)^{\cos 3x + 2 \cos x} = 1.$$

Решение. Область определения уравнения находится из условия $\cos x > 0$. При этом условии, прологарифмировав обе части, получим:

$$(\cos 3x + 2 \cos x) \lg \cos x = 0.$$

Последнее уравнение эквивалентно совокупности двух уравнений:

$$\cos 3x + 2 \cos x = 0 \quad \text{и} \quad \lg \cos x = 0.$$

Первое уравнение после преобразования примет вид

$$(4 \cos^2 x - 1) \cos x = 0,$$

откуда получим три серии:

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \quad x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}.$$

Из второго уравнения найдем четвертую серию:

$$\cos x = 1 \quad \text{и} \quad x = 2k\pi.$$

Для решений первой серии условие $\cos x > 0$ выполняется. Для решений второй серии имеем $\cos x < 0$, следовательно, вторая серия является посторонней.

Для решений третьей серии левая часть уравнения принимает вид 0^0 , т. е. теряет смысл, следовательно, эта серия является серией посторонних решений.

Четвертая серия удовлетворяет уравнению.

Итак, имеем две серии решений:

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ и } x = 2k\pi.$$

П р и м е ч а н и е. Применим к решениям третьей серии принцип предельного перехода:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{(2k+1)\pi}{2}} (\cos x)^{\cos x (4 \cos^2 x - 1)} = \lim_{z \rightarrow 0} z^{z(4z^2 - 1)} = \lim_{z \rightarrow 0} 10^{(4z^2 - 1)z \lg z} = 1,$$

ибо $\lim_{z \rightarrow 0} z \lg z = 0$ (см. «Специальный курс элементарной алгебры», § 108). Следовательно третья серия состоит из особых решений.

6. Решить уравнение

$$\lg \sin x \cdot 2 \lg \sin^2 x \cdot 3 = 1. \quad (1)$$

Решение. Область определения уравнения (1) находится из условия $0 < \sin x < 1$.

Преобразуем левую часть, перейдя к логарифмам при основании 2

$$\frac{1}{\log_2 \sin x} \cdot \frac{\log_2 3}{2 \log_2 \sin x} = 1,$$

откуда

$$\log_2 \sin x = \pm \sqrt{\frac{\log_2 3}{2}},$$

данное уравнение эквивалентно смешанной системе

$$\sin x = 2^{\pm \sqrt{\frac{\log_2 3}{2}}}, \quad 0 < \sin x < 1.$$

Эта последняя система имеет серию решений, дающую общее решение данного уравнения

$$x = (-1)^n \arcsin 2^{-\sqrt{\frac{1}{2} \log_2 3}} + n\pi.$$

7. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = a.$$

Решение. Введем промежуточный аргумент:

$$u = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1 - \frac{2}{x^2 + 1}.$$

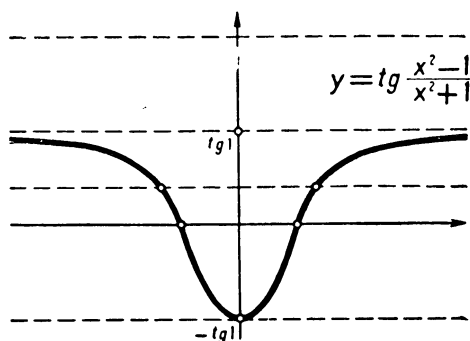
В промежутке $0 \leq x < +\infty$ аргумент u возрастает от -1 до 1 , промежутке $-\infty < x \leq 0$ убывает от 1 до -1 ; сложная функция

$$y = \operatorname{tg} u = \operatorname{tg} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

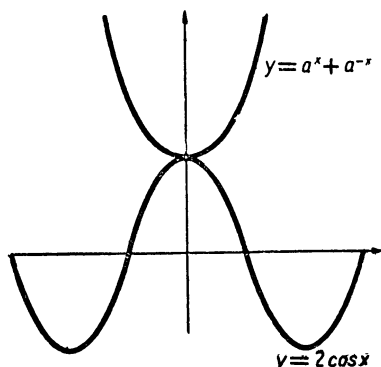
в первом промежутке возрастает от $-\operatorname{tg} 1$ до $\operatorname{tg} 1$, а во втором — убывает от $\operatorname{tg} 1$ до $-\operatorname{tg} 1$ (черт. 185). Следовательно, при $|a| > \operatorname{tg} 1$ уравнение не имеет решений, так как $|y| \leq \operatorname{tg} 1$, при $|a| < \operatorname{tg} 1$ уравнение имеет два взаимно противоположные решения; при $a = -\operatorname{tg} 1$ единственное решение $x = 0$; при $a = \operatorname{tg} 1$ — не имеет решений.

Уравнение эквивалентно алгебраическому с действительным параметром a и с целочисленным параметром k :

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} a + k\pi.$$



Черт. 185



Черт. 186

Если $|a| \leq \operatorname{tg} 1$, т. е. $|\operatorname{arc} \operatorname{tg} a| \leq 1$, то неравенство $|u| = |\operatorname{arc} \operatorname{tg} a + k\pi| \leq 1$ выполняется при единственном значении $k = 0$. Следовательно, данное уравнение эквивалентно следующему

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} a.$$

Ответ. Если $-\operatorname{tg} 1 \leq a < \operatorname{tg} 1$, то $x = \pm \sqrt{\frac{1 + \operatorname{arc} \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{arc} \operatorname{tg} a}}$.

Если $|a| > \operatorname{tg} 1$ или $a = \operatorname{tg} 1$, то уравнение не имеет решений.

8. Решить уравнение $a^x + a^{-x} = 2 \cos x$

Решение. Левая часть $a^x + a^{-x} = a^x + \frac{1}{a^x}$

имеет при $x = 0$ наименьшее значение равное 2 (см. «Специальный курс элементарной алгебры», § 104, пример 14). Левая часть имеет наибольшее значение равное 2 при $x = 2k\pi$. Равенство возможно при $x = 0$. Уравнение имеет единственное решение $x = 0$ (черт. 186).

9. Решить уравнение

$$(\sqrt{\sqrt{2} + 1})^{\sin x} + (\sqrt{\sqrt{2} - 1})^{\sin x} = p. \quad (1)$$

Решение. Приняв во внимание, что $\sqrt{\sqrt{2} - 1} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2} + 1}}$, положим

$$t = (\sqrt{\sqrt{2} + 1})^{\frac{\sin x}{2}},$$

тогда получим уравнение:

$$f(t) = t^2 - pt + 1 = 0. \quad (2)$$

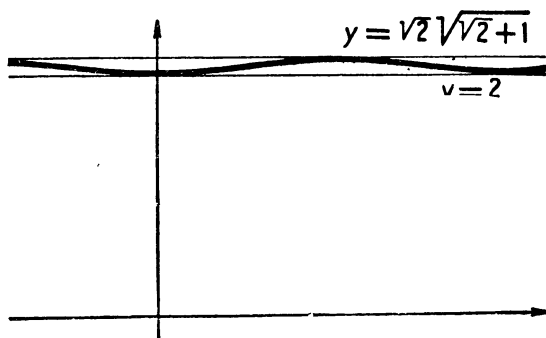
Левую часть уравнения (1) можно представить в следующем виде:

$$y = a^{\sin x} + a^{-\sin x}, \text{ где } a = \sqrt[3]{\sqrt{2}+1},$$

эта функция четная, наименьшее ее значение есть $y = 2$ при $\sin x = 0$, а наибольшее

$$y = \sqrt[3]{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}} = \sqrt{2} \sqrt[3]{\sqrt{2}+1}$$

при $\sin x = 1$. Следовательно, график пересекается с прямой $y = p$ при условии $2 \leq p \leq \sqrt{2} \sqrt[3]{\sqrt{2}+1}$ (черт 187).



Черт 187

При соблюдении этого условия имеет место следующее расположение корней квадратного уравнения (2):

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}} \leq t_1 = \frac{1}{t_2} \leq 1 \leq t_2 \leq \sqrt[3]{\sqrt{2}+1}.$$

Ответ. Если

$$2 \leq p \leq \sqrt{2} \sqrt[3]{\sqrt{2}+1},$$

то уравнение имеет серию решений

$$x = \pm \arcsin \frac{2 \lg \frac{p + \sqrt{p^2 - 4}}{2}}{\lg(\sqrt{2}+1)} + n\pi.$$

§ 55. Приемы решения тригонометрических и некоторых других трансцендентных неравенств

I. Неравенства, приводящиеся к простейшим

Рассмотрим неравенство вида

$$f(ax) > m,$$

где $f(x)$ — данная тригонометрическая функция, a — данное для определенности положительное число. Рассмотрим, например, неравенство

$$\cos ax > m.$$

Имеем:

$$-\arccos m + 2k\pi < ax < \arccos m + 2k\pi,$$

откуда

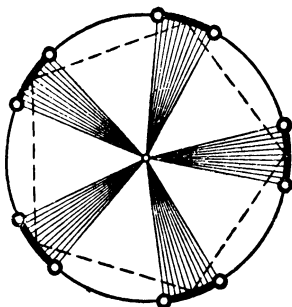
$$-\frac{\arccos m}{a} + \frac{2k\pi}{a} < x < \frac{\arccos m}{a} + \frac{2k\pi}{a}.$$

Предположим, в частности, что $a = p$ есть натуральное число; в этом случае функция $\cos px$ имеет период $\frac{2\pi}{p}$; любой сегмент длиной 2π содержит p периодов левой части. Следовательно, на единичной окружности существует p геометрически различных дуг, на которых выполняется данное неравенство. Эти дуги определяются неравенствами

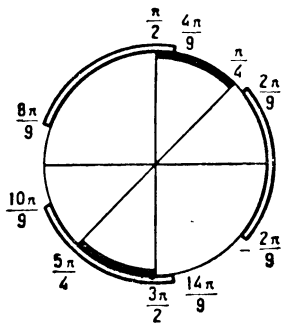
$$-\frac{\arccos m}{p} + \frac{2k\pi}{p} < x < \frac{\arccos m}{p} + \frac{2k\pi}{p}$$

при $k = 0, 1, 2, \dots, p - 1$.

На чертеже 188 изображены дуги единичной окружности, на которых выполняется неравенство $\cos 5x > \frac{1}{2}$.



Черт. 188



Черт. 189

Примеры.

Решить систему неравенств

$$\operatorname{tg} x > 1, \quad \cos 3x > -\frac{1}{2}.$$

Решение. Число 2π является общим периодом функций $\operatorname{tg} x$ и $\cos 3x$. Найдем дуги в пределах одного (общего) периода, на которых выполняются оба данных неравенства.

Первое неравенство выполняется в двух интервалах:

$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \frac{5\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{2}. \quad (1)$$

Второе неравенство выполняется в трех интервалах (черт. 189)

$$-\frac{2}{9}\pi < x < \frac{2\pi}{9}, \quad \frac{4}{9}\pi < x < \frac{8}{9}\pi, \quad \frac{10}{9}\pi < x < \frac{14}{9}\pi. \quad (2)$$

Две системы интервалов (1) и (2) имеют общую часть в виде следующих двух интервалов:

$$\frac{4\pi}{9} < x < \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \frac{5\pi}{4} < x < \frac{3}{2}\pi.$$

Общее решение системы есть совокупность интервалов

$$\frac{4\pi}{9} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

$$\frac{5\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{3}{2}\pi + 2k\pi.$$

2. Решить неравенство

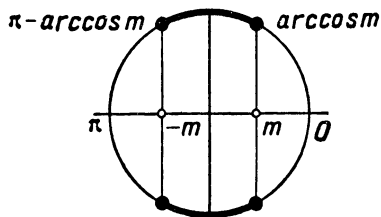
$$|\cos x| < m.$$

Решение. 1°. При $m > 1$ неравенство выполняется тождественно.

2°. При $m \leq 0$ неравенство противоречиво.

3°. При $0 < m \leq 1$ неравенство эквивалентно системе

$$-m < \cos x < m.$$



Черт. 190

Функция $|\cos x|$ периодическая с периодом π . На сегменте $[0, \pi]$ по длине равному периоду неравенства, оно выполняется в интервале (черт 190)

$$\arccos m < x < \pi - \arccos m.$$

Общее решение есть совокупность интервалов

$$\arccos m + k\pi < x < \pi - \arccos m + (k+1)\pi$$

II. Основываясь на общих законах монотонности арифметических действий, на неравенствах, содержащих абсолютные величины, на свойствах тригонометрических функций: ограниченность

$$-1 \leq \cos x \leq 1, \quad -1 \leq \sin x \leq 1,$$

монотонность, знакопостоянство в данных промежутках и т. п., можно непосредственно устанавливать различные неравенства, связывающие значения тригонометрических функций в различных промежутках. Ниже приводятся примеры непосредственного установления различных неравенств; соответствующие приемы никакой общей теорией предусмотрены быть не могут.

Примеры.

1. Доказать, что для любого острого угла x

$$\sin x + \cos x > 1.$$

Решение. Рассмотрим тождество

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Для острого угла $0 < \sin x < 1$, а потому $\sin^2 x < \sin x$, а также $\cos^2 x < \cos x$, откуда и следует доказываемое неравенство (истолковать

геометрически). Для острых углов также непосредственно устанавливаются следующие неравенства:

$$2. \sin x < \operatorname{tg} x, \text{ так как } \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ и } 0 < \cos x < 1.$$

$$3. \sin(x + y) < \sin x + \sin y \text{ (применить формулу } (S_{\alpha+\beta})).$$

$$4. \sin 2x < 2 \sin x, \text{ так как } \sin 2x = 2 \sin x \cos x \text{ и } 0 < \cos x < 1.$$

$$5. \operatorname{tg} 2x > 2 \operatorname{tg} x, \text{ если } 0 < x < \frac{\pi}{4}, \text{ так как } \operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}.$$

III. Неравенство рациональное относительно некоторой тригонометрической функции

$$R(f(x)) > 0$$

решается подстановкой $f(x) = t$; при этом к неравенству

$$R(t) > 0 \quad (R)$$

следует присоединить неравенства $-1 \leq t \leq 1$, если $f(x)$ обозначает синус либо косинус. Решив неравенство (R) относительно промежуточного аргумента t , сведем задачу к решению простейших тригонометрических неравенств.

Если левая часть является рациональным выражением относительно нескольких функций, то применением рационализирующей подстановки (случаи применимости этих подстановок указаны в § 23) неравенство может быть приведено к предыдущему виду.

Примеры.

1. Решить неравенство

$$\sin x > \cos^2 x.$$

Решение. Применив рационализирующую подстановку $t = \sin x$, получим систему неравенств:

$$t^2 + t - 1 > 0, \quad -1 \leq t \leq 1.$$

Решением первого неравенства является множество двух интервалов

$$-\infty < t < \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{5} - 1}{2} < t < +\infty.$$

Общей частью системы этих двух интервалов и сегмента $[-1, 1]$ является промежуток

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2} < t \leq 1.$$

Следовательно, данное тригонометрическое неравенство эквивалентно простейшему неравенству:

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2} < \sin x,$$

откуда

$$\arcsin \frac{\sqrt{5} - 1}{2} + 2k\pi < x < -\arcsin \frac{\sqrt{5} - 1}{2} + 2(2k + 1)\pi \\ \left(\arcsin \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0,66 \text{ найдем по таблицам} \right).$$

2. Решить неравенство

$$\frac{\sin x + \cos x - 1}{\sin x - \cos x + 1} > 0,$$

Решение. Положим $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, тогда получим (после подстановки и преобразований):

$$\frac{\sin x + \cos x - 1}{\sin x - \cos x + 1} = \frac{1-t}{1+t} > 0,$$

откуда получим две линейные системы:

$$\left. \begin{array}{l} 1-t > 0 \\ 1+t > 0 \end{array} \right\} \quad (\text{I}) \quad \text{и} \quad \left. \begin{array}{l} 1-t < 0 \\ 1+t < 0 \end{array} \right\}. \quad (\text{II})$$

Первая система имеет решение $-1 < t < 1$, а вторая не имеет решений. Следовательно,

$$-1 < \operatorname{tg} \frac{x}{2} < 1,$$

откуда (в пределах одного периода)

$$-\frac{\pi}{4} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{4} \quad \text{и} \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

Переходя к данному неравенству, заметим, что при $x=0$ его левая часть теряет смысл, а потому его решение (в пределах одного периода) состоит из двух интервалов

$$-\frac{\pi}{2} < x < 0 \quad \text{и} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Общее решение есть совокупность интервалов

$$\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 2k\pi\right), \quad \left(2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right).$$

Примечание. Если в точке $x=0$ значение левой части данного неравенства найти по принципу продолжения по непрерывности, то получим

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \cos x - 1}{\sin x - \cos x + 1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1-t}{1+t} = 1.$$

В таком случае точку $x=0$ исключать не следует.

IV. При решении тригонометрических неравенств можно применять следующий общий прием.

Предположим, что решено уравнение

$$f(x) = 0, \quad (\text{f})$$

т. е. что известны все его корни и что, будучи расположены в порядке возрастания, эти корни делят область определения функции $f(x)$ на конечное или бесконечное множество промежутков. Пусть x_{i-1} и x_i — два соседние корня уравнения (f); если функция $f(x)$ непрерывна, то в интервале (x_{i-1}, x_i) она знакопостоянна, так как в этом интервале она не обращается в нуль. В рассматриваемом

случае корни уравнения (f) разбивают область определения функции $f(x)$ на интервалы знакопостоянства. Общим решением неравенства

$$f(x) > 0$$

служит множество всех интервалов, в которых функция $f(x)$ положительна.

Если функция $f(x)$ разложена на множители: $f = f_1 f_2 \dots f_k$ и для каждого множителя (в отдельности) установлены интервалы знакопостоянства, то, объединив в одно множество концы всех этих интервалов, получим разбиение области определения $f(x)$ на интервалы знакопостоянства.

Неравенство

$$f(x) > 0 \text{ (или } f(x) < 0)$$

выполняется в тех интервалах, в которых число отрицательных сомножителей четно (нечетно).

Примеры.

Решить неравенство

$$\sin x > \sin 3x.$$

Решение. Решаем эквивалентное неравенство:

$$\sin x - \sin 3x > 0 \quad \text{и} \quad -2 \cos 2x \sin x > 0;$$

последнее неравенство эквивалентно неравенству

$$\cos 2x \sin x < 0. \quad (1)$$

Найдем корни уравнения

$$\cos 2x \cdot \sin x = 0$$

на сегменте $[-\pi, \pi]$, охватывающем период левой части.

Решив уравнения $\cos 2x = 0$ и $\sin x = 0$, получим $x = \pm \frac{\pi}{4}$, $x = \pm \frac{3}{4}\pi$, $x = 0$ и $x = \pm \pi$. Составим таблицу распределения знаков для каждого из интервалов, на которые делят найденные корни сегмент $[-\pi, \pi]$:

x	$-\pi$	$< x <$	$-\frac{3\pi}{4}$	$< x <$	$-\frac{\pi}{4}$	$< x <$	0	$< x <$	$\frac{\pi}{4}$	$< x <$	$\frac{3\pi}{4}$	$< x <$	π
$\cos 2x$	+	+	0	—	0	+	+	+	0	—	0	+	+
$\sin x$	0	—	—	—	—	—	0	+	+	+	+	+	0
$\cos 2x \sin x$	0	—	0	+	0	—	0	+	0	—	0	+	0

Следовательно, неравенство (1) выполняется в интервалах

$$\left(-\pi, -\frac{3}{4}\pi\right), \quad \left(-\frac{\pi}{4}, 0\right), \quad \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right).$$

Общее решение состоит из трех серий интервалов

$$\left[(2k-1)\pi, \left(2k-\frac{3}{4}\right)\pi\right]; \quad \left[\left(2k-\frac{1}{4}\right)\pi, 2k\pi\right]; \quad \left[\left(2k+\frac{1}{4}\right)\pi, \left(2k+\frac{3}{4}\right)\pi\right].$$

2. Решить неравенство

$$\operatorname{tg} \frac{x}{3} < \operatorname{tg} x.$$

Решение. Рассмотрим левую и правую части в пределах промежутка, охватывающего их общий период 3π . Имеем:

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \frac{x}{3} > 0 \quad \text{или} \quad \frac{\sin \frac{2}{3}x}{\cos x \sin \frac{x}{3}} > 0.$$

Составим таблицу распределения знаков множителей числителя и знаменателя:

x	0	$<x<$	$\frac{\pi}{2}$	$<x<$	$\frac{3}{2}\pi$	$<x<$	$\frac{5\pi}{2}$	$<x<$	3π
$\sin \frac{2}{3}x$	0	+	+	+	0	—	—	—	0
$\cos x$	+	+	0	—	0	+	0	—	—
$\cos \frac{x}{3}$	+	+	+	+	0	—	—	—	—
$\frac{\sin \frac{2}{3}x}{\cos x \cos \frac{x}{3}}$	0	+		—		+		—	0

Неравенство выполняется в интервалах $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и $\left(\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi\right)$.

V. Применение координатной интерпретации. Так как $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$ суть абсцисса и ордината точки единичной окружности, то решение неравенства

$$f(\cos \varphi, \sin \varphi) > 0$$

равносильно решению смешанной алгебраической системы

$$f(x, y) > 0, \quad x^2 + y^2 = 1;$$

Эта система определяет ту часть единичной окружности, которая содержится в области $f(x, y) > 0$ (черт. 191).

Решения системы уравнений

$$f(x, y) = 0, x^2 + y^2 = 1$$

суть концы дуг, на которых выполняется данное тригонометрическое неравенство.

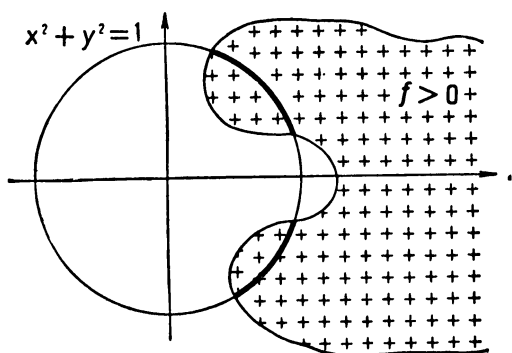
Примеры.

1. Решить неравенство

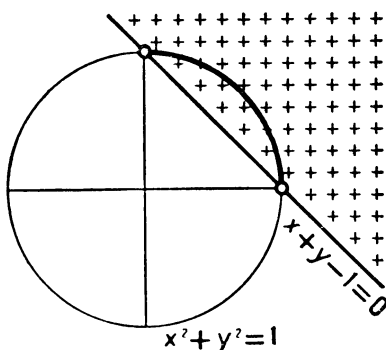
$$\cos \varphi + \sin \varphi > 1.$$

Решение. Решаем смешанную систему

$$x + y - 1 > 0 \text{ и } x^2 + y^2 = 1.$$



Черт. 191



Черт. 192

Надо найти дугу окружности, лежащую выше прямой $y = -x + 1$. Найдём точки пересечения прямой и окружности:

$$x^2 + y^2 = 1, \quad y = -x + 1.$$

Из этой системы найдём координаты концов дуги

$$x_1 = 1, y_1 = 0 \text{ и } x_2 = 0, y_2 = 1$$

(черт. 192)

В верхней полуплоскости относительно прямой $y = -x + 1$ лежит дуга $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Общим решением неравенства служит бесконечное множество интервалов $\left(2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ (дуги, оканчивающиеся в первой четверти).

2. Решить неравенство

$$\sin \varphi > 4 \sqrt{3} \cos^3 \varphi.$$

Решение. Составляем смешанную систему:

$$y > 4 \sqrt{3} x^3, \quad x^2 + y^2 = 1.$$

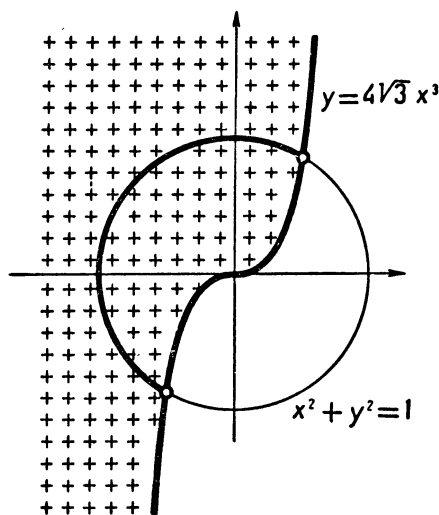
Решением этой смешанной системы служит дуга единичной окружности, расположенная выше кубической параболы $y = 4\sqrt[3]{3}x^3$. Находим точки пересечения параболы и окружности:

$$\left. \begin{aligned} y &= 4\sqrt[3]{3}x^3 \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned} \right\}, \quad \text{откуда} \quad 48x^6 + x^2 = 1.$$

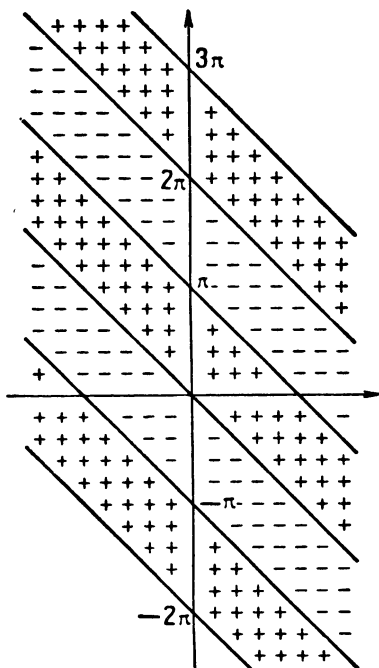
Последнее уравнение имеет два действительных корня $x = \pm \frac{1}{2}$. Дуга $\frac{\pi}{3} < \varphi < \frac{4\pi}{3}$ расположена на единичной окружности выше данной кубической параболы, общим решением служит бесконечное множество интервалов

$$\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \right) \quad (\text{черт. 193})$$

VI. На нижеследующих примерах показано решение тригонометрического неравенства с двумя неизвестными.



Черт. 193



Черт. 194

Примеры.

1. Решить неравенство

$$\sin(x + y) > 0.$$

Решение. Имеем

$$2k\pi < x + y < (2k + 1)\pi$$

или

$$2k\pi - x < y < (2k + 1)\pi - x.$$

При данном целом значении k полученные неравенства определяют на плоскости полосу, ограниченную двумя параллельными прямыми: снизу прямой $y = -x + 2k\pi$ и сверху прямой $y = -x + (2k + 1)\pi$. Придавая k произвольные целочисленные значения, получим бесконечное множество параллельных полос (черт. 194).

2. Решить неравенство

$$\sin x > \sin y.$$

Решение. Ниже изложено решение неравенства в геометрической форме. Имеем:

$$\sin x - \sin y > 0, \quad \text{откуда} \quad \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} > 0.$$

Первый множитель положителен, если

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \frac{x+y}{2} < \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

откуда получим бесконечное множество полос:

$$(4k-1)\pi - x < y < (4k+1)\pi - x.$$

В полосах

$$(4k+1)\pi - x < y < (4k+3)\pi - x$$

первый множитель отрицателен.

Второй множитель положителен, если $\sin \frac{y-x}{2} < 0$, откуда

$$(2k+1)\pi < \frac{y-x}{2} < 2(k+1)\pi$$

или

$$(4k+2)\pi + x < y < 4(k+1)\pi + x.$$

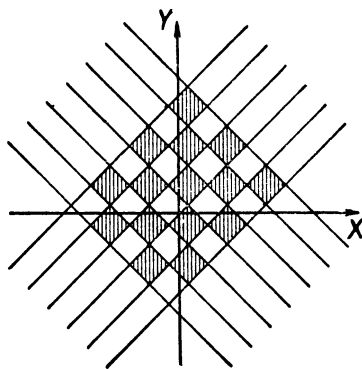
В полосах

$$4k\pi + x < y < (4k+2)\pi + x$$

второй множитель отрицателен. Полосы, в которых оба множителя имеют одинаковый знак, в пересечении образуют множество квадратов, расположенных «в шахматном порядке»; на чертеже 195 эти квадраты заштрихованы.

3. Решить неравенство

$$\arctg \frac{y}{x} > 1.$$



Черт. 195

Решение. Данное неравенство эквивалентно неравенству $\frac{\pi}{4} < \frac{y}{x}$.

$$\text{При } x > 0 \text{ получим } \frac{\pi}{4} x < y < +\infty;$$

$$\text{при } x < 0 \text{ получим } -\infty < y < \frac{\pi}{4} x.$$

Геометрически общее решение изображается двумя областями (I) и (II), образованными точками, лежащими внутри двух вертикальных углов (черт. 196).

4. Решить неравенство

$$\sin \pi (x^2 + y^2) < 0.$$

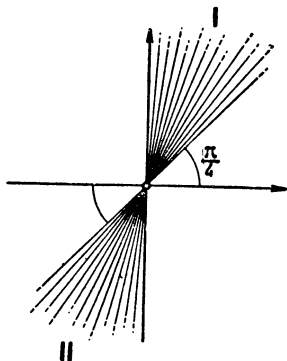
Решение. Имеем:

$$(2k + 1)\pi < \pi (x^2 + y^2) < 2(k + 1)\pi,$$

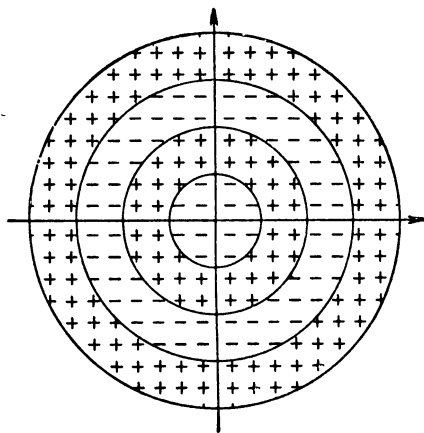
где $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, так как $x^2 + y^2 \geq 0$. Следовательно,

$$\sqrt{(2k + 1)} < \sqrt{x^2 + y^2} < \sqrt{2(k + 1)};$$

геометрически множество всех решений состоит из бесконечного множества концентрических колец (открытых) с центром в начале координат (на чертеже 197 эти кольца отмечены знаками +).



Черт. 196



Черт. 197

VII. Простейшие неравенства, содержащие обратные тригонометрические функции, решаются непосредственно: достаточно воспользоваться свойством монотонности и принять во внимание область определения и множество значений данной функции. Так, в частности, неравенство

$$\arcsin x < a$$

при $a > \frac{\pi}{2}$ удовлетворяется во всей области определения арксинуса, т. е. на сегменте $-1 \leq x \leq 1$; при $-\frac{\pi}{2} < a \leq \frac{\pi}{2}$ имеем $\arcsin x < \arcsin(\sin a)$, откуда $-1 \leq x < \sin a$; при $a \leq -\frac{\pi}{2}$ неравенство не имеет решений, так как $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x$.

Примеры

	Неравенство	Общее решение
1	$\arcsin x < 1$	$-1 < x < \sin 1$
2	$\arcsin x < 5$	$-1 \leq x \leq 1$
3	$\arccos x > \arccos \frac{1}{3}$	$-1 < x < \frac{1}{3}$
4	$\operatorname{arctg} x > 5$	не имеет решений
5	$\operatorname{arctg} x < 5$	$-\infty < x < +\infty$
6	$\arccos x > 0$	$-1 \leq x < 1$
7	$\arccos x < -\frac{\pi}{3}$	не имеет решений
8	$\arcsin x < -\frac{\pi}{6}$	$-1 \leq x < -\frac{1}{2}$
9	$\operatorname{arctg} x > \frac{3}{4}\pi$	$-\infty < x < -1$
10	$\operatorname{arctg} x > \frac{\pi}{2}$	$-\infty < x < 0$
11	$\arcsin x \leq -2$	не имеет решений

12 Решить неравенство

$$\arctg^2 x - 4 \arctg x + 3 > 0 \quad (1)$$

Решение. Положив $t = \arctg x$, решаем систему

$$t^2 - 4t + 3 > 0, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}. \quad (2)$$

Решением квадратного неравенства служит система двух интервалов: $-\infty < t < 1$ и $3 < t < +\infty$. Решением системы (2) служит интервал $-\frac{\pi}{2} < t < 1$. Решение (1) найдем из условия $-\frac{\pi}{2} < \arctg x < 1$, откуда $-\infty < x < \operatorname{tg} 1$.

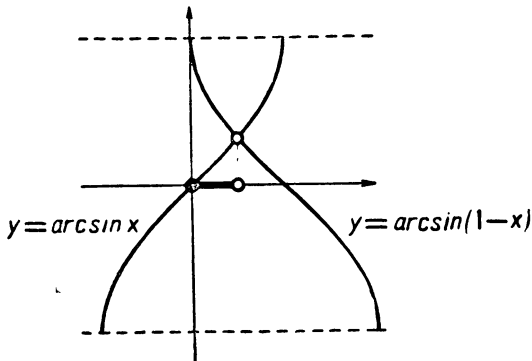
VIII Ниже приведены примеры решения различных неравенств, содержащих сложные трансцендентные функции от неизвестных.

1 Решить неравенство $\arcsin x < \arcsin(1-x)$.

Решение. Областью определения левой части служит сегмент $-1 \leq x \leq 1$, областью определения правой части — сегмент $0 \leq x \leq 2$, общей частью этих сегментов служит сегмент $0 \leq x \leq 1$. В силу возрастания арксинуса данное неравенство эквивалентно следующей системе:

$$x < 1-x \quad \text{и} \quad 0 \leq x \leq 1,$$

откуда получим полусегмент $0 \leq x < \frac{1}{2}$ (черт. 198).



Черт. 198

2. Решить неравенство

$$\arcsin x > \arccos x.$$

Решение. Если $x < 0$, то неравенство не может выполняться, так как $\arcsin x < 0$, а $\arccos x > 0$. Поэтому достаточно найти решение неравенства на сегменте $0 \leq x \leq 1$. В этом предположении левая и правая части принадлежат первой (замкнутой) четверти, в которой (в силу монотонности синуса) имеем:

$$\sin(\arcsin x) > \sin(\arccos x) \quad \text{или} \quad x > \sqrt{1-x^2},$$

откуда $x^2 > 1-x^2$ и, наконец, $\frac{1}{\sqrt{2}} < x \leq 1$ (черт. 199).

Неравенство

$$\arcsin x < \arccos x$$

выполняется в промежутке $-1 \leq x < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

3. Решить неравенство

$$\arccos x > \arccos x^2.$$

Решение. Областью определения неравенства служит сегмент $-1 \leq x \leq 1$. В силу убывания арккосинуса данное неравенство эквивалентно системе

$$x < x^2 \quad \text{и} \quad -1 \leq x \leq 1,$$

откуда $-1 \leq x < 0$ (черт. 200).

4. Решить неравенство

$$\arcsin(x^2 + 1) < 2.$$

Р е ш е н и е. Область определения неравенства состоит из единственного значения $x = 0$, при этом значении неравенство выполняется.

Неравенство имеет единственное решение $x = 0$.

5. Решить неравенство

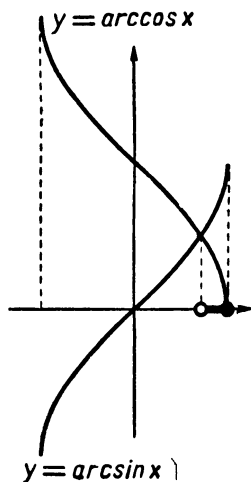
$$a^{\sin x} > a^{\cos x}, \quad \text{где } a > 0.$$

Р е ш е н и е. При $a > 1$ неравенство эквивалентно тригонометрическому неравенству

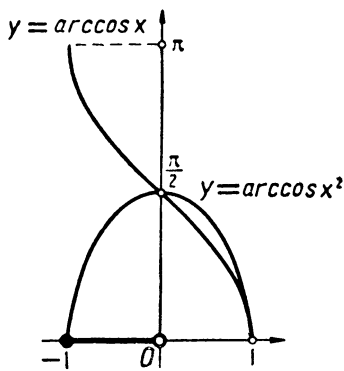
$$\sin x > \cos x, \quad \text{откуда} \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0$$

и

$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{5}{4}\pi + 2k\pi.$$



Черт. 199



Черт. 200

При $a < 1$ неравенство эквивалентно неравенству

$$\sin x < \cos x, \quad \text{откуда} \quad -\frac{3}{4}\pi + 2k\pi < x < \frac{\pi}{4} + 2k\pi.$$

При $a = 1$ неравенство не имеет решений.

6. Решить неравенство

$$\sin(4 \cos x) > 0.$$

Р е ш е н и е. Так как множество значений промежуточного аргумента $u = 4 \cos x$ есть сегмент $-4 \leq u \leq 4$, то решаем систему

$$\sin u > 0, \quad -4 \leq u \leq 4.$$

Разобьем сегмент $[-4, 4]$ на следующие промежутки:

$$-4 \leq u < -\pi, \quad -\pi \leq u \leq 0, \quad 0 < u \leq \pi, \quad \pi < u \leq 4;$$

неравенство $\sin u > 0$ выполняется в совокупности промежутков

$$-4 \leq u < -\pi \quad \text{и} \quad 0 < u < \pi,$$

откуда совокупность систем неравенств

$$-1 \leq \cos x \leq -\frac{\pi}{4} \quad \text{и} \quad 0 < \cos x < \frac{\pi}{4}.$$

В пределах одного периода косинуса первая система неравенств выполняется в интервале

$$\pi - \arccos \cos \frac{\pi}{4} < x < \pi + \arccos \cos \frac{\pi}{4}.$$

Вторая система неравенств выполняется в интервалах

$$\arccos \cos \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad -\frac{\pi}{2} < x < -\arccos \cos \frac{\pi}{4}.$$

Общее решение состоит из трех серий интервалов:

$$(2k+1)\pi - \arccos \cos \frac{\pi}{4} < x < (2k+1)\pi + \arccos \cos \frac{\pi}{4},$$

$$\arccos \cos \frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{4k+1}{2}\pi \quad \text{и} \quad \frac{4k-1}{2}\pi < x < 2k\pi - \arccos \cos \frac{\pi}{4}.$$

7. Решить неравенство

$$\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4(x+1)} > 1. \quad (1)$$

Решение. Неравенство выполняется, если

$$\frac{\pi}{4} + k\pi < \frac{\pi x}{4(x+1)} < \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

откуда

$$1 + 4k < \frac{x}{x+1} < 2 + 4k. \quad (2)$$

Примем во внимание, что при произвольном (заданном) целом k $1+4k$ и $2+4k$ суть числа одного знака. В самом деле,

$$1 + 4k > 0, \quad \text{если} \quad k > -\frac{1}{4}, \quad \text{т. е. если} \quad k \geq 0;$$

$$2 + 4k > 0, \quad \text{если} \quad k > -\frac{1}{2}, \quad \text{т. е. если} \quad k \geq 0,$$

и аналогично, оба эти выражения отрицательны при $k < 0$. Следовательно, при любом целом k неравенства (2) эквивалентны неравенствам

$$\frac{1}{1+4k} > 1 + \frac{1}{x} > \frac{1}{2+4k} \quad \text{или} \quad \frac{-4k}{1+4k} > \frac{1}{x} > \frac{-4k-1}{2+4k}; \quad (3)$$

числа $\frac{-4k}{1+4k}$ и $\frac{-4k-1}{2+4k}$ при любом целом $k \neq 0$ имеют один и тот же знак — оба отрицательны. В самом деле, при $k > 0$ числители обеих дробей отрицательны, а знаменатели — положительные, а при $k < 0$ числители положительные, а знаменатели — отрицательны. Следовательно, при произвольном целом $k \neq 0$ неравенства (3) эквивалентны неравенствам

$$-\frac{1+4k}{4k} < x < -\frac{2+4k}{4k+1};$$

при $k = 0$ из неравенств (3) получим:

$$0 > \frac{1}{x} > -\frac{1}{2} \quad \text{или} \quad -\infty < x < -2.$$

Общее решение (1) состоит из бесконечного множества интервалов (4) и интервала $(-\infty, -2)$.

§ 56. О приближенном решении трансцендентных уравнений

Вопрос об элементарных графических и численных (приближенных) приемах решения уравнений изложен в учебнике по специальному курсу элементарной алгебры (см. «Специальный курс элементарной алгебры», § 66). Напомним, что обычно графический прием позволяет в первом приближении определить промежутки, в которых заключаются корни уравнения; последующее применение метода деления промежутка позволяет вычислить данный корень с требуемой степенью точности.

Пусть $f(a)$ и $f(b)$ (где $a < b$) — числа разных знаков и в интервале (a, b) содержится лишь один корень уравнения

$$f(x) = 0.$$

Вычислив значения функции $f(x)$ в промежуточных точках интервала (a, b) , можно вычислить искомый корень с любой степенью точности.

При применении линейной интерполяции в качестве приближенного значения корня берут абсциссу точки пересечения оси абсцисс и хорды, соединяющей концы $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$ дуги линии $y = f(x)$. Это приближенное значение находится по формуле

$$x_1 = a - \frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)};$$

слагаемое

$$\Delta x = x_1 - a = - \frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)}$$

называется поправкой, эту поправку следует прибавить к первоначальному значению $x = a$ (см. «Специальный курс элементарной алгебры», § 66).

Примеры.

1 Рассмотрим уравнение

$$\sin x - x + 1 = 0.$$

Из чертежа 201, на котором представлены графики функций $y = \sin x$ и $y = x - 1$, видно что корень данного уравнения находится в интервале $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Вычислив значения непрерывной функции $f(x) = \sin x - x + 1$ в точках $\frac{\pi}{2}$ и π , получим числа, противоположные по знаку.

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 - \frac{\pi}{2} > 0 \quad \text{и} \quad f(\pi) = -\pi + 1 < 0.$$

Вычислив значение функции $f(x)$ в середине интервала $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, получим отрицательный результат:

$$f\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{4}\pi + 1 = -0.64 < 0.$$

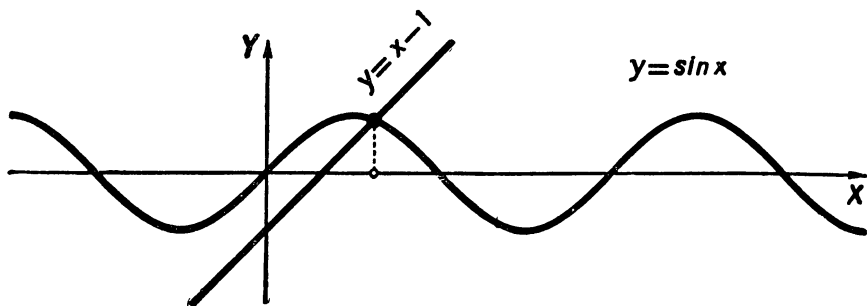
Следовательно, искомый корень содержится в интервале $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi\right)$. Вы-

числив значение функции в промежуточной точке $x = \frac{2}{3}\pi$, получим положительный результат:

$$f\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{3} + 1 > 0.$$

Следовательно, искомый корень содержится в интервале $\left(\frac{2}{3}\pi, \frac{3}{4}\pi\right)$.

Продолжая вычисление промежуточных значений, можно найти как угодно малый интервал, содержащий искомый корень, и вычислить этот корень с любой данной степенью точности.



Черт. 201

2. Рассмотрим уравнение $\operatorname{tg} x = x$. В силу нечетности данных функций представляет интерес отыскание лишь положительных корней. Как показывает черт. 202 уравнение имеет бесконечное множество положительных корней. В интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ корней нет, ибо $x < \operatorname{tg} x$; первый положительный корень содержится в интервале $\left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$, второй — в интервале $\left(2\pi, \frac{5}{2}\pi\right)$, третий — в интервале $\left(3\pi, \frac{7}{2}\pi\right)$ и т. д.; k -й корень содержится в интервале $\left(k\pi, \frac{2k+1}{2}\pi\right)$, причем по крайней мере увеличения k корень приближается к $\frac{2k+1}{2}\pi$.

Вычислим приближенно с точностью до 0,1 наименьший положительный корень. Заменяем данное уравнение эквивалентным уравнением

$$\sin x - x \cos x = 0,$$

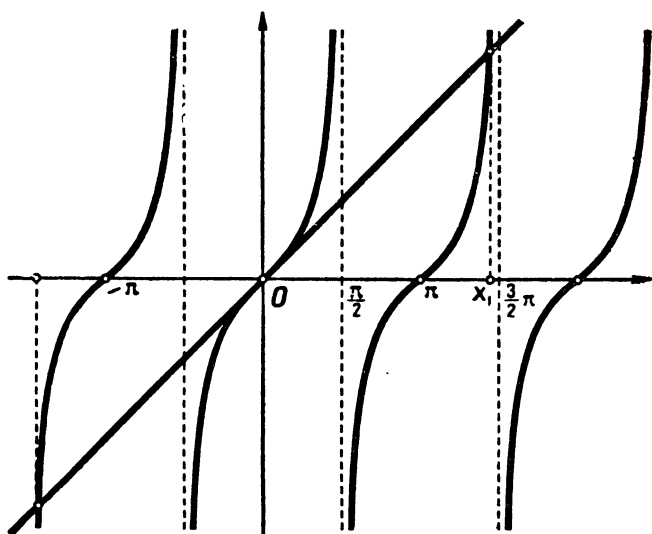
левая часть которого не имеет разрыва на сегменте $\left[\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$. Положим

$f(x) = \sin x - x \cos x$. В точке $\frac{5}{4}\pi = 3,9250$ ($=225^\circ$)* (т. е. в середине сегмента), имеем:

$$f\left(\frac{5}{4}\pi\right) = \sin(225^\circ)(1 - 3,9250) = 2,068 > 0.$$

* В скобках даны значения аргументов тригонометрических функций в градусах лишь потому, что распространенные тригонометрические таблицы составлены в градусной мере.

Так как $f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1 < 0$, то искомый корень содержится в интервале $\left(\frac{5}{4}\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$.



Черт. 202

Вычисляем поправку при линейной интерполяции (положив $a = \frac{5}{4}\pi$, $b = \frac{3}{2}\pi$):

$$\Delta x = -\frac{\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{5}{4}\pi\right) f\left(\frac{5}{4}\pi\right)}{f\left(\frac{3}{2}\pi\right) - f\left(\frac{5}{4}\pi\right)} = \frac{\frac{\pi}{4} \cdot 2,068}{1 + 2,068} = 0,5292 (= 30^\circ 19').$$

Следовательно, $x_1 = \frac{5}{4}\pi + \Delta x = 4,4542 (= 255^\circ 19')$ Вычислим $f(x_1)$; имеем.

$$\begin{aligned} f(x_1) &= \sin 255^\circ 19' - 4,4542 \cos (255^\circ 19') = \\ &= -\cos 14^\circ 41' + 4,4542 \sin 14^\circ 41' = 0,161 > 0. \end{aligned}$$

Так как $f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1$, а $f(4,4542) = 0,161$, то искомый корень лежит в интервале $\left(4,45; \frac{3}{2}\pi\right)$. Значение $f(4,4542)$ близко к нулю, поэтому естественно ожидать, что искомый корень ближе к 4,45, чем к $\frac{3}{2}\pi = 4,71$. Предлагаем читателю проверить, что $f(4,5) < 0$. Искомый корень ξ содержится между 4,45 и 4,50. Более точные вычисления дают $\xi = 4,4934\dots$



ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР;
ПРИМЕНЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИИ

§ 57. Общие понятия

В геометрии рассматриваются различные элементы геометрических фигур, как, например:

в планиметрии — стороны, углы (внутренние и внешние), площадь, периметр данного многоугольника, высоты, медианы, биссектрисы, радиус вписанного круга данного треугольника и т. п.;

в стереометрии — ребра, грани, двугранные и линейные углы данного многогранника и т. п.

Тригонометрия изучает различные задачи на вычисление значений искомых элементов геометрической фигуры по достаточному количеству значений заданных элементов этой фигуры.

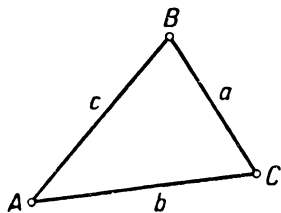
Для краткости в тригонометрии принято (в случаях, когда это не может повлечь недоразумений) сам элемент фигуры и его меру (численное значение) называть одним и тем же термином. Так, например, слово «сторона» может означать как сам геометрический элемент (т. е. отрезок), так и его длину; термин «боковая поверхность» может означать как саму поверхность, так и ее площадь, и т. п.

Наиболее подробно в тригонометрии изучается «решение треугольников», т. е. *вычисление различных элементов треугольника по достаточному количеству данных его элементов*. Это обусловлено тем, что вычисление элементов более сложных фигур (плоских и пространственных) обычно сводится к вычислению элементов цепи треугольников, дающей возможность последовательно перейти от данных элементов к искомому.

Определение. *Стороны и углы треугольника называются его основными элементами.*

Различные прочие элементы треугольника будем называть его неосновными элементами.

Если A, B, C — вершины данного треугольника, то принято теми же буквами A, B, C обозначать его углы (а также их величины), имеющие вершинами эти точки, строчными буквами a, b, c обозначать стороны (а также их длины), противолежащие углам, обозначенным теми же прописными буквами (черт. 203).



Черт. 203

Допустимые значения основных элементов треугольника определяются следующими условиями:

1°. Углы A, B и C всякого треугольника C положительны и (в евклидовой геометрии) в сумме составляют π :

$$A > 0, \quad B > 0, \quad C > 0; \quad A + B + C = \pi.$$

2°. Всякая сторона треугольника меньше суммы двух его других сторон.

§ 58. Сотношения между основными элементами треугольника

I. Теорема синусов. Во всяком треугольнике стороны пропорциональны синусам противолежащих углов.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

где R — радиус круга, описанного около данного треугольника.

Доказательство. Пусть A — произвольный угол треугольника; для доказательства достаточно установить справедливость равенства

$$a = 2R \sin A. \quad (1)$$

С л у ч а й 1°. Угол A — острый (черт. 204). Через одну из вершин, отличную от A , например через B , проведем диаметр BA' описанного круга. Рассмотрим вспомогательный треугольник $A'BC$. В этом треугольнике угол A' равен углу A , так как оба эти угла опираются на одну и ту же дугу BC . Из прямоугольного треугольника $A'BC$ найдем равенства (1).

С л у ч а й 2°. Угол A — тупой (черт. 205). Выполним то же построение. В этом случае угол A' опирается на дугу BAC , дополнительную до 2π по отношению к дуге, на которую опирается угол A . Следовательно, $A' = \pi - A$. Из треугольника $A'BC$ найдем:

$$a = 2R \sin A' = 2R \sin A.$$

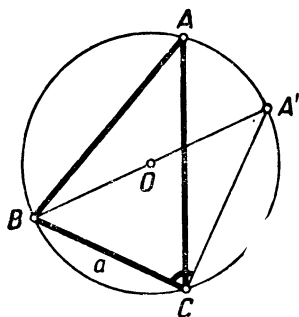
С л у ч а й 3°. Угол A — прямой (черт. 206). Из треугольника ABC найдем непосредственно:

$$a = 2R = 2R \sin \frac{\pi}{2} = 2R \sin A.$$

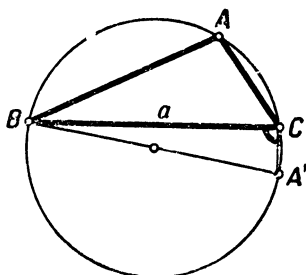
Систему равенств

$$\left. \begin{aligned} \frac{a}{\sin A} &= \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \\ A + B + C &= \pi \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

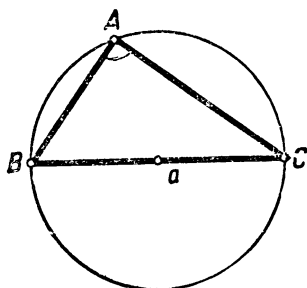
будем называть основной системой соотношений между элементами треугольника.



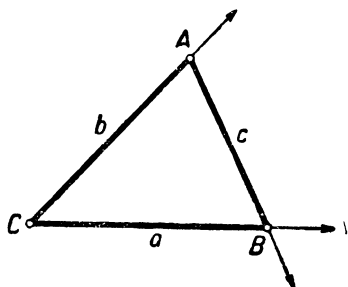
Черт. 204



Черт. 205



Черт. 206



Черт. 207

II. Теорема проекций. Для всякого треугольника имеет место система соотношений

$$\left. \begin{aligned} a &= b \cos C + c \cos B \\ b &= c \cos A + a \cos C \\ c &= a \cos B + b \cos A \end{aligned} \right\}. \quad (II)$$

Доказательство. Пусть ABC — данный треугольник; проекция ломаной CAB на ее замыкающую CB равна CB , т. е. a . Итак (черт. 207):

$$\text{пр } CAB = \text{пр } CA + \text{пр } AB = b \cos C + c \cos B = a.$$

Аналогично устанавливаются два прочие соотношения системы (II), ч. т. д.

III. Теорема косинусов. Для всякого треугольника имеет место система соотношений

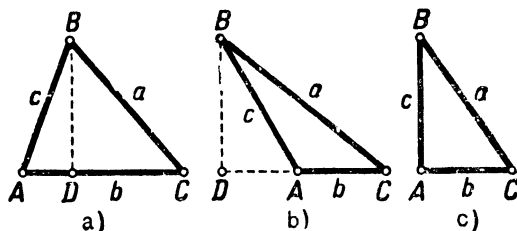
$$\left. \begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A; \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos B; \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III})$$

Доказательство. Из геометрии известно, что (черт. 208)

а) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bAD$, если $A < \frac{\pi}{2}$;

б) $a^2 = b^2 + c^2 + 2bDA$, если $A > \frac{\pi}{2}$;

с) $a^2 = b^2 + c^2$, если $A = \frac{\pi}{2}$.



Черт. 208

Эти три равенства можно объединить в одно, заметив, что $AD = \text{пр}_{AC} AB$:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot \text{пр}_{AC} AB$$

(в случае б) $\text{пр}_{AC} AB < 0$). Приняв во внимание, что $\text{пр}_{AC} AB = c \cos A$, получим первое равенство (III). Аналогично устанавливаются прочие равенства, ч. т. д.

Теорема. Если система шести чисел a, b, c, A, B, C удовлетворяет условиям:

1) $a > 0, b > 0, c > 0$;

2) $0 < A < \pi, 0 < B < \pi, 0 < C < \pi$

и если для нее выполняется какая-либо одна из систем соотношений (I), (II) и (III), то для нее выполняются и две другие системы этих соотношений.

Р а з ъ я с н е н и е. Если углы измеряются не в радианной мере, то вместо π должна быть взята соответствующая мера развернутого угла. В частности, при градусной мере неравенства 2) запишутся так:

$$0^\circ < A < 180^\circ; \quad 0^\circ < B < 180^\circ; \quad 0^\circ < C < 180^\circ.$$

Таким образом, теорема утверждает, что системы (I), (II) (III) эквивалентны между собой. Если принять за основу какую-либо одну из этих систем, то две другие можно получить как ее следствия.

Доказательство. 1°. Докажем, что из системы (I) следуют системы (II) и (III). В самом деле, имеем:

$$A = \pi - B - C,$$

откуда

$$\sin A = \sin B \cos C + \cos B \sin C. \quad (I)$$

Обозначив через $2R$ коэффициент пропорциональности (вне зависимости от его геометрического смысла для равных отношений системы (I), получим:

$$a = 2R \sin A, \quad b = 2R \sin B, \quad c = 2R \sin C,$$

умножив обе части (I) на $2R$, получим первое соотношение (II), аналогично получаются прочие соотношения (II).

Возведем почленно в квадрат равенство (I) и выполним следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \sin^2 A &= \sin^2 B \cos^2 C + \cos^2 B \sin^2 C + 2 \sin B \sin C \cos B \cos C = \\ &= \sin^2 B (1 - \sin^2 C) + (1 - \sin^2 B) \sin^2 C + 2 \sin B \sin C \cos B \cos C = \\ &= \sin^2 B + \sin^2 C + 2 \sin B \sin C (\cos B \cos C - \sin B \sin C) = \\ &= \sin^2 B + \sin^2 C + 2 \sin B \sin C \cos (B + C). \end{aligned}$$

Приняв во внимание, что $B + C = \pi - A$, получим окончательно:

$$\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2 \sin B \sin C \cos A.$$

Умножив обе части на $(2R)^2$, получим первое равенство системы (III). Аналогично устанавливаются прочие равенства системы (III).

2°. Докажем, что из системы (II) следуют системы (I) и (III).

Исключим c из равенств (II): умножим первое из этих равенств на a , второе — на b и вычтем почленно, тогда получим:

$$a^2 - b^2 = c(a \cos B - b \cos A).$$

Подставив c из третьего равенства, получим:

$$a^2 - b^2 = a^2 \cos^2 B - b^2 \cos^2 A,$$

откуда

$$a^2 \sin^2 B = b^2 \sin^2 A; \quad a \sin B = b \sin A$$

(так как a , $b \sin A$ и $\sin B$ положительны), а потому

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}.$$

Так же доказываются равенства

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}; \quad \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Остается доказать, что $A + B + C = \pi$.

Заменяя в первом равенстве (II), линейном однородном относительно a , b и c , эти числа пропорциональными им числами $\sin A$, $\sin B$ и $\sin C$, получим:

$$\sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B,$$

откуда

$$\sin A = \sin(B + C).$$

Приняв во внимание, что $0 < A < \pi$ и $0 < B + C < 2\pi$, получим:

а) либо $A = B + C$, либо $A + B + C = \pi$.

Допустим, что

$$A + B + C \neq \pi,$$

тогда

$$A = B + C.$$

Воспользуемся вторым и третьим равенством (II). Взяв для определенности второе равенство, получим аналогично

$$\sin B = \sin(A + C),$$

и так как по предположению

$$A + B + C \neq \pi,$$

то

$$B = A + C.$$

Из системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} A &= B + C, \\ B &= A + C \end{aligned} \right\}$$

следует $C = 0$, что противоречит условию $C > 0$. Итак, предположение, что $A + B + C \neq \pi$ ведет к противоречию, а потому $A + B + C = \pi$.

Следовательно, если выполняются соотношения (II), то выполняются все соотношения системы (I), т. е. система (I) есть следствие системы (II).

Так как (по доказанному) из системы (II) вытекает система (I), а из системы (I) вытекает система (III), то система (III) есть следствие системы (II).

П р и м е ч а н и е. Это нетрудно обнаружить непосредственно.

Умножив равенства (II) соответственно на a , b , $-c$ и сложив почленно, получим:

$$a^2 + b^2 - c^2 = (ab \cos C + ac \cos B) + (bc \cos A + ba \cos C) - \\ - (ca \cos B + cb \cos A) = 2ab \cos C,$$

откуда

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Аналогично выведем остальные равенства системы (III)

3°. Докажем, что из системы (III) следуют системы (I) и (II).

Сложив два первые равенства системы (III), после сокращения получим третье равенство системы (II); аналогично получатся остальные равенства.

Так как из системы (III) следует (II), а из системы (II) следует I), то из системы (III) следует система (I).

П р и м е ч а н и е. Равенства (I) можно вывести из равенств (III) непосредственно.

В самом деле, из первого равенства (III) найдем

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)^2} = a \cdot K,$$

где

$$K = \frac{1}{2abc} \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)},$$

так как множитель K есть симметрическая функция аргументов a , b , c , то

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = K.$$

Сложив последние два равенства (III) и заменив a , b , c пропорциональными им числами $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$, получим

$$\sin A = \sin(B + C).$$

Доказательство заканчивается так же, как в пункте 2°.

В пунктах 1°, 2°, 3° рассмотрены все случаи возможные согласно условию теоремы, ч. т. д.

Теорема. Если для шести величин a , b , c , A , B , C , удовлетворяющих условиям:

$$1^\circ. a > 0, b > 0, c > 0;$$

$$2^\circ. 0 < A < \pi, 0 < B < \pi, 0 < C < \pi,$$

выполняется какая-либо одна из систем соотношений (I), (II), (III), то существует единственный треугольник, стороны которого суть a , b , c , а противолежащие им углы A , B , C (соответственно).

Р а з ъ я с н е н и е: конгруэнтные, но различно расположенные треугольники не считаются различными.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если выполняется одна из систем (I), (II), (III), то в силу эквивалентности этих систем выполняются и две другие. Из первого равенства системы (II) имеем:

$$a \leq b |\cos C| + c |\cos B| < b + c.$$

Из двух других равенств этой системы получим:

$$b < c + a, \quad c < a + b.$$

Следовательно, числа a , b и c таковы, что любое число из них меньше суммы двух других. Из геометрии известно, что при этом условии существует единственный треугольник, стороны которого выражаются числами a , b и c . Пусть A' , B' и C' — углы полученного треугольника, противолежащие его сторонам a , b и c (соответственно). В таком случае из системы соотношений (III), которая имеет место для всякого треугольника, найдем (в частности) для треугольника $A'B'C'$

$$A' = \arccos \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

По условию для чисел a , b , c , A , B , C выполняется система соотношений (III), из которой найдем

$$A = \arccos \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Следовательно, $A = A'$; аналогично найдем $B = B'$, $C = C'$. Треугольник ABC есть искомый, ч. т. д.

Системы основных соотношений могут служить для вычисления основных элементов треугольника по трем данным его основным элементам (из которых хотя бы один элемент — сторона, см. ниже § 64).

§ 59. Тригонометрические тождества и неравенства, имеющие место для углов треугольника

В настоящем параграфе приводятся некоторые тригонометрические соотношения (равенства и неравенства), выполняющиеся тождественно для углов произвольного (в общем случае) треугольника.

Доказанные ниже равенства имеют место при более общих предположениях: они выполняются для произвольной (допустимой) системы трех углов A , B , C , составляющих в сумме π :

$$A + B + C = \pi.$$

В частности, эти тождества справедливы, если A , B и C суть углы треугольника. Условные тригонометрические тождества приме-

няются в различных преобразованиях формул, содержащих тригонометрические функции от углов треугольника *.

1. Из соотношения $A = \pi - (B + C)$ на основании формул приведения следуют тождества:

$$\begin{aligned}\sin A &= \sin(B + C), & \cos A &= -\cos(B + C), \\ \operatorname{tg} A &= -\operatorname{tg}(B + C).\end{aligned}\quad (1)$$

При помощи круговой перестановки аргументов A, B и C устанавливаются еще шесть аналогичных формул.

2. Из соотношения $\frac{A}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{B+C}{2}$ следуют тождества:

$$\sin \frac{A}{2} = \cos \frac{B+C}{2}, \quad \cos \frac{A}{2} = \sin \frac{B+C}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \operatorname{ctg} \frac{B+C}{2}. \quad (2)$$

При помощи круговой перестановки аргументов устанавливаются еще шесть аналогичных формул.

3. Для углов косоугольного треугольника:

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C. \quad (3)$$

Доказательство.

$$\operatorname{tg}(A + B + C) = \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C}{1 - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B - \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C - \operatorname{tg} C \operatorname{tg} A} = 0,$$

откуда следует (3), ч. т. д.

$$4. \quad \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 1. \quad (4)$$

Доказательство. Так как $\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2}$, то

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right) &= \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \left(1 - \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} - \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} - \operatorname{tg} \frac{C}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2}\right) = 0,\end{aligned}$$

откуда следует тождество (4), ч. т. д.

$$\begin{aligned}5. \quad \sin A + \sin B + \sin C &= 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = \\ &= 4 \sin \frac{B+C}{2} \sin \frac{C+A}{2} \sin \frac{A+B}{2}.\end{aligned}\quad (5)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\sin A + \sin B + \sin C &= \sin A + \sin B + \sin(A + B) = \\ &= 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A+B}{2} = \\ &= 2 \sin \frac{A+B}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} \right) = 4 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}.\end{aligned}$$

* Приводимая ниже сводка формул может служить для справок. Запоминать все эти формулы не следует.

Для получения тождества (5) достаточно воспользоваться равенствами (2), ч. т. д.

$$6. \quad \cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}. \quad (6)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \cos A + \cos B + \cos C &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + \left(1 - 2 \sin^2 \frac{C}{2}\right) = \\ &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \left[\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2} \right] + 1 = \\ &= 4 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} + 1, \end{aligned}$$

откуда в силу (2) следует тождество (6), ч. т. д.

Аналогично доказываются следующие тождества:

$$7. \quad \sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}. \quad (7)$$

$$8. \quad \cos A + \cos B - \cos C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} - 1. \quad (8)$$

$$9. \quad \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$$

(воспользоваться тождеством $2A + 2B + 2C = 4\pi$). (9)

$$10. \quad \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4 \cos A \cos B \cos C. \quad (10)$$

$$11. \quad \sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C = 2 \sin A \sin B \cos C$$

(см. предыдущий параграф, стр. 364). (11)

$$12. \quad \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2(1 + \cos A \cos B \cos C). \quad (12)$$

Доказательство. Достаточно выразить левую часть через функции от двойного аргумента и воспользоваться формулой (10).

$$13. \quad \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C. \quad (13)$$

$$\begin{aligned} 14. \quad \sin A \cos B \cos C + \sin B \cos A \cos C + \sin C \cos A \cos B = \\ = \sin A \sin B \sin C. \end{aligned} \quad (14)$$

Доказательство. Достаточно воспользоваться условием

$$\sin(A + B + C) = 0.$$

$$\begin{aligned} 15. \quad \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + \\ + \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Доказательство. Достаточно воспользоваться условием

$$\cos \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} \right) = 0.$$

Ниже приводятся некоторые тригонометрические неравенства, имеющие место для углов треугольника.

$$16. \quad \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} \geqslant 1. \quad (16)$$

Воспользуемся тождеством (4) и неравенством Буняковского (см. «Специальный курс элементарной алгебры», § 58):

$$\begin{aligned} 1 &= \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2} \leqslant \\ &\leqslant \sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2}} \sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}} = \\ &= \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2}; \end{aligned}$$

ч. т. д.

$$17. \quad \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leqslant \frac{1}{8}. \quad (17)$$

Доказательство. Обозначим буквой k левую часть доказываемого равенства; будем иметь:

$$\begin{aligned} k &= \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2} \right) \sin \frac{C}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} - \sin \frac{C}{2} \right) \sin \frac{C}{2}. \end{aligned}$$

Положив $x = \sin \frac{C}{2}$, получим следующее квадратное уравнение:

$$x^2 - x \cos \frac{A-B}{2} + 2k = 0.$$

Так как корни этого уравнения должны быть действительны, то

$$\Delta = \cos^2 \frac{A-B}{2} - 8k \geqslant 0,$$

откуда:

$$k \leqslant \frac{1}{8} \cos^2 \frac{A-B}{2} \leqslant \frac{1}{8},$$

ч. т. д.

$$18. \quad \cos A + \cos B + \cos C \leqslant \frac{3}{2}. \quad (18)$$

Доказательство. Воспользовавшись тождеством (6) и неравенством (17), получим:

$$\cos A + \cos B + \cos C \leqslant 1 + 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2};$$

ч. т. д.

$$19. \quad \sin A + \sin B + \sin C \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}. \quad (19)$$

Доказательство. Воспользовавшись теоремой о выпуклых функциях (см. «Специальный курс элементарной алгебры», § 58), получим:

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq 3 \sin \frac{A+B+C}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

ч. т. д.

$$20. \quad \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}. \quad (20)$$

Доказательство. Достаточно воспользоваться тождеством (5) и неравенством (19).

$$21. \quad \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}. \quad (21)$$

Доказательство. При данной сумме

$$\operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 1$$

произведение

$$\left(\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \right) \left(\operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} \right) \left(\operatorname{tg} \frac{C}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2} \right) = \left(\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} \right)^2$$

имеет наибольшее значение, если

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \operatorname{tg} \frac{C}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2},$$

откуда $A = B = C = \frac{\pi}{3}$. Для равностороннего треугольника имеет место равенство

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Для всякого неравностороннего треугольника имеет место неравенство, ч. т. д.

22. Доказать, что

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \begin{cases} > 2, \text{ если треугольник} \\ & \text{остроугольный,} \\ < 2, \text{ если треугольник} \\ & \text{тупоугольный,} \\ = 2, \text{ если треугольник} \\ & \text{прямоугольный.} \end{cases} \quad (22)$$

Доказательство. В силу тождества (12)

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - 2 = 2 \cos A \cos B \cos C.$$

Для остроугольного треугольника правая часть последнего тождества положительна, для тупоугольного треугольника — отри-

цательна (один из косинусов отрицателен), а для прямоугольного треугольника — равна нулю, это утверждение равносильно доказываемому, ч. т. д.

§ 60. Элементы различных измерений

Определение. *Выражение*

$$F(a, b, c, A, B, C),$$

составленное из основных элементов треугольника, называется элементом n -го измерения, если оно является положительно-однородной функцией n -го измерения от аргументов a , b и c .

Иными словами, при замене аргументов a , b и c числами ka , kb , kc выражение умножится на k^n :

$$F(ka, kb, kc, A, B, C) = k^n F(a, b, c, A, B, C),$$

где k — произвольное положительное число.

В частности, элементы нулевого измерения называются *угловыми элементами*. Элементы первого измерения называются *линейными элементами*.

При растяжении сторон треугольника в k раз их длины a , b , c заменяются числами ka , kb , kc , а сам треугольник подвергается преобразованию подобия с коэффициентом k . При таком преобразовании всякий элемент n -го измерения изменяется в k^n раз.

При преобразовании подобия треугольника его угловые элементы не меняются (в этом случае $n = 0$ и $k^n = 1$): если F — угловой элемент, то

$$F(a, b, c, A, B, C) = F(ka, kb, kc, A, B, C).$$

Примерами угловых элементов могут служить углы треугольника A , B , C , их тригонометрические функции, выражение $\frac{a+b}{a-b}$ и т. п.

При преобразовании подобия треугольника каждый из его линейных элементов изменяется в k раз (в этом случае $n = 1$ и $k^n = k$): если F — линейный элемент, то

$$F(ka, kb, kc, A, B, C) = kF(a, b, c, A, B, C).$$

Примерами линейных элементов могут служить стороны, биссектрисы, медианы, высоты треугольника, радиусы вписанного и описанного кругов, периметр.

Примером элемента второго измерения может служить площадь треугольника, она изменяется в k^2 раз при преобразовании подобия с коэффициентом k .

Теорема. *Элемент U является угловым в том и только в том случае, если он может быть выражен посредством формулы, содержащей только лишь углы треугольника.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если элемент U может быть выражен формулой

$$U = F(A, B, C),$$

не содержащей сторон, то при замене сторон a, b, c числами ka, kb, kc он не меняется, значит, U есть угловой элемент.

Обратно, если $U = F(a, b, c, A, B, C)$ есть угловой элемент, то (по условию) он не изменяется, если в нем a, b и c заменить пропорциональными числами:

$$\sin A = \frac{a}{2R}; \quad \sin B = \frac{b}{2R}; \quad \sin C = \frac{c}{2R},$$

положив $k = \frac{1}{2R}$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} F(a, b, c, A, B, C) &= F\left(\frac{a}{2R}, \frac{b}{2R}, \frac{c}{2R}, A, B, C\right) = \\ &= F(\sin A, \sin B, \sin C, A, B, C), \end{aligned} \quad \text{ч. т. д.}$$

Так, например,

$$\frac{2p}{a} = \frac{2(\sin A + \sin B + \sin C)}{\sin A}$$

(где p — полупериметр) есть угловой элемент.

Теорема. *Отношение двух элементов одного и того же измерения есть угловой элемент.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если

$$F_1(a, b, c, A, B, C) \quad \text{и} \quad F_2(a, b, c, A, B, C)$$

— два элемента измерения n , то их отношение не изменяется при преобразовании подобия треугольника

$$\begin{aligned} \frac{F_1(ka, kb, kc, A, B, C)}{F_2(ka, kb, kc, A, B, C)} &= \frac{k^n F_1(a, b, c, A, B, C)}{k^n F_2(a, b, c, A, B, C)} = \\ &= \frac{F_1(a, b, c, A, B, C)}{F_2(a, b, c, A, B, C)}. \end{aligned}$$

Следовательно, это отношение есть угловой элемент, ч. т. д.

С л е д с т в и е. В частности, *отношение двух линейных элементов есть угловой элемент.*

Пусть $L = L(a, b, c, A, B, C)$ — некоторый линейный элемент треугольника. Заменим a, b и c на $2R \sin A, 2R \sin B$ и $2R \sin C$. Если вынести множитель $2R$, то получим:

$$L(a, b, c, A, B, C) = 2R \cdot L(\sin A, \sin B, \sin C, A, B, C). \quad (1)$$

Выражение $L(\sin A, \sin B, \sin C, A, B, C)$ есть угловой элемент.

О п р е д е л е н и е. Угловой элемент $L(\sin A, \sin B, \sin C, A, B, C)$ называется *угловым элементом, соответствующим линейному элементу $L(a, b, c, A, B, C)$, и обозначается символом $U(L)$.*

В силу равенства (1) имеем:

$$L = 2R \cdot U(L). \quad (2)$$

Так, например, угловой элемент, соответствующий периметру треугольника $2p = a + b + c$, есть

$$U(2p) = \sin A + \sin B + \sin C.$$

Угловой элемент, соответствующий сумме сторон $a + b$, есть

$$U(a + b) = \sin A + \sin B.$$

Если F есть элемент порядка $n \neq 1$, то $F^{\frac{1}{n}}$ есть линейный элемент.

Угловой элемент, соответствующий F , определяется как угловой элемент $U\left(F^{\frac{1}{n}}\right)$ линейного элемента $F^{\frac{1}{n}}$.

§ 61. Соотношения между различными элементами треугольника

I. Теорема тангенсов. Разность двух сторон треугольника относится к их сумме, как тангенс полуразности противолежащих углов к тангенсу полусуммы этих углов

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}}$$

(две аналогичные формулы получатся посредством круговой перестановки букв в обеих частях).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Преобразуем угловые элементы, соответствующие полусумме и полуразности сторон треугольника:

$$a + b = 2R (\sin A + \sin B) = 4R \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2};$$

$$a - b = 2R (\sin A - \sin B) = 4R \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2},$$

откуда следует теорема тангенсов, ч. т. д.

Г е о м е т р и ч е с к о е д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим для определенности, что $a > b$. На чертеже 209 построены отрезки $BD = a + b$ и $BK = a - b$.

Имеем: $\angle ACD = \pi - C$;

$$\angle ADC = \angle DAC = \frac{\pi - (\pi - C)}{2} = \frac{C}{2};$$

$$\angle CAK = \angle CKA = \frac{\pi - C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2};$$

$$\angle KAB = A - \frac{\pi}{2} + \frac{C}{2} = \frac{A-B}{2}.$$

Проведем отрезок KL , параллельный AD . Треугольники DAK и AKL — прямоугольные. Из подобия треугольников DAB и LKB имеем:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{BK}{DB} = \frac{KL}{AD} = \frac{AK \operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}{AK \operatorname{tg} \frac{C}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}}.$$

II. Ф о р м у л ы М о л ь в е й д е. Сумма (разность) двух сторон треугольника относится к третьей стороне, как косинус (синус) полуразности противолежащих им углов относится к синусу (косинусу) половины угла, противолежащего третьей стороне, т. е.

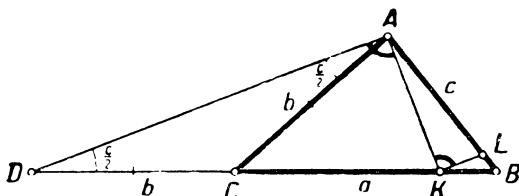
$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{C}{2}}; \quad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{C}{2}}.$$

Доказательство. Приняв во внимание, что

$$a+b = 4R \cos \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}, \quad a-b = 4R \sin \frac{C}{2} \sin \frac{A-B}{2},$$

$$c = 4R \cos \frac{C}{2} \sin \frac{C}{2},$$

получим доказываемые формулы, ч. т. д.



Черт. 209

Геометрическое доказательство. Воспользуемся чертежом 209. Применив теорему синусов к треугольнику ADB , получим:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\sin \left(A + \frac{C}{2} \right)}{\sin \frac{C}{2}} = \frac{\sin \left(A + \frac{\pi - A - B}{2} \right)}{\sin \frac{C}{2}} = \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{C}{2}}.$$

Вторую формулу получим, применив теорему синусов к треугольнику KAB .

III. Ф о р м у л ы, выражающие тригонометрические функции углов треугольника через его стороны.

Из формулы косинусов (§ 58, соотношения III) можно выразить косинусы углов треугольника через его стороны:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}. \quad (1)$$

Из формулы (1) получим:

$$\begin{aligned} \cos \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}} = \sqrt{\frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{4bc}} = \\ &= \sqrt{\frac{(b + c + a)(b + c - a)}{4bc}}. \end{aligned}$$

Обозначив через $2p = a + b + c$ периметр треугольника, получим:

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}.$$

Посредством аналогичных преобразований получим:

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},$$

и, наконец,

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = \frac{1}{p-a} \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

Прочие шесть формул могут быть выведены из этих круговой перестановкой букв.

Множитель $r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$ есть симметрическая функция от аргументов a , b и c , а потому:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{p-a}, \quad \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{r}{p-b}, \quad \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{r}{p-c}$$

(множитель r один и тот же).

IV. Формулы, выражающие различные элементы треугольника через его основные элементы.

Периметр. Имеем:

$$\begin{aligned} 2p = a + b + c &= 2R(\sin A + \sin B + \sin C) = \\ &= 8R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \end{aligned}$$

(см. формулу 5, § 59).

Угловой элемент, соответствующий периметру, есть

$$U(2p) = \sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

В ы с о т ы. Пусть $AN = h_a$ — высота, опущенная из вершины A на сторону a . Из треугольника BAH найдем:

$h_a = c \sin B$ — в случае острого угла (черт. 210);

$h_a = c \sin(\pi - B) = c \sin B$ — в случае тупого угла (черт. 211 а);

$h_a = c = c \sin \frac{\pi}{2} = c \sin B$ — в случае прямого угла (черт. 211 б).

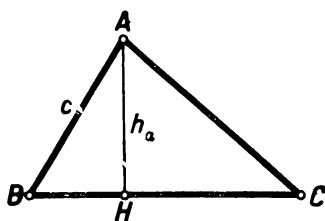
Итак, независимо от величины угла B имеем:

$$h_a = c \sin B.$$

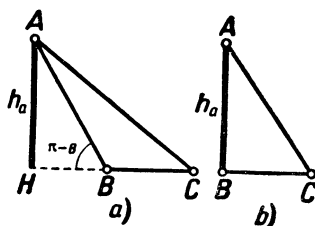
Точно так же из треугольника CAH получим $h_a = b \sin C$.

Итак;

$$h_a = c \sin B = b \sin C = 2R \sin B \sin C.$$



Черт. 210



Черт. 211

Угловой элемент высоты h_a равен

$$U(h_a) = \sin B \sin C.$$

Формулы для других высот получатся круговой перестановкой букв.

П л о щ а д ь. Теорема. Площадь треугольника равна половине произведения двух смежных сторон треугольника на синус угла между ними:

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть h_b — высота, опущенная на сторону b ; имеем: $h_b = a \sin C$, следовательно,

$$S = \frac{1}{2} b h_b = \frac{1}{2} ab \sin C.$$

Аналогично находятся два другие выражения для площади, ч. т. д.

Площадь есть элемент второго измерения, $\sqrt{S}$ есть линейный элемент; соответствующий угловой элемент находится по формуле

$$U(\sqrt{S}) = \sqrt{\frac{1}{2} \sin A \sin B \sin C}.$$

Известная из элементарной геометрии формула Г е р о н а

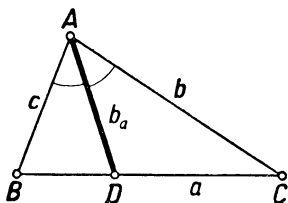
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

дает выражение площади треугольника через его стороны.

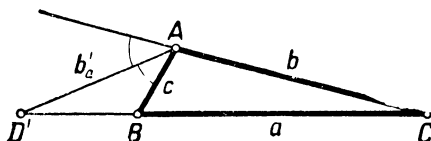
Б и с с е к т р и с ы. Пусть $AD = b_a$ — биссектриса угла A . Из треугольника BAD найдем (черт. 212):

$$\frac{b_a}{\sin B} = \frac{c}{\sin(\angle ADB)}; \quad (2)$$

$$\text{но } \angle ADB = \pi - B - \frac{A}{2} = \pi - B - \frac{\pi - (B + C)}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{B - C}{2}.$$



Черт. 212



Черт. 213

Из пропорции (2) найдем:

$$b_a = \frac{c \sin B}{\cos \frac{B - C}{2}}.$$

Угловой элемент биссектрисы b_a равен

$$U(b_a) = \frac{\sin B \sin C}{\cos \frac{B - C}{2}}.$$

Пусть b'_a — внешняя биссектриса угла, проходящая через вершину A . Если $B = C$, то b'_a не существует. Допустим, что $B > C$, тогда из треугольника $D'AB$ найдем (черт. 213):

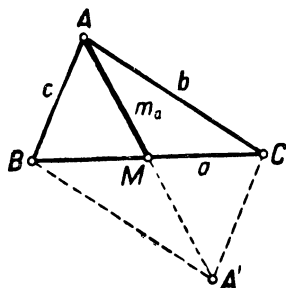
$$\frac{b'_a}{\sin(\pi - B)} = \frac{c}{\sin(\angle AD'B)},$$

но

$$\angle AD'B = \pi - (\pi - B) - \frac{B + C}{2} = \frac{B - C}{2}.$$

Следовательно (в общем случае),

$$b'_a = c \frac{\sin B}{\sin \frac{|B - C|}{2}} \quad \text{и} \quad U(b'_a) = \frac{\sin C \sin B}{\sin \frac{|B - C|}{2}}.$$



Черт. 214

М е д и а н ы. Пусть $AM = m_a$ — медиана треугольника, проведенная из вершины A (черт. 214).

Продолжим медиану m_a на расстояние MA' , равное MA . Четырехугольник $A'BAC$ есть параллелограмм. Сумма квадратов сторон равна сумме квадратов диагоналей, откуда

$$4m_a^2 + a^2 = 2b^2 + 2c^2$$

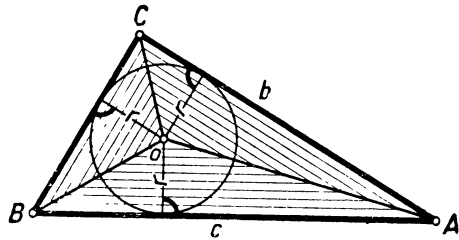
и, следовательно,

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

Угловой элемент медианы m_a равен

$$U(m_a) = \frac{1}{2} \sqrt{2 \sin^2 B + 2 \sin^2 C - \sin^2 A}.$$

Радиус вписанного круга. Пусть r — радиус круга, вписанного в треугольник ABC . Соединив центр вписанного круга с вершинами треугольника, разобьем ABC на три треугольника: OAB , OBC и OAC . Пусть S — площадь треугольника ABC ; имеем (черт. 215):



Черт. 215

$$S = \text{пл. } \triangle OAB + \text{пл. } \triangle OBC + \text{пл. } \triangle OAC = \frac{1}{2}rc + \frac{1}{2}ra + \frac{1}{2}rb = rp.$$

Итак, имеем:

$$r = \frac{S}{p}.$$

Воспользовавшись формулой Герона, получим:

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

Подставив выражения для S и p через углы треугольника получим:

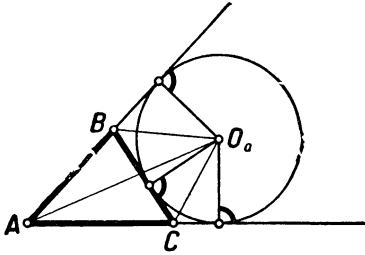
$$r = \frac{\frac{1}{2} \sin A \sin B \sin C}{2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} \cdot 2R = 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \cdot (2R).$$

Угловой элемент радиуса r равен

$$U(r) = 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

Примечание. В формулах, дающих выражение $\operatorname{tg} \frac{A}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{B}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{C}{2}$ через стороны треугольника (стр. 376), числитель r есть радиус вписанного круга.

Пусть r_a — радиус внеписанной окружности, касающейся стороны a . Из чертежа 216 найдем:



Черт. 216

$$\begin{aligned} S &= \text{пл. } ABO_a + \text{пл. } ACO_a - \text{пл. } BCO_a = \\ &= \frac{1}{2} cr_a + \frac{1}{2} br_a - \frac{1}{2} ar_a = \\ &= \frac{1}{2} r_a (b + c - a) = (p - a) r_a. \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned} r_a &= \frac{S}{(p - a)} = \\ &= \frac{1}{p - a} \sqrt{p(p - b)(p - a)(p - c)} = \\ &= \frac{p}{p - a} r. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} p &= 4R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}, \quad r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}, \\ p - a &= 2R \left(2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - \sin A \right) = \\ &= 4R \cos \frac{A}{2} \left(\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{A}{2} \right) = \\ &= 4R \cos \frac{A}{2} \left(\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - \cos \frac{B + C}{2} \right) = 4R \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}, \end{aligned}$$

то

$$r_a = 4R \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

и

$$U(r_a) = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

Примечание. Формулы для тангенсов половин углов треугольника можно преобразовать следующим образом:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{p - a} = \frac{r_a}{p}; \quad \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{r_b}{p}; \quad \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{r_c}{p}.$$

§ 62. Ряд равных отношений

Пусть L — произвольный линейный элемент треугольника ABC . По определению углового элемента, соответствующего L , имеем

$$L = 2R \cdot U(L) \quad \text{или} \quad \frac{L}{U(L)} = 2R.$$

Присоединим к основным элементам треугольника произвольные линейные элементы $L_1, L_2, \dots, L_k, \dots$ и соответствующие им угловые элементы $U(L_1), U(L_2), \dots, U(L_k)$, тогда можно составить соответствующий ряд равных отношений, связывающий основные

линейные и угловые элементы с элементами $L_1, L_2, \dots, L_k$ и их угловыми элементами:

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{L_1}{U(L_1)} = \frac{L_2}{U(L_2)} = \dots = \frac{L_k}{U(L_k)} = \dots$$

Если вводится в рассмотрение элемент F — измерения n , то в ряд равных отношений следует включить отношение $\frac{F^{\frac{1}{n}}}{U\left(F^{\frac{1}{n}}\right)}$.

Воспользуемся выражениями для различных угловых элементов, составленными в предыдущем параграфе:

$$U(2p) = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}; \quad U(\sqrt{S}) = \sqrt{\frac{1}{2} \sin A \sin B \sin C},$$

$$U(h_a) = \sin B \sin C, \quad U(b_a) = \frac{\sin B \sin C}{\cos \frac{B-C}{2}},$$

$$U(m_a) = \frac{1}{2} \sqrt{2 \sin^2 B + 2 \sin^2 C - \sin^2 A},$$

$$U(r) = 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

Включив в ряд равных отношений периметр, площадь, высоты, биссектрисы, медианы и радиус вписанного круга, получим

$$\begin{aligned} 2R &= \frac{a}{\sin A} = \frac{p}{2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{\frac{1}{2} \sin A \sin B \sin C}} = \\ &= \frac{h_a}{\sin B \sin C} = \frac{b_a}{\frac{\sin B \sin C}{\cos \frac{B-C}{2}}} = \frac{m_a}{\frac{1}{2} \sqrt{2 \sin^2 B + 2 \sin^2 C - \sin^2 A}} = \\ &= \frac{r}{2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = \dots \end{aligned}$$

В этом ряде содержатся также и все отношения, получающиеся из данных одновременной круговой перестановкой букв a, b, c и A, B, C . Так, например, вместе с отношением $\frac{h_a}{\sin B \sin C}$ в ряде равных отношений содержатся и следующие два отношения:

$$\frac{h_b}{\sin C \sin A} \quad \text{и} \quad \frac{h_c}{\sin A \sin B}.$$

Ряд равных отношений позволяет решать различные задачи на треугольники. Эти задачи могут носить весьма разнообразный характер, как, например: установление соотношений между различными элементами треугольника, определение вида треугольника при заданных соотношениях между его элементами, задачи на наибольшие и наименьшие значения и т. п.

Примеры

1. Доказать, что

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}.$$

Решение. Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} &= \frac{1}{2R} \left(\frac{1}{\sin B \sin C} + \frac{1}{\sin C \sin A} + \frac{1}{\sin A \sin B} \right) = \\ &= \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{2R \sin A \sin B \sin C} = \\ &= \frac{4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{16R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = \\ &= \frac{1}{4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

2. Доказать, что имеет место равенство отношений:

$$\frac{a}{\frac{1}{h_a}} = \frac{b}{\frac{1}{h_b}} = \frac{c}{\frac{1}{h_c}}.$$

Решение. Имеем:

$$a = 2R \sin A; \quad \frac{1}{h_a} = \frac{1}{2R \sin B \sin C}.$$

Отношение

$$\frac{a}{\frac{1}{h_a}} = 4R^2 \sin A \sin B \sin C$$

есть симметрическая функция от основных элементов, а потому для всех трех сторон это отношение одно и то же.

Примечание. Доказываемое равенство отношений следует также из равенств

$$h_a a = h_b b = h_c c = 2S.$$

3. Доказать, что для элементов треугольника справедливо тождество

$$\frac{a^2 \sin(B-C)}{\sin B + \sin C} + \frac{b^2 \sin(C-A)}{\sin C + \sin A} + \frac{c^2 \sin(A-B)}{\sin A + \sin B} = 0.$$

Решение. Слагаемые левой части получаются друг из друга одновременной круговой перестановкой аргументов a, b, c и A, B, C , поэтому преобразуем первое слагаемое.

$$\begin{aligned}\frac{a^2 \sin(B-C)}{\sin B + \sin C} &= \frac{4R^2 \sin^2 A \sin(B-C)}{2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}} = \\ &= 4R^2 \frac{\sin^2 A \sin \frac{B-C}{2} \cos \frac{B-C}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2}} = \\ &= 4R^2 \left(4 \sin^2 \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B-C}{2} \right) = 4R^2 [(1 - \cos A)(\cos C - \cos B)] = \\ &= 4R^2 [\cos C - \cos B - \cos A(\cos C - \cos B)].\end{aligned}$$

Выполнив последовательно круговую перестановку букв и сложив, получим тождественно нуль.

4. Вычислить углы равнобедренного треугольника, для которого отношение $\frac{r}{R}$ является наибольшим (наименьшим).

Решение. Пусть $B = C$; в этом случае $B = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}$.

Имеем:

$$\begin{aligned}\frac{r}{R} &= 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = 4 \sin \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2} = \\ &= 2 \sin \frac{A}{2} (1 - \cos B) = 2 \sin \frac{A}{2} \left(1 - \sin \frac{A}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} - \left(\sqrt{2} \sin \frac{A}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2.\end{aligned}$$

Отношение $\frac{r}{R}$ имеет наибольшее значение, если

$$\sqrt{2} \sin \frac{A}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0, \quad \text{откуда} \quad A = \frac{\pi}{3},$$

и, следовательно, $B = C = \frac{\pi}{3}$, искомый треугольник — равносторонний.

Выражение $\frac{1}{2} - \left(\sqrt{2} \sin \frac{A}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2$ на сегменте $[0, \pi]$, имеет наименьшее значение, равное 0 при $A = 0$. Это случай вырождения треугольника в отрезок.

5. Вычислить углы прямоугольного треугольника, стороны которого образуют арифметическую прогрессию.

Решение. Пусть A — меньший угол треугольника, а c — его гипотенуза. По условию стороны треугольника $c \sin A$, $c \cos A$ и c образуют арифметическую прогрессию, откуда получим тригонометрическое уравнение:

$$c \cos A = \frac{c \sin A + c}{2} \quad \text{или} \quad 2 \cos A - \sin A = 1.$$

Применив универсальную подстановку $t = \operatorname{tg} \frac{A}{2}$, получим:

$$3t^2 + 2t - 1 = 0.$$

Это уравнение имеет единственный положительный корень $t = \frac{1}{3}$, и следовательно, $\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{1}{3}$; угол B найдем из условия

$$\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{2} \right) = \frac{1}{2}.$$

Итак,

$$A = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{3}, \quad B = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{2}.$$

6. Вычислить отношение площади треугольника ABC к площади треугольника $A_1B_1C_1$, вершинами которого являются точки касания круга, вписанного в данный треугольник с его сторонами, зная отношение $\frac{r}{R}$.

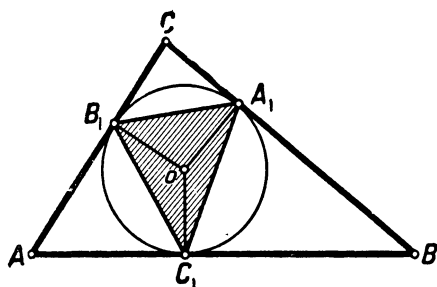
Решение. Пусть S и S_1 — площади треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Найдем выражение для элемента второго измерения S_1 . Имеем (черт. 217):

$$\begin{aligned} S_1 &= \text{пл. } \triangle OA_1B_1 + \text{пл. } \triangle OA_1C_1 + \text{пл. } \triangle OB_1C_1 = \\ &= \frac{1}{2} r^2 \sin(\pi - A) + \frac{1}{2} r^2 \sin(\pi - B) + \frac{1}{2} r^2 \sin(\pi - C) = \\ &= \frac{1}{2} r^2 (\sin A + \sin B + \sin C) = 2r^2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}. \end{aligned}$$

(§ 59, формула 5)

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{S_1}{S} &= \frac{2r^2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{2R^2 \sin A \sin B \sin C} = \\ &= \frac{r^2}{8R^2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = \\ &= \frac{r^2}{2R \left(4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \right)} = \\ &= \frac{r^2}{2R \cdot r} = \frac{r}{2R}. \end{aligned}$$



Черт. 217

7. Доказать, что

$$S = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}.$$

Решение. Имеем:

$$\begin{aligned} r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c &= 2^8 R^4 \left(\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \right) \left(\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \right) \times \\ &\times \left(\cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \right) \left(\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \right) = \\ &= 2^2 R^4 \sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C = S^2. \end{aligned}$$

Другое решение. Имеем:

$$\begin{aligned} r r_a r_b r_c &= r^4 \frac{p^3}{(p-a)(p-b)(p-c)} = & (\text{см. стр. 380}) \\ &= \frac{(p-a)^2 (p-b)^2 (p-c)^2}{p^2} \cdot \frac{p^3}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \\ &= p(p-a)(p-b)(p-c) = S^2. \end{aligned}$$

8. Доказать, что

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}.$$

Решение. Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} &= \\ &= \frac{1}{4R} \left(\frac{1}{\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} \right) = \\ &= \frac{\cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \cdot 4R} = \\ &= \frac{1}{4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = \frac{1}{r} \quad (\text{равенство 15, § 59}). \end{aligned}$$

Другое решение. Имеем:

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{p-a}{rp} + \frac{p-b}{rp} + \frac{p-c}{rp} = \frac{3p - (a+b+c)}{rp} = \frac{p}{rp} = \frac{1}{r}.$$

§ 63. Общий принцип Торопова решения треугольников

Принцип решения треугольников Торопова указывает о б щ и й п р и е м составления уравнений для вычисления иско- мых элементов треугольника по трем его данным элементам.

Из геометрии известно, что по заданным (допустимым) значениям двух углов треугольник определяется по форме, с точностью до подобия. Это значит, что всякие два треугольника с двумя соответственно равными углами подобны между собой. Если известны два угла треугольника, то из равенства $A + B + C = \pi$ определяется его третий угол; зная же углы треугольника, можно вычислить произвольный данный угловой элемент (как значение данной функции углов).

Рассмотрим следующую задачу: даны значения двух угловых элементов $U_1(A, B, C) = m_1$, $U_2(A, B, C) = m_2$; вычислить углы A, B, C треугольника.

Для нахождения искоемых углов составим следующую смешанную систему, состоящую из трех уравнений и трех неравенств:

$$\left. \begin{aligned} U_1(A, B, C) = m_1, \quad U_2(A, B, C) = m_2; \\ A + B + C = \pi, \quad A > 0, \quad B > 0, \quad C > 0. \end{aligned} \right\} \quad (U)$$

Всякое решение системы (U) (если оно существует) определяет бесконечное множество подобных между собой треугольников. В частности, если система (U) не имеет решений, то треугольников с данными соотношениями между его углами не существует.

Зная углы треугольника, можно вычислить его произвольный угловой элемент, при этом линейные элементы определяются из ряда равных отношений с точностью до положительного числового множителя:

$$a = k \sin A, \quad b = k \sin B, \quad c = k \sin C$$

и вообще $L = kU(L)$, где $k(=2R)$ — произвольное положительное число.

Если множителю k придать некоторое численное значение, то из множества всех подобных между собой треугольников данной формы выделится некоторый определенный треугольник, иными словами, треугольник определится не только по форме, но и по размерам.

Разобьем различные задачи на решение треугольников на перечисленные ниже три группы.

Задачи I типа

Даны два угловых элемента $U_1 = m_1$, $U_2 = m_2$ и один линейный $L = n$.

Зная U_1 и U_2 , можно составить систему (U) для нахождения A , B и C . Зная A , B и C , можно вычислить любой угловой элемент и в частности, элемент $U(L)$, соответствующий L . Знание L дает возможность вычислить любой его линейный элемент L' . В самом деле, из равенства $\frac{L}{U(L)} = k$ найдем для искомого треугольника коэффициент пропорциональности ряда равных отношений. Зная k и угловые элементы треугольника, можно вычислить любой его линейный элемент $L' = kU(L')$.

В частности, можно вычислить стороны треугольника:

$$a = L \frac{\sin A}{U(L)}, \quad b = L \frac{\sin B}{U(L)}, \quad c = L \frac{\sin C}{U(L)}.$$

Число различных решений задачи определяется следующим образом: всякое решение A , B , C смешанной системы (U) определяет треугольник по форме. Если отношение k заданного значения n элемента L к значению соответствующего углового элемента $U(L)$ положительно:

$$t = \frac{n}{U(L)} > 0,$$

то треугольник, определяемый этим значением k , дает решение задачи.

Если отношение $\frac{n}{U(L)} \leq 0$, то соответствующее решение смешанной системы (U) не дает решения задачи.

Итак, число решений задачи равно числу решений смешанной системы (U), для которых отношение $\frac{n}{U(L)}$ положительно.

Пример. Приведем пример противоречивой задачи. Пусть $L = a - b = 5$, $A = \frac{\pi}{6}$, $B = \frac{\pi}{4}$, тогда $U(L_1) = \sin A - \sin B = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1 - \sqrt{2}}{2} < 0$ и $k = \frac{5}{U(L)} = \frac{10}{1 - \sqrt{2}} < 0$.

Так как $A < B$, то должно быть $a < b$ и $a - b < 0$, но в условии $a - b = 5 > 0$.

Искомый треугольник не существует.

Задачи II типа

Даны два линейных элемента L_1 и L_2 и один угловой $U = m_1$.

Задача сведется к предыдущей, если будет найден какой-либо другой угловой элемент. В качестве известного второго углового элемента можно взять отношение

$$\frac{L_1}{L_2} = m_2.$$

В качестве известного линейного элемента можно взять либо L_1 , либо L_2 .

Задачи III типа

Даны три линейных элемента L_1 , L_2 и L_3 .

Задача сведется к случаю I, если будут известны два угловых элемента. В качестве известных угловых элементов можно взять отношения:

$$U_1 = \frac{L_1}{L_3} \text{ и } U_2 = \frac{L_2}{L_3}.$$

Таким образом, принцип Торопова дает общий способ составления смешанной системы (U), соответствующей данной задаче. Решение и исследование системы (U) производится особо в каждом конкретном случае, так как вид этой системы зависит от того, какие элементы являются заданными.

С точки зрения вычислительной практики не безразлично, в какой форме представлено окончательное решение задачи. Так, например, при вычислении при помощи натуральных таблиц (и арифмометра) желательно формулу решения представить в виде суммы. При вычислениях с логарифмическими таблицами (заметим, что в настоящее время эти таблицы все более утрачивают

свое значение) желательно формулу решения представить в виде произведения.

В ряде случаев целесообразно, в целях упрощения процесса решения уравнений и формы окончательного ответа, заменить заданные элементы другими непосредственно выражающимися через данные.

§ 64. Основные случаи решения треугольников

Основными случаями решения треугольников называются задачи на вычисление элементов треугольника по трем данным его независимым основным элементам*.

Ниже мы ограничимся вычислением трех основных элементов по заданным трем прочим основным элементам, так как вычисление различных других элементов принципиальных затруднений не вызывает и может быть выполнено по формулам, связывающим их с основными элементами.

Решение прямоугольных треугольников**. В прямоугольном треугольнике известен один из его элементов $C = \frac{\pi}{2}$, а потому достаточно задать два его элемента, которые вместе с C образуют систему трех данных элементов. В учебной литературе решение прямоугольных треугольников рассматривается особо, ибо в этом частном случае вычисление неизвестных элементов треугольника можно выполнить непосредственно на основании определения тригонометрических функций острого угла (см. § 8, стр. 41) и теоремы Пифагора и нет необходимости прибегать к общим формулам, относящимся к произвольным треугольникам.

По определению тригонометрических функций острого угла, имеем:

$$\begin{aligned} a &= c \sin A = c \cos B, & b &= c \sin B = c \cos A; \\ a &= b \operatorname{tg} A = b \operatorname{ctg} B, & b &= a \operatorname{tg} B = a \operatorname{ctg} A. \end{aligned}$$

Перечислим основные задачи на решение прямоугольных треугольников.

1°. Даны гипотенуза c и острый угол A .

Остальные элементы вычисляются по формулам:

$$a = c \sin A; \quad b = c \cos A; \quad B = \frac{\pi}{2} - A.$$

* Известно, что, в евклидовой геометрии углы треугольника не являются независимыми элементами, ибо они связаны соотношением $A + B + C = \pi$. Если же заданы три угла, удовлетворяющие этому соотношению, то треугольник определяется лишь с точностью до подобия.

** Выделение задач на решение прямоугольных треугольников имеет под собой педагогическое основание, так как задачи на прямоугольные треугольники, весьма важные с точки зрения приложений тригонометрии, могут решаться на ранних стадиях изучения тригонометрии независимо от последующего рассмотрения задач на решение косоугольных треугольников.

2°. Даны катет a и один из острых углов, например угол A .
Остальные элементы вычисляются по формулам:

$$B = \frac{\pi}{2} - A, \quad b = a \operatorname{ctg} A, \quad c = \frac{a}{\sin A}.$$

3°. Даны катет a и гипотенуза c .
Остальные элементы вычисляются по формулам:

$$A = \arcsin \frac{a}{c}, \quad B = \frac{\pi}{2} - A, \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

Примечание. Если отношение $\frac{a}{c}$ близко к 1, то для большей точности вычислений по таблицам вместо угла A можно вычислить угол $\frac{B}{2}$, воспользовавшись формулой

$$\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos B}{1 + \cos B}} = \sqrt{\frac{c - a}{c + a}}.$$

4°. Даны катеты a и b .
Остальные элементы вычисляются по формулам:

$$A = \arcsin \frac{a}{b}, \quad B = \frac{\pi}{2} - A, \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Решение косоугольных треугольников.
Задача I типа. Даны два угла и одна из сторон треугольника; вычислить остальные основные элементы.

Пусть, например, даны A , B и a ; требуется вычислить C , b и c .
Решение.

$$C = \pi - A - B, \quad \frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}, \quad \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A},$$

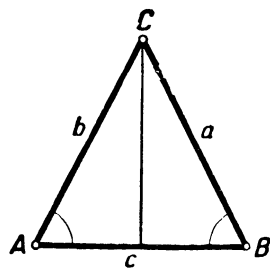
откуда

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}, \quad c = \frac{a \sin (A + B)}{\sin A}.$$

Задача имеет единственное решение при условиях:

$$A > 0, \quad B > 0, \quad A + B < \pi.$$

Если значения A и B этим неравенствам не удовлетворяют, то искомым треугольник не существует.



Черт. 218

Примечание. Если $A = B$, то треугольник равнобедренный, в этом случае решение упрощается (черт. 218).

$$C = \pi - 2A, \quad b = a, \quad c = 2a \cos A$$

Задачи II типа. Существуют следующие две задачи этого типа.

Задача II. Даны две стороны треугольника и угол между ними; вычислить остальные основные элементы.

Пусть, например, даны a , b и C , требуется вычислить A , B и c .

Решение. Общий принцип Торопова дает возможность составить тригонометрическое уравнение для одного из искомых углов.

Имеем:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sin A}{\sin(A+C)} = \frac{\sin A}{\sin A \cos C + \cos A \sin C}, \quad (1)$$

откуда

$$(a \cos C - b) \sin A + a \sin C \cos A = 0.$$

Это линейное однородное относительно $\sin A$ и $\cos A$ уравнение, из которого найдем:

$$\operatorname{ctg} A = \frac{b - a \cos C}{a \sin C},$$

остальные элементы найдем по формулам:

$$B = \pi - C - A, \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

Для вычисления стороны c и углов можно воспользоваться формулами косинусов:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C, \quad A = \arccos \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

При логарифмических вычислениях удобно поступить иначе. Если угловой элемент $\frac{a}{b}$ заменить элементом $\frac{a-b}{a+b}$, который также можно считать известным, то, воспользовавшись теоремой тангенсов (§ 61, стр. 374), получим:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}{\operatorname{ctg} \frac{C}{2}},$$

откуда

$$\operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}$$

и

$$\left. \begin{aligned} A-B &= 2 \arctg \left(\frac{a-b}{a+b} \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \right), \\ A+B &= \pi - C. \end{aligned} \right\}$$

Из этой системы вычисляются углы A и B . Сторону c можно вычислить по теореме синусов

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

Задача Π_1 имеет единственное решение при произвольных данных, удовлетворяющих условиям $a > 0$, $b > 0$, $0 < C < \pi$.

Примечание. Если $a = b$, то треугольник равнобедренный. В этом случае решение упрощается:

$$A = B = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}, \quad c = 2a \sin \frac{C}{2}.$$

Задача Π_2 . Даны две стороны и угол, противолежащий одной из данных сторон; вычислить остальные основные элементы.

Пусть, например, даны: a , b и A ; требуется вычислить C , B и c .

Решение. Для вычисления углов составим смешанную систему:

$$\sin B = \frac{b}{a} \sin A, \quad A + B + C = \pi, \quad B > 0, \quad C > 0. \quad (U)$$

Сторону c можно найти по теореме синусов

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

Исследуем смешанную систему (U). Если $b \sin A < a$, то $\frac{b}{a} \sin A < 1$; простейшее тригонометрическое уравнение $\sin B = \frac{b}{a} \sin A$ в интервале $(0, \pi)$ имеет два решения:

$$B_1 = \arcsin \left(\frac{b}{a} \sin A \right), \quad B_2 = \pi - \arcsin \left(\frac{b}{a} \sin A \right).$$

Рассмотрим следующие случаи:

1°. $b < a$; в этом случае

$$\sin B < \sin A, \quad B_1 < A \quad \text{и} \quad B_1 < \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, всегда $B_1 < \pi - A$, т. е. $B_1 + A < \pi$, и

$$C_1 = \pi - (A + B_1) > 0.$$

Значения B_1 и C_1 удовлетворяют всем соотношениям системы (U). Рассмотрим другое решение:

$$B_2 = \pi - B_1; \quad \text{имеем} \quad A + B_2 = \pi + (A - B_1) > \pi,$$

поэтому соотношения системы (U) не удовлетворяются.

2°. $a = b$ и $A < \frac{\pi}{2}$; в этом случае $B_1 = A$, $C = \pi - (A + B_1) > 0$. Значение B_2 не удовлетворяет соотношениям системы (U), ибо $A + B_2 = \pi$. При $A \geq \frac{\pi}{2}$ задача не имеет решения.

3°. $b \sin A < a < b$ и $A < \frac{\pi}{2}$. В этом случае $\sin B > \sin A$.
Имеем

$$0 < A < B_1 < \frac{\pi}{2}, \quad A + B_1 < \pi \quad \text{и} \quad C_1 = \pi - (A + B_1) > 0.$$

Все соотношения системы (U) удовлетворяются.

Рассмотрим другое решение:

$$B_2 = \pi - B_1; \text{ имеем } C_2 = \pi - (A + B_2) = B_1 - A > 0.$$

Все соотношения системы (U) выполняются. При $A \geq \frac{\pi}{2}$ задача не имеет решения.

4°. $b \sin A = a$ и $A < \frac{\pi}{2}$. В этом случае $B_1 = B_2 = \frac{\pi}{2}$,
 $C = \frac{\pi}{2} - A$.

Решением служит прямоугольный треугольник. При $A \geq \frac{\pi}{2}$ задача не имеет решения.

5. $b \sin A > a$. В этом случае первое уравнение системы (U) не имеет решений; задача не имеет решений.

Итак: 1°. Если из двух данных сторон a и b угол A противолежит большей стороне, то задача имеет единственное решение.

2°. Если $a = b$, задача имеет единственное решение (равнобедренный треугольник) при $A < \frac{\pi}{2}$ и не имеет решений при $A \geq \frac{\pi}{2}$.

3°. Если угол A противолежит меньшей стороне, причем $b \sin A < a < b$, то задача имеет два решения, если $A < \frac{\pi}{2}$, и не имеет решений, если $A \geq \frac{\pi}{2}$.

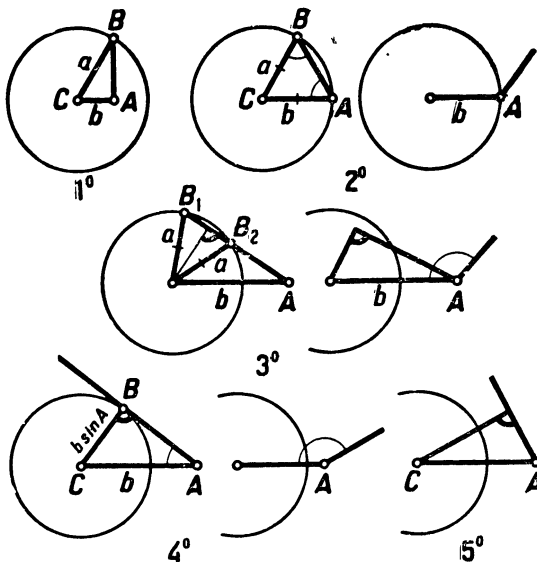
4°. Если $b \sin A = a$, то задача имеет единственное решение (прямоугольный треугольник), если $A < \frac{\pi}{2}$, и не имеет решений, если $A \geq \frac{\pi}{2}$.

5°. Если $b \sin A > a$, задача не имеет решений.

Результаты исследования представлены на чертеже 219.

Задача III типа. Даны три стороны a, b, c треугольника; вычислить его углы A, B, C .

Решение. Непосредственное применение теоремы синусов по принципу Торопова приводит к смешанной системе, неудобной для практического вычисления углов. Однако вместо системы основных соотношений (I) между элементами треугольника можно взять эквивалентную ей систему (III), тогда



Черт. 219

получится следующая смешанная система для вычисления углов треугольника:

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A, & b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos B, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C, \\ 0 < A < \pi, & 0 < B < \pi, & 0 < C < \pi. \end{aligned} \right\} \quad (U')$$

Углы треугольника определяются как главные решения простейших тригонометрических уравнений

$$A = \arccos \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \text{ и т. д.} \quad (1)$$

Из геометрии известно, что треугольник (и притом единственный) со сторонами a, b, c существует в том и только в том случае, если

$$a < b + c, \quad b < c + a, \quad c < a + b, \quad (2)$$

Неравенства (1) суть необходимые и достаточные условия существования решения (и притом единственного) системы (U') , ибо всякое решение этой системы определяет треугольник со сторонами a, b, c (см. стр. 367), и обратно, углы всякого такого треугольника удовлетворяют системе (U') .

Можно доказать аналитически, что при соблюдении системы неравенств (2) смешанная система (U') имеет единственное решение.

Простейшее уравнение (1) имеет решение в интервале $0 < A < \pi$, если выполняется неравенство

$$|b^2 + c^2 - a^2| < 2bc. \quad (3)$$

Докажем, что это неравенство следует из неравенств (2).

Из неравенств (2) имеем:

$$b - c < a \quad \text{и} \quad c - b < a$$

и, следовательно,

$$|b - c| < a, \quad \text{откуда} \quad b^2 + c^2 - 2bc < a^2$$

$$b^2 + c^2 - a^2 < 2bc. \quad (4)$$

Возведя в квадрат первое неравенство (2), получим:

$$a^2 - (b^2 + c^2) < 2bc. \quad (5)$$

Из неравенств (4) и (5) следует неравенство (3).

Существование главных решений для уравнений, определяющих остальные углы треугольника, устанавливается круговой перестановкой букв a, b, c .

При логарифмических вычислениях обычно пользуются формулами:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{p-a}, \quad \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{r}{p-b}, \quad \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{r}{p-c},$$

$$\text{где } p = \frac{a+b+c}{2} \text{ — полупериметр и}$$

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} \text{ — радиус вписанного круга (см. § 61, стр. 376).}$$

§ 65. Неосновные случаи решения треугольников

Неосновными случаями решения треугольников будем называть задачи на вычисление различных элементов треугольника по трем данным его элементам, среди которых хотя бы один не является основным. Общий принцип Торопова решения треугольников (см. § 61) указывает способ составления смешанной тригонометрической системы для вычисления углов искомого треугольника.

В рассмотренных ниже примерах неосновных случаев будем считать задачу решенной, если указан способ ее сведения к одному из основных случаев решения треугольников.

Задачи I типа. Простейшими среди задач этого типа являются такие задачи, в условиях которых непосредственно задаются два угла треугольника. В этом случае вычисление любого линейного элемента производится непосредственно по данному линейному элементу.

Примеры.

1. Даны A , B и p ; вычислить стороны и площадь треугольника.

Решение. Угол C находится непосредственно: $C = \pi - (A + B)$. Будем предполагать, что $A + B < \pi$, так как при $A + B \geq \pi$ задача не имеет решения.

Имеем

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{p}{2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{\frac{1}{2} \sin A \sin B \sin C}}.$$

Следовательно,

$$a = \frac{p \sin A}{2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{p \sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{B}{2} \sin \frac{A+B}{2}}.$$

$$S = \frac{p^2 \sin A \sin B \sin C}{8 \cos^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{C}{2}} = p^2 \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} =$$

$$= p^2 \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{cgt} \frac{A+B}{2}.$$

По этому образцу решаются различные такого же рода задачи, как например: определить стороны треугольника, зная его углы и площадь, углы и радиус вписанного круга, углы и биссектрису и т. п.

На нижеследующих примерах 2 и 3 рассмотрено решение двух задач первого типа, в которых угловые элементы (хотя бы один) заданы в виде некоторых функций от углов треугольника.

2. Найти стороны треугольника, если даны r , отношение $\frac{h_b + h_c}{b + c} = k$ и B .

Решение. Представим угловой элемент $\frac{h_b + h_c}{b + c}$ в виде функции от углов треугольника. Имеем

$$\frac{h_b + h_c}{b + c} = \frac{\sin A \sin C + \sin A \sin B}{\sin B + \sin C} = \sin A.$$

Итак,

$$\sin A = k \quad \text{и} \quad A = \arcsin k, \quad C = \pi - A - B$$

(чтобы задача имела решение, необходимо выполнение условия $0 < k < 1$); имеем далее:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{r}{2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}},$$

откуда

$$a = \frac{r \sin A}{2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = \frac{r \cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{B}{2} \cos \frac{A+B}{2}}.$$

Аналогично вычисляются другие стороны.

3. Задача Паскаля. Даны A и отношение разности сторон $b - c$ к высоте h_a , т. е. $k = \frac{b-c}{h_a}$. Найти B и C .

Решение. Имеем:

$$\begin{aligned} k = \frac{\sin B - \sin C}{\sin B \sin C} &= \frac{2 \cos \frac{B+C}{2} \sin \frac{B-C}{2}}{\sin B \sin C} = \\ &= \frac{4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B-C}{2}}{\cos(B-C) - \cos(B+C)} = \frac{4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B-C}{2}}{\cos(B-C) + \cos A}, \end{aligned}$$

откуда для разности $B - C$ получаем тригонометрическое уравнение:

$$k \cos(B-C) - 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B-C}{2} + k \cos A = 0.$$

Заменив $\cos(B-C)$ на $1 - 2 \sin^2 \frac{B-C}{2}$ и положив $t = \sin \frac{B-C}{2}$, получим квадратное уравнение:

$$kt^2 + 2 \sin \frac{A}{2} t - k \cos^2 \frac{A}{2} = 0.$$

Вычислив $B - C$ и присоединив уравнение $B + C = \pi - A$, найдем B и C .

Задачи II типа. Простейшими задачами этого вида являются задачи, в которых непосредственно задается один из углов треугольника и два его линейных элемента.

Иногда в целях упрощения решения отношение двух данных линейных элементов L_1 и L_2 заменяют отношением $\frac{L_1 + L_2}{L_1 - L_2}$ (см., например, основную задачу II, когда даны стороны треугольника и угол, заключенный между ними). Этот прием бывает обычно полезен в случае, когда дан угол A и одноименные элементы $L_1 = L_b$ и $L_2 = L_c$, соответствующие искомым углам B и C (например: h_b и h_c или r_b и r_c , или b_b и b_c и т. п.).

Примеры.

1. Вычислить основные элементы треугольника, если даны $2p$, r и A .
Решение. Известным угловым элементом является

$$\frac{2p}{r} = \frac{4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = 2 \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}.$$

Для вычисления углов B и C получается система

$$\operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \frac{2p}{r} \operatorname{tg} \frac{A}{2}; \quad \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}.$$

Способ решения этой системы см. в § 52. Однако в данном случае можно не прибегать к общему методу решения треугольников, а воспользоваться соотношением

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{p-a},$$

из которого найдем

$$a = p - r \operatorname{ctg} \frac{A}{2}.$$

Далее $b + c = 2p - a$. Воспользовавшись формулой Мольвейде (стр. 375), получим следующую систему для углов B и C :

$$\cos \frac{B-C}{2} = \frac{b+c}{a} \sin \frac{A}{2}, \quad \frac{B+C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}, \quad B > 0, \quad C > 0.$$

Решение и исследование этой системы выполняется обычными приемами, после чего задача сведется к основному случаю 1 решения треугольников.

2. Вычислить основные элементы треугольника, если даны:

$$a^2 - b^2 = k^2, \quad c \text{ и } A.$$

Решение. Отношение $\frac{a^2 - b^2}{c^2}$ есть известный угловой элемент

$$\frac{a^2 - b^2}{c^2} = \frac{k^2}{c^2}, \quad \text{или} \quad \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin^2 C} = \frac{k^2}{c^2},$$

$$\text{но } \sin^2 A - \sin^2 B = \frac{1}{2} (\cos 2B - \cos 2A) = \sin(A-B) \sin(A+B),$$

и, следовательно,

$$\frac{\sin(A-B)}{\sin C} = \frac{b^2}{c^2} \quad \text{или} \quad \frac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)} = \frac{k^2}{c^2}.$$

Составив производную пропорцию, получим:

$$\frac{\sin(A-B) - \sin(A+B)}{\sin(A-B) + \sin(A+B)} = \frac{k^2 - c^2}{k^2 + c^2} \quad \text{или} \quad \frac{\cos A \sin B}{\sin A \cos B} = \frac{c^2 - k^2}{c^2 + k^2},$$

откуда

$$\operatorname{tg} B = \frac{c^2 - k^2}{c^2 + k^2} \operatorname{tg} A.$$

Это уравнение относительно B надо решать при условиях $0 < B < \pi - A$, после чего задача сведется к основной задаче первого типа.

3. Вычислить углы треугольника, если даны m_a , m_b и C .

Решение. Можно считать известным угловой элемент $\frac{m_a^2 - m_b^2}{m_a^2 + m_b^2} = k$;

имеем

$$k = \frac{(2 \sin^2 B + 2 \sin^2 C - \sin^2 A) - (2 \sin^2 C + 2 \sin^2 A - \sin^2 B)}{(2 \sin^2 B + 2 \sin^2 C - \sin^2 A) + (2 \sin^2 C + 2 \sin^2 A - \sin^2 B)},$$

или

$$k = \frac{3 \sin^2 B - 3 \sin^2 A}{\sin^2 B + 4 \sin^2 C + \sin^2 A}.$$

Заметив, что

$$\sin^2 B - \sin^2 A = \sin(A+B) \sin(B-A) = \sin(B-A) \sin C$$

и

$$\sin^2 B + \sin^2 A = 1 - \cos(A+B) \cos(A-B) = 1 + \cos C \cos(B-A),$$

получим

$$k = \frac{3 \sin C \sin(B-A)}{1 + \cos C \cos(B-A) + 4 \sin^2 C}.$$

Это уравнение, линейное относительно $\sin(B-A)$ и $\cos(B-A)$, совместно с уравнением $A+B=\pi-C$ и с неравенствами $A > 0$, $B > 0$ составляют систему для вычисления углов.

Задачи III типа представляют обычно наибольшие трудности, обусловленные необходимостью решать тригонометрическую систему уравнений, служащую для вычисления углов треугольника. Составление этой системы на основе принципа Торопова затруднений не представляет, однако так составленная система может оказаться менее удобной для решения, чем некоторые эквивалентные ей системы, которые можно составить применением различных искусственных приемов. Эти искусственные приемы никакой общей теорией предусмотреть нельзя.

Примеры.

1. Вычислить основные элементы треугольника по двум сторонам b и c и биссектрисе b_a угла между ними.

Решение. Из ряда равных отношений имеем:

$$b = 2R \sin B, \quad c = 2R \sin C, \quad b_a \cos \frac{B+C}{2} = 2R \sin B \sin C,$$

откуда

$$\begin{aligned} b+c &= 2R(\sin B + \sin C) = 4R \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} = \\ &= 4R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Умножив третье равенство на $4R$, получим

$$4Rb_a \cos \frac{B-C}{2} = 8R^2 \sin B \sin C.$$

Воспользовавшись равенством (1), получим

$$\frac{b_a(b+c)}{\cos \frac{A}{2}} = 2bc, \quad \text{откуда} \quad \cos \frac{A}{2} = \frac{b_a(b+c)}{2bc}.$$

Если $\frac{b_a(b+c)}{2bc} < 1$, то, найдя из полученного простейшего уравнения $\frac{A}{2}$, сведем задачу к основному случаю; если же $\frac{b_a(b+c)}{2bc} \geq 1$, то задача не имеет решения.

2. Вычислить основные элементы треугольника, если даны три его высоты h_a , h_b и h_c .

Решение. Для нахождения углов A , B и C применим следующий искусственный прием. Воспользуемся соотношениями

$$ah_a = bh_b = ch_c \quad \text{или, что то же} \quad \frac{a}{\frac{1}{h_a}} = \frac{b}{\frac{1}{h_b}} = \frac{c}{\frac{1}{h_c}}$$

(см. пример 2, стр. 382). Следовательно, если существует треугольник ABC с данными сторонами a , b , c , то существует треугольник $A_1B_1C_1$, стороны которого измеряются числами:

$$a_1 = \frac{1}{h_a}, \quad b_1 = \frac{1}{h_b}, \quad c_1 = \frac{1}{h_c}.$$

Обратно, если существует треугольник $A_1B_1C_1$ со сторонами a_1 , b_1 , c_1 , то существует треугольник ABC с данными высотами h_a , h_b , h_c ; при этом $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

В самом деле, рассмотрим треугольник $A_1B_1C_1$; пусть h_{a_1} , h_{b_1} , h_{c_1} — высоты этого треугольника, тогда имеем $a_1h_{a_1} = b_1h_{b_1} = c_1h_{c_1}$; выполним преобразование подобия $\triangle A_1B_1C_1$ с коэффициентом подобия, равным $\frac{h_a}{h_{a_1}} = k$, тогда получим треугольник со сторонами, равными:

$$a = ka_1, \quad b = kb_1, \quad c = kc_1,$$

и с высотами, равными:

$$kh_{a_1} = h_a, \quad kh_{b_1} = k \frac{a_1}{b_1} h_{a_1} = \frac{h_a}{h_{a_1}} \cdot \frac{a_1}{b_1} \cdot h_{a_1} = h_b,$$

и аналогично $kh_{c_1} = h_c$.

Итак задача имеет решение (и притом единственное) в случае, если существует треугольник со сторонами $\frac{1}{h_a}$, $\frac{1}{h_b}$, $\frac{1}{h_c}$. Если $h_a \leq h_b \leq h_c$, то полученное необходимое и достаточное условие запишется в виде неравенства $\frac{1}{h_a} < \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$. Для вычисления углов искомого треугольника

достаточно вычислить углы подобного треугольника $A_1B_1C_1$ (по трем его сторонам):

$$A = 2 \arctg \frac{r_1}{p_1 - a_1} = 2 \arctg \frac{2}{\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}} \times \\ \times \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}\right)\left(\frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_b}\right)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)}{\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}}}.$$

Для вычисления сторон a , b и c достаточно воспользоваться формулой

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{h_b}{\sin A \sin C}, \quad \text{откуда } a = \frac{h_b}{\sin C} \left(= \frac{h_c}{\sin B} \right)$$

§ 66. О применениях тригонометрии к геометрии

Тригонометрия имеет многочисленные применения к геометрии: с помощью тригонометрии можно доказывать различные геометрические положения, устанавливать свойства геометрических фигур, находить зависимости между их элементами, решать вычислительные задачи. Тригонометрическими методами устанавливаются зависимости между элементами различных измерений и угловыми элементами. Так, например, в предыдущих параграфах были установлены соотношения между линейными и угловыми элементами треугольника.

Вычислительные геометрические задачи, которые решаются при помощи тригонометрии, могут быть весьма разнообразными, в этих задачах требуется по достаточному числу **д а н н ы х** (известных) элементов фигуры данного вида вычислить некоторые **у к а з а н н ы е** в **у с л о в и и** (неизвестные) элементы этой фигуры (примеры таких задач были рассмотрены выше применительно к треугольникам)*. Методы решения вычислительных геометрических задач также могут быть самыми разнообразными.

Решение вычислительной задачи с применением тригонометрии, как правило, содержит в себе две части: **г е о м е т р и ч е с к у ю** и **в ы ч и с л и т е л ь н у ю**. Следует, однако, иметь в виду, что обе эти части тесно связаны между собой и составляют вместе одно целое, так что не всегда можно их точно разграничить.

К геометрической части можно отнести геометрическое обоснование решения, т. е. доказательство тех свойств рассматриваемых геометрических конфигураций, которые используются при решении, выполнение геометрических построений, рассмотрение геометри-

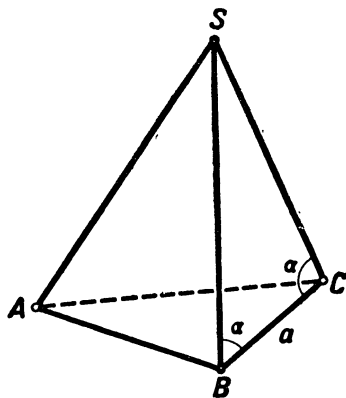
* Различные геометрические задачи, решаемые с применением тригонометрии, известны из школьных учебников и задачников.

чески различных (возможных) случаев расположения элементов данной фигуры, доказательство (геометрическими средствами) существования тех или иных фигур или их элементов (например, возможности провести сечение).

К вычислительной части можно отнести вывод формул, связывающих искомые элементы с данными, преобразование полученных формул к виду, удобному для вычислений, выполнение вычислений при заданных численных значениях (известных) элементов.

При решении задач средствами тригонометрии широко применяется следующий общий прием: отправляясь от данных элементов, строится цепь примыкающих друг к другу треугольников с тем расчетом, чтобы в результате последовательного вычисления некоторых элементов этих треугольников можно было вычислить искомые величины.

При решении задачи с числовыми данными задаются численные значения ее известных элементов, при этом возможно, что фигура с данными значениями известных элементов существует (хотя бы одна), либо возможно, что такой фигуры не существует, несмотря на то, что по соответствующим формулам значения неизвестных элементов можно вычислить. Таким образом, в процессе решения задачи входит исследование, которым либо доказывается, что фигура, соответствующая условию задачи, существует, либо выясняется, что такой фигуры не существует. Это исследование, как правило, относится к геометрической части решения.



Черт. 220

Пример. Вычислить полную поверхность правильной треугольной пирамиды, если сторона основания равна $a = 25$ см, а боковое ребро образует с этой стороной угол $\alpha = 15^\circ$ (черт. 220).

Решение. Вычислим площадь равнобедренного треугольника BSC .

$$\text{Имеем } S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha = \frac{a^2 \operatorname{tg} \alpha}{4}.$$

Полная поверхность пирамиды равна

$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{3a^2}{4} \operatorname{tg} \alpha = \frac{a^2}{4} (\sqrt{3} + 3 \operatorname{tg} \alpha);$$

при $a = 25$, $\alpha = 15^\circ$ все вычисления выполнимы: $S \approx 396,1$.

Однако пирамида, о которой идет речь в условии, не существует. В самом деле, плоские углы трехгранного угла при вершине B (согласно условию) должны иметь следующие величины: 60° , 15° , 15° , но трехгранный угол с такими плоскими углами не существует, ибо $60^\circ > 15^\circ + 15^\circ$.

Задача не имеет решения.

Вопрос об исследовании существования фигуры *о т п а д а е т*, если *з а р а н е е* известно, что эта фигура существует (например, имеется в природе, является техническим сооружением или его частью, начерчена на чертеже или представлена на модели), а ее известные элементы найдены путем измерения.

В задачах с параметрическими данными известные элементы, называемые параметрами, задаются в общем виде (буквами), им можно придавать произвольные числовые значения.

Если каждому из параметров, содержащихся в условии, придать некоторое значение, то задача превратится в задачу на вычисление с числовыми данными. Эта задача может иметь решение (хотя бы одно), а может не иметь ни одного решения. Иными словами, геометрическая фигура с данными значениями параметров может существовать, а может ни одной такой фигуры не существовать.

Система значений параметров называется *д о п у с т и м о й*, если существует хотя бы одна фигура указанного в условии вида.

Множество всех допустимых систем значений параметров называется *о б л а с т ь ю о п р е д е л е н и я* задачи.

Множеству всех допустимых систем значений параметров соответствует некоторое множество фигур, называемое *с е м е й с т в о м* фигур данной задачи.

Решение задач с параметрическими данными может выполняться *б е з* исследования либо *с* исследованием.

Решение задачи без исследования соответствует следующей постановке вопроса: *даны в общем виде (на буквах) значения известных элементов некоторой существующей в действительности фигуры, требуется составить формулы для вычисления указанных в условии неизвестных элементов этой фигуры**.

Решение задачи с исследованием соответствует следующей постановке вопроса: *установить способ вычисления неизвестных элементов для произвольной фигуры семейства*.

В этой постановке вопроса исследование, заключающееся в установлении области определения задачи и числа решений для каждой допустимой системы значений параметров, является составной частью решения.

Возможно, что в семействе фигур, определяемых условием задачи, окажутся фигуры с различным расположением элементов, так что все семейство разобьется на части и для фигур, принадлежащих различным частям, получатся различные формулы вычисления искомых элементов. Рассмотрение всевозможных геометрических различных случаев расположения элементов фигур, определяемых условием задачи, относится к геометрической части решения.

* Если возможны геометрически различные расположения рассматриваемых элементов (известных и неизвестных) фигуры, то можно указать чертежом, какое именно расположение рассматривается.

Без ограничения общности будем предполагать, что формула, дающая решение задачи, применима к произвольной фигуре семейства*.

Эта формула, рассматриваемая аналитически, вне связи с геометрической задачей, имеет свою собственную область определения. Так как формула решения применима к произвольной фигуре семейства (или к выделенной его части), то область определения формулы не может быть уже области определения задачи. Следовательно, для всех тех систем значений параметров, при которых формула теряет смысл, соответствующая фигура не существует.

Роль тригонометрии в исследовании геометрических задач с параметрическими данными заключается в исследовании формулы решения как функции угловых параметров.

Исследования формулы производятся с учетом ограничений для значений параметров, вытекающих из их геометрического смысла (например, плоские углы выпуклых многоугольников меньше 180° , угол между прямой и плоскостью не больше 90°) и из свойств рассматриваемой геометрической фигуры.

Область определения формулы, установленная с учетом указанных ограничений, может оказаться шире области определения задачи (т. е. все вычисления по формуле могут быть выполнимыми, а фигура данного вида может не существовать; пример такого случая приведен на стр. 401). Чтобы убедиться в том, что исследованием формулы найдена и с т и н н а я область определения задачи, надо геометрическими средствами (например, описанием построения) доказать существование соответствующей геометрической фигуры при произвольной системе значений параметров из найденной области определения формулы. Этот вопрос относится к геометрической части решения.

Исследование, о котором шла речь, *вытекающее из требования «решить задачу»*, будем называть о с н о в н ы м исследованием.

Кроме основного исследования решения задачи, можно выполнять дополнительное исследование, т. е. исследование, не вытекающее из требования «решить задачу». Дополнительное исследование не имеет определенного содержания, если не указано, что именно является предметом исследования. Так, при решении геометрических задач можно ставить, например, следующие вопросы, найти наибольшие или наименьшие значения данных элементов, исследовать эти элементы на монотонность (как функции параметров), выяснить применимость формул к вырожденным фигурам и т. п.

В последующих параграфах приведен ряд вычислительных геометрических задач, при этом рассматривается по преимуществу

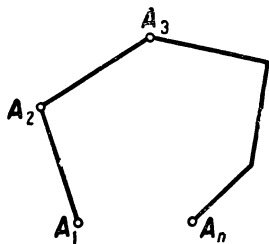
* Если для различных частей семейства имеют место различные формулы, то можно части этого семейства рассматривать по отдельности.

вычислительная часть решения, поскольку тригонометрия находит применение именно в этой части, геометрическая же часть представляет интерес с точки зрения геометрии*.

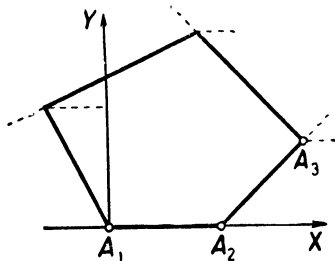
§ 67. Задачи на решение многоугольников

Пусть P — произвольный многоугольник, ограниченный простой (т. е. не имеющей точек самопересечения) замкнутой ломаной линией. Из геометрии известно, что n -угольник имеет $2n$ основных элементов, n углов и n сторон, при этом в общем случае n -угольник определяется заданием $2n - 3$ его основных элементов.

Пусть, например, задана ломаная $A_1A_2A_3 \dots A_n$, эта ломаная определяет n -угольник с вершинами в точках $A_1, A_2, \dots, A_n$ (черт. 221). При этом длины звеньев ломаной и углы между ними можно задавать произвольно (из множества их допустимых значений). Зная длины звеньев ломаной линии $A_1A_2 = a_1, A_2A_3 = a_2, \dots, A_{n-1}A_n = a_{n-1}$ и величины углов $A_2, A_3, \dots, A_{n-1}$ (углы будем обозначать теми же буквами, что и вершины), можно построить саму ломаную линию и многоугольник $A_1A_2, \dots, A_nA_1$; при этом определяются три остальных основных элемента n -угольника — сторона $a_n = A_nA_1$ и два угла A_1 и A_n .



Черт. 221



Черт. 222

Можно установить общие соотношения, имеющие место для основных элементов произвольного n -угольника. Из геометрии известно, что сумма углов n -угольника (при данном n) постоянна:

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n = \pi(n - 2). \quad (1)$$

Для получения соотношений между линейными и угловыми элементами спроектируем контур многоугольника на две взаимно перпендикулярные оси. Для простоты примем за оси проекций одну из сторон многоугольника, например сторону A_1A_2 , и перпендикулярную ей прямую (черт. 222). Установим на плоскости прямоугольную систему координат, приняв за ось абсцисс прямую,

* Ряд задач, интересных с точки зрения геометрии, рассмотрен в статье И. И. Гайдук ова, журнал «Математика в школе» № 2 за 1959 г.

на которой расположен вектор $A_1 A_2$, и установив на ней положительное направление, совпадающее с направлением этого вектора. Спроектируем $A_2 A_3 \dots A_1$ на ось OX . Подсчитаем углы, которые образуют звенья ломаной с осью абсцисс:

Сторона	Угол с $A_1 A_2$	Косинус
$A_2 A_3$	$\pi - A_2$	$-\cos A_2$
$A_3 A_4$	$(\pi - A_2) + (\pi - A_3) =$ $= 2\pi - (A_2 + A_3)$	$\cos (A_2 + A_3)$
$A_4 A_5$	$(\pi - A_2) + (\pi - A_3) +$ $+ (\pi - A_4) = 3\pi - (A_2 + A_3 + A_4)$	$-\cos (A_2 + A_3 + A_4)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$
$A_n A_1$	$\dots$	$(-1)^{n-1} \cos (A_2 + A_3 + \dots + A_n)$

Имеем:

$$\text{пр } A_2 A_3 + \text{пр } A_3 A_4 + \dots + \text{пр } A_n A_1 = \text{пр } A_2 A_1; \quad (A)$$

проекция звена $A_i A_{i+1}$ равна его длине, умноженной на косинус угла, образованного этим звеном с осью OX .

$$\text{пр } A_i A_{i+1} = a_i \cos (\widehat{A_i A_{i+1}, OX}) = a_i (-1)^{i-1} \cos (A_2 + A_3 + \dots + A_i).$$

Подставив в формулу (1) и приняв во внимание, что $\text{пр } A_2 A_1 = -\text{пр } A_1 A_2 = -a_1$, получим:

$$a_1 = a_2 \cos A_2 - a_3 \cos (A_2 + A_3) + a_4 \cos (A_2 + A_3 + A_4) + \dots \\ \dots + (-1)^n a_n \cos (A_2 + A_3 + \dots + A_n). \quad (II)$$

Проектируем ту же ломаную на ось OY . Звено $A_i A_{i+1}$ образует с осью ординат угол, равный

$$\frac{\pi}{2} - \angle (\widehat{A_i A_{i+1}, OY}).$$

Следовательно,

$$\text{пр } A_i A_{i+1} = a_i \cos \left[\frac{\pi}{2} - \angle (\widehat{A_i A_{i+1}, OY}) \right] = \\ = a_i \sin (\widehat{A_i A_{i+1}, OY}) = (-1)^{i-1} a_i \sin (A_2 + A_3 + \dots + A_i).$$

Воспользуемся общей формулой (A), приняв во внимание, что $\text{пр } A_2 A_1 = 0$, получим:

$$a_2 \sin A_2 - a_3 \sin (A_2 + A_3) + a_4 \sin (A_2 + A_3 + A_4) + \dots + \\ + (-1)^n a_n \sin (A_2 + A_3 + \dots + A_n) = 0. \quad (III)$$

Система соотношений (I), (II) и (III) при заданных $2n - 3$ основных элементах обращается в систему трех уравнений, которая может служить для вычисления трех неизвестных элементов.

Формулы (I), (II) и (III), будучи применены (в частности) к треугольнику, дают следующую систему соотношений:

$$A + B + C = \pi; \quad (I')$$

$$a = c \cos B - b \cos (B + A) \quad \text{или} \quad a = b \cos C + c \cos B \quad (II')$$

и

$$c \sin B - b \sin (B + A) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}. \quad (III')$$

Из этой системы соотношений можно вывести все установленные в § 57 формулы, связывающие основные элементы треугольника. Так, подставив c из формулы (III') в (II'), получим:

$$\begin{aligned} a &= b \cos C + \frac{b \sin C}{\sin B} \cos B = \frac{b}{\sin B} [\cos C \sin B + \sin C \cos B] = \\ &= \left[\frac{b}{\sin B} \sin (B + C) \right] = \frac{b}{\sin B} \sin A. \end{aligned}$$

Следовательно, имеет место теорема синусов, откуда (см. § 58) вытекают все прочие соотношения между основными элементами треугольника.

Пример. Положим, например, $n = 4$, тогда формулы (II) и (III) примут вид,

$$\begin{aligned} a &= b \cos B - c \cos (B + C) + d \cos (B + C + D); \\ 0 &= b \sin B - c \sin (B + C) + d \sin (B + C + D). \end{aligned}$$

После почленного возведения в квадрат, сложения и преобразования получим формулу, выражающую квадрат стороны четырехугольника:

$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2 - 2bc \cos C + 2bd \cos (C + D) - 2cd \cos D.$$

В практике решения различных задач на вычисление элементов многоугольника обычно разбивают многоугольник на треугольники и сводят задачу к последовательному вычислению элементов треугольников. В зависимости от взаимного расположения заданных элементов разбиение многоугольника можно производить различными способами (диагоналями, прямыми, параллельными сторонам или перпендикулярными им и т. п.). Ниже мы ограничимся рассмотрением ряда задач на четырехугольники.

Примеры. 1. Даны две стороны a и b параллелограмма и угол, образованный ими. Вычислить острый угол γ между диагоналями.

Решение. Предположим для определенности, что a — большая сторона: $a \geq b$. Разобьем параллелограмм на треугольники при помощи диагоналей (черт. 223). Из треугольников ABD и ABC найдем диагонали:

$$d_1^2 = BD^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos A;$$

$$d_2^2 = AC^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos A$$

Искомый угол между диагоналями найдем, применив теорему косинусов к треугольнику AOB :

$$a^2 = \frac{d_1^2}{4} + \frac{d_2^2}{4} + \frac{d_1 d_2}{2} \cos \gamma;$$

$$\cos \gamma = \frac{4a^2 - d_1^2 - d_2^2}{2d_1 d_2} = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2 b^2 \cos^2 A}}. \quad (1)$$

Область определения задачи устанавливается следующими неравенствами:

$$0 < b \leq a, \quad 0 < A \leq 180^\circ.$$

Проведем такое дополнительное исследование. Установить множество допустимых значений для угла γ , в зависимости от длин сторон параллелограмма.

Из формулы (1) следует, что при данных a и b в полуинтервале $0 < A \leq 90^\circ$ косинус угла γ убывает от 1 (предельное значение при $A = 0$) до $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ (при $A = 90^\circ$), а в промежутке $90^\circ \leq A < 180^\circ$ возрастает от $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ до 1. Следовательно, $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \leq \cos \gamma \leq 1$ и $0 < \gamma \leq \arccos \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$.

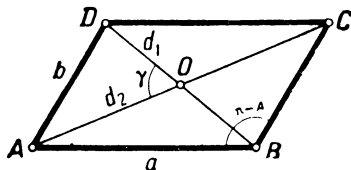
Значению $A = 0$ соответствует вырождение параллелограмма в отрезок при возрастании A от 0 до 90° , угол между диагоналями возрастает от 0 до $\arccos \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$.

Итак, угол между диагоналями параллелограмма с данными сторонами не может быть произвольным.

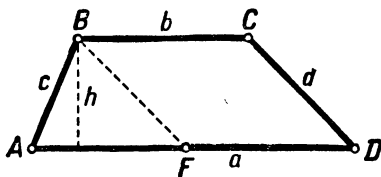
Так, например, не существует параллелограмма со сторонами $a = 3$ м, $b = 1$ м и $\gamma = 45^\circ$.

В самом деле,

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = \frac{4}{5}, \text{ но } 45^\circ = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} > \arccos \frac{4}{5}.$$



Черт. 223



Черт. 224

2. Даны основания a и b трапеции и ее боковые стороны c и d . Вычислить углы трапеции и ее площадь.

Решение. Предположим для определенности, что a — большая сторона (черт. 224). Пусть A — угол, образованный сторонами a и c . Прямая

BF , параллельная стороне d , разбивает трапецию на треугольник ABF и параллелограмм $BCDF$. В треугольнике ABF известны три стороны c , d и $(a - b)$; по трем сторонам можно вычислить угол A :

$$\cos A = \frac{(a - b)^2 + c^2 - d^2}{2c(a - b)},$$

и аналогично

$$\cos D = \frac{(a - b)^2 + d^2 - c^2}{2d(a - b)}$$

и далее, $B = 180^\circ - A$, $C = 180^\circ - D$.

Для вычисления площади воспользуемся формулой

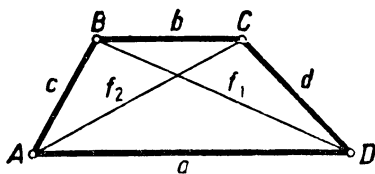
$$S = \frac{1}{2} (a + b) h = \frac{1}{2} (a + b) c \sin A$$

(где h — высота трапеции). Имеем:

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{1}{2c|a - b|} \sqrt{4c^2(a - b)^2 - [(a - b)^2 + c^2 - d^2]^2},$$

откуда после преобразований получим формулу, выражающую площадь трапеции по ее сторонам:

$$S = \frac{a + b}{4|a - b|} \times \\ \times \sqrt{[(c + d) + (a - b)][(c + d) - (a - b)][(a - b) + (c - d)][(a - b) - (c - d)]}.$$



Черт. 225

3. Доказать, что для произвольной трапеции существует следующая зависимость между сторонами и диагоналями:

$$f_1^2 + f_2^2 = c^2 + d^2 + 2ab, \quad (1)$$

где a и b — основания, c и d — непараллельные стороны. f_1 и f_2 — диагонали.

Решение. Найдем диагонали из треугольников ABD и ABC (черт. 225):

$$f_1^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos A;$$

$$f_2^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos A$$

Исключив из этих соотношений $\cos A$, получим

$$bf_1^2 + af_2^2 = (a^2 b + c^2 b + b^2 a + c^2 a)$$

или

$$bf_1^2 + af_2^2 = (a + b)(c^2 + ab) \quad (2)$$

Воспользовавшись треугольниками ACD и BCD , получим:

$$af_1^2 + bf_2^2 = (a + b)(d^2 + ab); \quad (3)$$

сложив равенства (2) и (3), получим равенство (1).

4. Даны стороны a, b, c и d четырехугольника, вписанного в круг; найти углы этого четырехугольника и его площадь.

Углы вписанного в круг четырехугольника удовлетворяют условиям (черт. 226)

$$A + C = \pi, \quad B + D = \pi.$$

Применив теорему косинусов к треугольникам ABD и BCD , получим два выражения для квадрата длины диагонали BD ; приравняв эти выражения, получим

$$a^2 + d^2 - 2ad \cos A = b^2 + c^2 + 2bc \cos A$$

(принять во внимание, что $\cos C = -\cos A$), откуда найдем

$$\cos A = \frac{(a^2 + d^2) - (b^2 + c^2)}{2(bc + ad)};$$

и далее:

$$1 + \cos A = \frac{(a + d)^2 - (b - c)^2}{2(bc + ad)} = \frac{(a + d + c - b)(a + d + b - c)}{2(bc + ad)};$$

$$1 - \cos A = \frac{(b + c)^2 - (a - d)^2}{2(bc + ad)} = \frac{(-a + b + c + d)(a + b + c - d)}{2(bc + ad)}.$$

Обозначим через $2p$ периметр вписанного четырехугольника:

$$2p = a + b + c + d,$$

тогда $a + b + c - d = 2(p - d)$,

и аналогично преобразуются прочие выражения. Откуда получим:

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p - b)(p - c)}{bc + ad}};$$

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p - a)(p - d)}{bc + ad}};$$

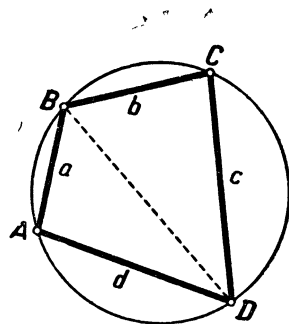
$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p - a)(p - d)}{(p - b)(p - c)}};$$

$$\sin A = 2 \cos \frac{A}{2} \sin \frac{A}{2} = \frac{2 \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}}{bc + ad}.$$

В этих формулах a и d — стороны, образующие угол A , а c и b — противолежащие им стороны.

Вычислим площадь S четырехугольника:

$$\begin{aligned} S &= \text{пл. } \triangle ABD + \text{пл. } \triangle BCD = \frac{1}{2} [ad \sin A + bc \sin (\pi - A)] = \\ &= \frac{\sin A}{2} (ad + bc) = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}. \end{aligned}$$



Черт. 226

5. Доказать, что для всякого описанного около круга четырехугольника имеют место соотношения:

$$\left. \begin{aligned} a \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} &= c \sin \frac{C}{2} \sin \frac{D}{2} ; \\ b \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} &= d \sin \frac{D}{2} \sin \frac{A}{2} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Доказательство. В треугольнике ABO (черт. 227), где O — центр вписанного в четырехугольник круга, углы при вершинах суть $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$ и

$\pi - \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2} \right)$. Вычислим двумя способами площадь S треугольника ABO .

Имеем:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} ra; \\ S &= \frac{1}{2} (rBK + rAK) = \frac{1}{2} r^2 \left(\operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \right) = \\ &= \frac{r^2}{2} \frac{\sin \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2} \right)}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}}. \end{aligned}$$

Приравняв полученные выражения для S , получим (после сокращения):

$$a \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} = r \sin \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2} \right). \quad (2)$$

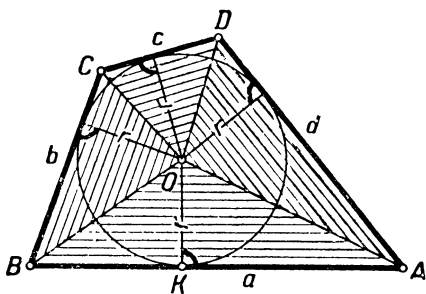
Если исходить из треугольника CDO , то получим:

$$c \sin \frac{C}{2} \sin \frac{D}{2} = r \sin \left(\frac{C}{2} + \frac{D}{2} \right). \quad (3)$$

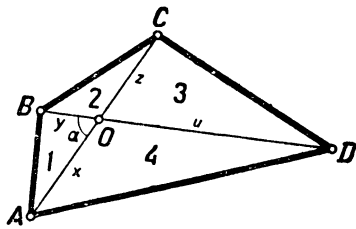
Из равенств (2) и (3) следует первое равенство (1), так как

$$\frac{A}{2} + \frac{B}{2} = \pi - \left(\frac{C}{2} + \frac{D}{2} \right) \text{ и } \sin \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2} \right) = \sin \left(\frac{C}{2} + \frac{D}{2} \right).$$

Аналогично устанавливается второе равенство.



Черт. 227



Черт. 228

6. Доказать, что площадь S четырехугольника равна половине произведения длин диагоналей на синус угла между ними.

Доказательство. Пусть $AC = a$, $BD = b$ и $\alpha = \angle AOB$ (черт. 228).

Точка пересечения диагоналей делит каждую диагональ на две части: $a = x + z$, $b = y + u$. Разбив четырехугольник на 4 треугольника, получим

$$\text{пл. } \triangle_1 = \frac{1}{2} xy \sin \alpha; \quad \text{пл. } \triangle_4 = \frac{1}{2} yz \sin (\pi - \alpha) = \frac{1}{2} yz \sin \alpha,$$

$$\text{пл. } \triangle_3 = \frac{1}{2} zu \sin \alpha; \quad \text{пл. } \triangle_2 = \frac{1}{2} xu \sin \alpha,$$

откуда

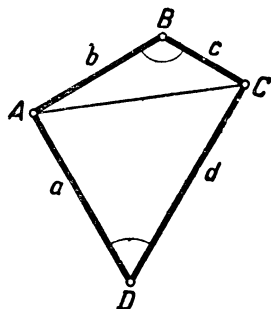
$$S = \frac{1}{2} \sin \alpha (xy + yz + zu + xu) = \frac{1}{2} (x + z) (y + u) \sin \alpha = \frac{1}{2} ab \sin \alpha,$$

ч т д.

7. Доказать, что из всех четырехугольников $ABCD$ с данными сторонами $AB = b$, $BC = c$, $CD = d$, $DA = a$ наибольшую площадь имеет четырехугольник, который может быть вписан в круг.

Задачу можно кинематически интерпретировать следующим образом: пусть $ABCD$ — данный шарнирный четырехугольник, т. е. четырехугольник, составленный из стержней данной длины a , b , c , d , последовательно скрепленных в концах в заданном порядке, так что эти стержни, оставаясь в одной плоскости, могут вращаться вокруг вершин. Требуется установить, при каком условии площадь шарнирного четырехугольника будет наибольшей.

Доказательство. Разобьем четырехугольник $ABCD$ диагональю AC на два треугольника (черт. 229); имеем



Черт. 229

$$S = \text{пл. } \triangle ABC + \text{пл. } \triangle ACD = \frac{1}{2} (bc \sin B + ad \sin D). \quad (1)$$

Для преобразования полученного выражения найдем (по теореме косинусов) AC^2 из двух треугольников ABC и ACD :

$$AC^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos B = a^2 + d^2 - 2ad \cos D, \quad (2)$$

из (1) и (2) получим соответственно:

$$bc \sin B + ad \sin D = 2S;$$

$$bc \cos B - ad \cos D = \frac{1}{2} (b^2 + c^2 - a^2 - d^2).$$

Возведем почленно в квадрат и сложим; после преобразований получим:

$$16S^2 = 4(b^2c^2 + a^2d^2) - 8abcd \cos (B + D) - (b^2 + c^2 - a^2 - d^2)^2$$

Наибольшее значение для $16S^2$, а следовательно, и для S , получится, когда $\cos (B + D)$ имеет наименьшее значение. Наименьшее значение $\cos (B + D)$ есть -1 , при $B + D = \pi$, что имеет место для вписанного четырехугольника.

§ 68. Применение тригонометрии к стереометрическим задачам

При помощи тригонометрии решаются разнообразные стереометрические задачи, как, например, установление соотношений между углами (плоскими и двугранными) в различных пространственных конфигурациях, вычисление элементов многогранника (дан-

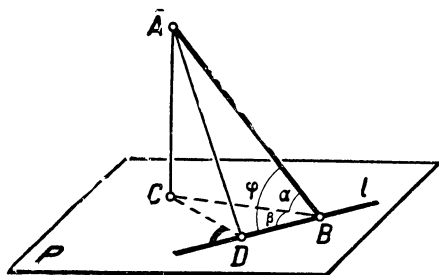
ного вида) по достаточному числу заданных его элементов, вычисление элементов тел вращения, вычисление площадей плоских сечений в данных телах и т. п. Методы решения этих задач могут быть самыми разнообразными.

Никаких общих принципов решения стереометрических задач установить невозможно; различные частные случаи этих задач показаны ниже на примерах.

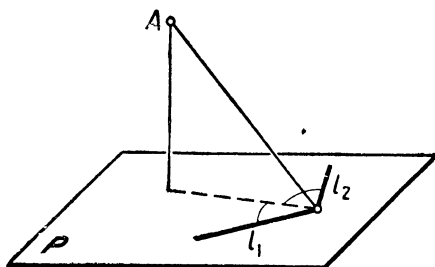
Примеры.

1. В плоскости P проведена прямая l под углом β (где $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$) к проекции на плоскость P наклонной, образующей угол α с плоскостью P . Вычислить угол φ между прямой и наклонной.

Решение. Без ущерба для общности будем считать, что прямая l проходит через основание наклонной. Пусть $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, точка B — основа-



Черт. 230



Черт. 231

ние наклонной, AB — произвольный отрезок наклонной, AD — перпендикуляр к прямой l , проведенный из точки A , C — проекция точки A на P (черт. 230).

Имеем:

$$BC = AB \cos \alpha, \quad BD = BC \cos \beta$$

(так как $CD \perp BD$),

$$BD = AB \cos \varphi$$

Откуда получим

$$\cos \varphi = \cos \alpha \cos \beta. \quad (1)$$

В предельных случаях при $\beta = 0$ и $\beta = \frac{\pi}{2}$ рассуждения неприменимы, так как при этих значениях треугольник CBD не существует, однако формула (1) остается в силе. В самом деле, при $\beta = 0$ имеем $\varphi = \alpha$, а при $\beta = \frac{\pi}{2}$ имеем $\varphi = \frac{\pi}{2}$, в обоих случаях равенство (1) остается в силе.

Примечание. Формула (1) может применяться при решении различных стереометрических задач.

Следствие 1. Если прямые l_1 и l_2 в плоскости P образуют равные углы, $\beta_1 = \beta_2$ с проекцией наклонной, то эти прямые образуют равные углы с наклонной (черт. 231).

В самом деле,

$$\cos \varphi_1 = \cos \alpha \cos \beta_1 = \cos \alpha \cos \beta_2 = \cos \varphi_2,$$

откуда

$$\varphi_1 = \varphi_2.$$

Следствие II. Если две прямые l_1 и l_2 в плоскости P образуют равные углы с наклонной, то они образуют равные углы с ее проекцией.

Если $\varphi_1 = \varphi_2$, то

$$\cos \beta_1 = \frac{\cos \varphi_1}{\cos \alpha} = \frac{\cos \varphi_2}{\cos \alpha} = \cos \beta_2 \quad \text{и} \quad \beta_1 = \beta_2.$$

2. Доказать теорему. Площадь проекции фигуры F в плоскости P на плоскость Q равна произведению площади F на косинус двугранного угла, образованного плоскостями P и Q .*

Доказательство. Пусть F_1 — проекция фигуры F на плоскость Q (черт. 232), φ — угол между плоскостями P и Q , требуется доказать, что

$$\text{пл. } F_1 = \text{пл. } F \cos \varphi.$$

Если $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то $P \perp Q$, в этом

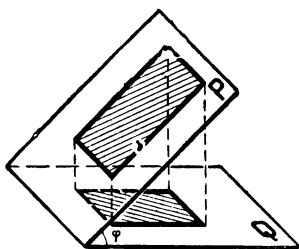
случае $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и $\cos \varphi = 0$, фигура F_1

вырождается в некоторое множество точек, лежащих на линии пересечения P и Q , поэтому пл. $F_1 = 0$.

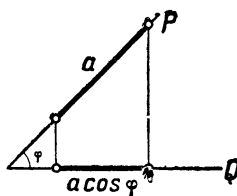
Таким образом, формула (1) справедлива.

Пусть $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Рассмотрим сначала частный случай, когда F_1 есть квадрат, одна из сторон которого параллельна линии пересечения плоскостей P и Q . Если a — сторона квадрата, то пл. $F = a^2$; фигура F_1 есть прямоугольник со сторонами, равными a и $a \cos \varphi$. Следовательно (черт. 233),

$$\text{пл. } F_1 = a \cos \varphi \cdot a = a^2 \cos \varphi = \text{пл. } F \cdot \cos \varphi.$$



Черт. 232



Черт. 233

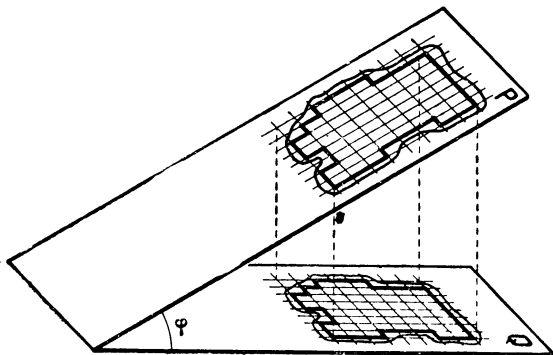
Пусть F — произвольная (квадрируемая) фигура. Рассмотрим на плоскости P две системы параллельных прямых; прямые первой системы параллельны линии l пересечения плоскостей P и Q и удалены друг от друга на расстояние a ; прямые другой системы перпендикулярны линии l и удалены

* Фигура F предполагается к в а д р и р у е м о й.

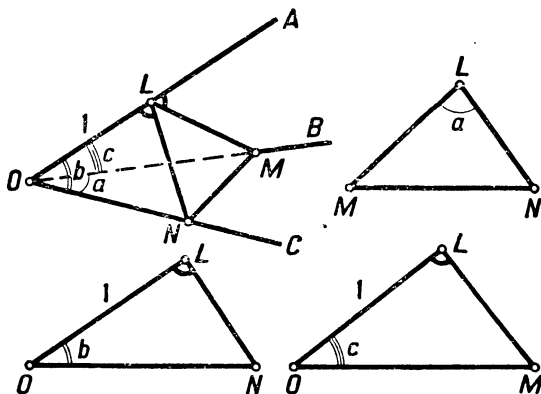
друг от друга на то же расстояние. Плоскость P разобьется рассматриваемыми прямыми на бесконечное множество конгруэнтных квадратов со стороной, равной a . Множество всех квадратов, внутренних относительно фигуры F , образует многоугольник Π , содержащийся внутри F . Согласно определению площади,

$$\lim_{a \rightarrow 0} \text{пл } \Pi = \text{пл } F.$$

Квадраты, на которые разбита плоскость P , спроектируются на плоскость Q в виде прямоугольников со сторонами, равными a и $a \cos \varphi$ (черт. 234).



Черт. 234



Черт. 235

Множество всех рассматриваемых прямоугольников, содержащихся внутри фигуры F_1 , образует многоугольник Π_1 , являющийся проекцией многоугольника Π . Площадь фигуры F_1 есть предел площади многоугольника Π_1 :

$$\text{пл } F_1 = \lim (\text{пл } \Pi_1) = \lim (\text{пл } \Pi \cos \varphi) = \cos \varphi \lim (\text{пл } \Pi) = \cos \varphi \text{ пл } F.$$

3. Плоские углы трехгранного угла равны a , b , c ; вычислить двугранные углы

Решение Пусть A , B и C — двугранные углы, противолежащие углам a , b и c соответственно (черт. 235). Пусть L — точка, взятая на ребре угла A ; положим для простоты $OL = 1$. Проведем через точку L плоскость,

перпендикулярную ребру угла OA . Эта плоскость может пересекать либо сами ребра OB и OC (каждое), либо их продолжения, либо может не пересекать (хотя одно из них). В соответствии со сказанным следует отдельно рассмотреть все возможные случаи.

Предположим, что углы b и c острые, тогда плоскость пересекает ребра OB и OC ; в сечении трехгранного угла получится треугольник LMN , в котором $\angle NLM = A$. Из треугольника LMN найдем

$$NM^2 = LN^2 + LM^2 - 2LN \cdot LM \cos A.$$

Из треугольника OMN найдем

$$NM^2 = ON^2 + OM^2 - 2ON \cdot OM \cos a.$$

Приравняем полученные два выражения для NM^2 :

$$LN^2 + LM^2 - 2LN \cdot LM \cos A = ON^2 + OM^2 - 2ON \cdot OM \cos a.$$

Приняв во внимание, что

$$ON^2 - LN^2 = 1, \quad OM^2 - LM^2 = 1.$$

перепишем полученное равенство в следующем виде (сократив все члены на 2):

$$\cos A = \frac{ON}{LN} \cdot \frac{OM \cos a}{ML} - \frac{1}{LN \cdot LM}.$$

Приняв во внимание, что

$$NL = ON \sin b, \quad ML = OM \sin c, \quad \frac{1}{LN} = \operatorname{ctg} b, \quad \frac{1}{LM} = \operatorname{ctg} c,$$

получим

$$\cos A = \frac{1}{\sin b \sin c} \cos a - \operatorname{ctg} b \operatorname{ctg} c,$$

или

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}. \quad (1)$$

Если угол b — тупой, а c — острый, то плоскость пересечет продолжение ребра OC . В этом случае

$$\begin{aligned} \angle NLM &= \pi - A, \quad \angle NOL = \pi - b, \\ \angle NOM &= \pi - a. \end{aligned}$$

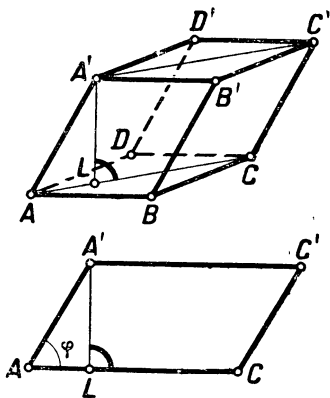
Нетрудно убедиться (подробности представляем учащимся), что формула (1) останется в силе.

Аналогично устанавливается справедливость формулы (1) в случаях, когда угол b — острый, а c — тупой или оба угла b и c — тупые.

Случай, когда хотя бы один из углов b или c — прямой, предлагаем рассмотреть учащимся в виде упражнения.

4. Грани параллелепипеда суть равные между собой ромбы и расположенные так, что встречаются вместе три плоских острых угла. Вычислить объем параллелепипеда, если сторона ромба равна a , а острый угол равен α .

Решение. Пусть $ABCD A' B' C' D'$ — данный параллелепипед, через A обозначена одна из вершин, при которой три плоских угла равны (черт. 236). Прямые AB и AD в плоскости основания образуют равные углы



Черт. 236

с наклонной AA' к этой плоскости. Поэтому проекцией AA' является биссектриса угла BAD , т. е. диагональ основания (см. задачу 1, стр. 412). Пусть φ — угол наклона AA' к плоскости основания, тогда имеем

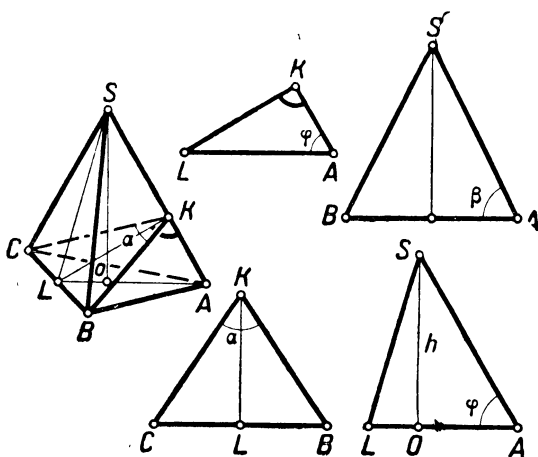
$$\cos \varphi = \frac{\cos \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}}.$$

Из прямоугольного треугольника $AA'L$ найдем высоту h параллелепипеда:

$$\begin{aligned} h &= a \sin \varphi = a \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = a \sqrt{1 - \left(\frac{\cos \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right)^2} = \\ &= \frac{a}{\cos \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\sin \frac{3}{2} \alpha \sin \frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$V = a^2 \sin \alpha \frac{a}{\cos \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\sin \frac{3}{2} \alpha \sin \frac{\alpha}{2}} = 2a^3 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\sin \frac{3}{2} \alpha \sin \frac{\alpha}{2}}.$$



Черт. 237

Параллелепипед указанного в условии вида можно построить при произвольных a и α , удовлетворяющих неравенствам $a > 0$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Это и есть область определения задачи.

При $\alpha \rightarrow 0$ параллелепипед вырождается в отрезок.

5. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a , двугранный угол между боковыми гранями равен α ; вычислить объем и боковую поверхность пирамиды

Р е ш е н и е (черт. 237). Проведем плоскость $СКВ$, перпендикулярную

ребру SA , тогда $\angle CKB = \alpha$. Пусть KL — высота треугольника CKB . Из прямоугольного треугольника LKB найдем:

$$KL = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

Из прямоугольного треугольника AKL найдем угол φ между ребром SA и плоскостью основания:

$$\sin \varphi = \frac{KL}{LA} = \frac{\frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

Сторона основания AB образует с проекцией ребра AS угол $\frac{\pi}{6}$, следовательно, можно найти угол β между ребрами SA и AB (см. задачу 1):

$$\cos \beta = \cos \varphi \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3} \cos \varphi}{2}.$$

Зная угол β и сторону a основания, найдем боковую поверхность пирамиды:

$$S = \frac{3}{2} a \frac{a}{2} \operatorname{tg} \beta = \frac{3}{4} a^2 \operatorname{tg} \beta.$$

Из треугольника OSA найдем высоту пирамиды $h = OS = OA \operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \varphi$ и вычислим ее объем:

$$V = \frac{1}{3} \text{пл. } ABC \cdot h = \frac{a^3}{12} \operatorname{tg} \varphi.$$

Для получения окончательного результата надо исключить вспомогательные углы φ и β ; имеем:

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \sqrt{1 - \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{6} - \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \\ &= \frac{2 \sqrt{\sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6} \right)}}{\sqrt{3} \left| \sin \frac{\alpha}{2} \right|} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{3} \sin \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \sin \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6} \right)}^*; \end{aligned}$$

* Знак абсолютной величины излишен, ибо $0 < \alpha < \pi$ и $\sin \frac{\alpha}{2} > 0$.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta &= \frac{\sqrt{1 - \frac{3}{4} \cos^2 \varphi}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi} = \frac{\sqrt{1 - \frac{3}{4} \left(1 - \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}{3}\right)}}{\sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \sin \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}} = \\ &= \frac{1}{2 \sqrt{\sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \sin \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}}. \end{aligned}$$

Окончательно получим следующие выражения для боковой поверхности и объема:

$$\begin{aligned} S &= \frac{3a^2}{8 \sqrt{\sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \sin \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}}, \\ V &= \frac{a^3 \cos \frac{\alpha}{2}}{24 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sqrt{\sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \sin \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}}. \end{aligned}$$

Для выполнения основного исследования рассмотрим полученные формулы.

Из геометрического смысла α следует, что $0 < \alpha < \pi$. При этом условия значения S и V положительны, если

$$\sin \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6}\right) > 0,$$

откуда $\frac{\pi}{3} < \alpha < \pi$. Это же ясно и из геометрических соображений так как $\angle CKB > \angle CAB = \frac{\pi}{3}$.

Если $\alpha > 0$, $\frac{\pi}{3} < \alpha < \pi$, то соответствующую пирамиду можно построить. Исследование формулы дало истинную область определения задачи.

В качестве дополнительного исследования рассмотрим вырожденные фигуры.

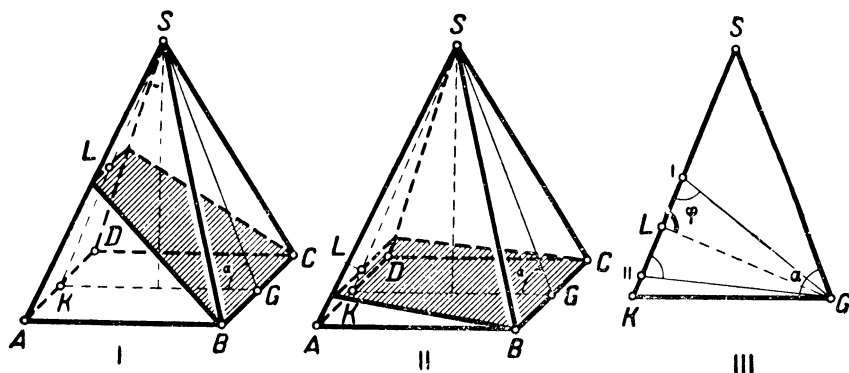
При $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{3}$ пирамида вырождается в ограниченную снизу и неограниченную сверху призму; имеем:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{3}} S = +\infty \quad \text{и} \quad \lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{3}} V \rightarrow +\infty.$$

При $\alpha \rightarrow \pi$ пирамида вырождается в плоскую фигуру — в правильный (сдвоенный) треугольник со стороной основания a . В этом предельном случае имеем:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pi} S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \quad \text{и} \quad \lim_{\alpha \rightarrow \pi} V = 0.$$

6. В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при основании равен α ; через ребро этого угла проведена плоскость, образующая с апофемой противоположной боковой грани угол φ . Вычислить площадь сечения.



Черт. 238

Решение. Возможны два расположения секущей плоскости (черт. 238, I и черт. 238, II).

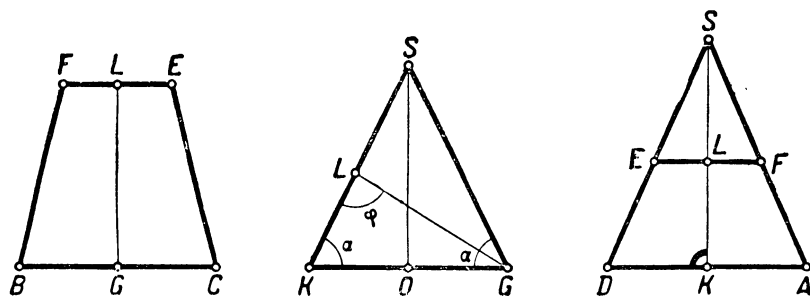
Рассмотрим сначала расположение I.

В сечении получается трапеция $BEFC$ (доказать!).

Через высоту SO пирамиды проведем сечение SGK , перпендикулярное ребру BC , отрезок GL есть высота трапеции $BEFC$.

На чертеже 239 представлены отдельно сечения $BFEC$ и SKG и грань SAD :

$$\angle LKG = \alpha, \quad \angle KLG = \varphi, \quad \angle LGK = \pi - (\alpha + \varphi).$$



Черт. 239

Из треугольника KLK найдем

$$LG = \frac{KG}{\sin \angle KLG} \sin \alpha = \frac{a \sin \alpha}{\sin \varphi}.$$

Треугольники SAD и SFE подобны, следовательно,

$$\frac{EF}{AD} = \frac{SL}{SK}, \quad \text{откуда} \quad FE = \frac{AD(SK - KL)}{SK}.$$

Имеем: 1) $AD = a$;

$$2) SK = \frac{a}{2 \cos \alpha} \quad (\text{из треугольника } SKO);$$

$$3) KL = \frac{a \sin(\varphi + \alpha)}{\sin \varphi} \quad (\text{из треугольника } KLG).$$

Искомая площадь сечения равна

$$P = \frac{1}{2} LG (BC + EF) = \frac{1}{2} \left[BC + \frac{AD(SK - KL)}{SK} \right] LG;$$

после подстановки и преобразований получим

$$P = - \frac{a^2 \cos(\varphi + \alpha) \sin^2 \alpha}{\sin^2 \varphi}. \quad (I)$$

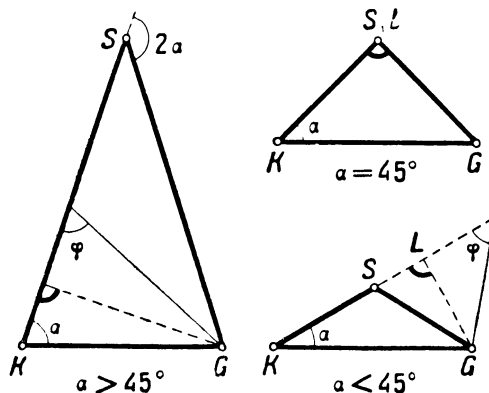
Для расположения II все рассуждения остаются в силе, но угол φ следует заменить на $\pi - \varphi$:

$$P = \frac{a^2 \cos(\alpha - \varphi) \sin^2 \alpha}{\sin^2 \varphi}. \quad (II)$$

Рассмотрим условия, при которых существуют сечения вида I. Эти сечения существуют, если $\angle KSG = 180^\circ - 2\alpha < 90^\circ$, т. е. если $45^\circ < \alpha < 90^\circ$.

Допустимые значения для углов α и φ определяются неравенствами (черт. 240)

$$180^\circ - 2\alpha < \varphi < 90^\circ; \quad 45^\circ < \alpha < 90^\circ.$$



Черт. 240

Сечения вида (II) существуют (черт. 241),

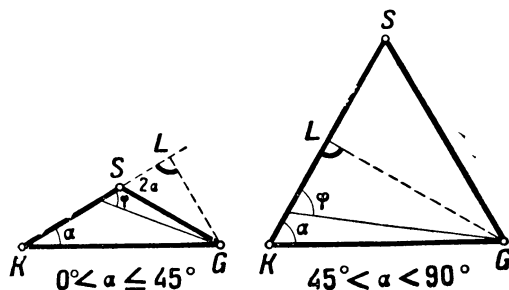
$$\text{если} \quad \begin{cases} 0 < \alpha \leq 45^\circ & \text{при } \alpha < \varphi < 2\alpha; \\ 45^\circ < \alpha < 90^\circ & \text{при } \alpha < \varphi < 90^\circ. \end{cases}$$

Основное исследование, заключающееся в установлении условий, при которых существуют рассматриваемые сечения, проведены геометрическими средствами. В данном случае исследование формулы не даст истинной области определения задачи. Так, например, формула (I) при $0 < \alpha < 90^\circ$ и $0 < \varphi < 90^\circ$ имеет смысл и дает положительные значения для P , если

$$90^\circ - \alpha < \varphi < 90^\circ.$$

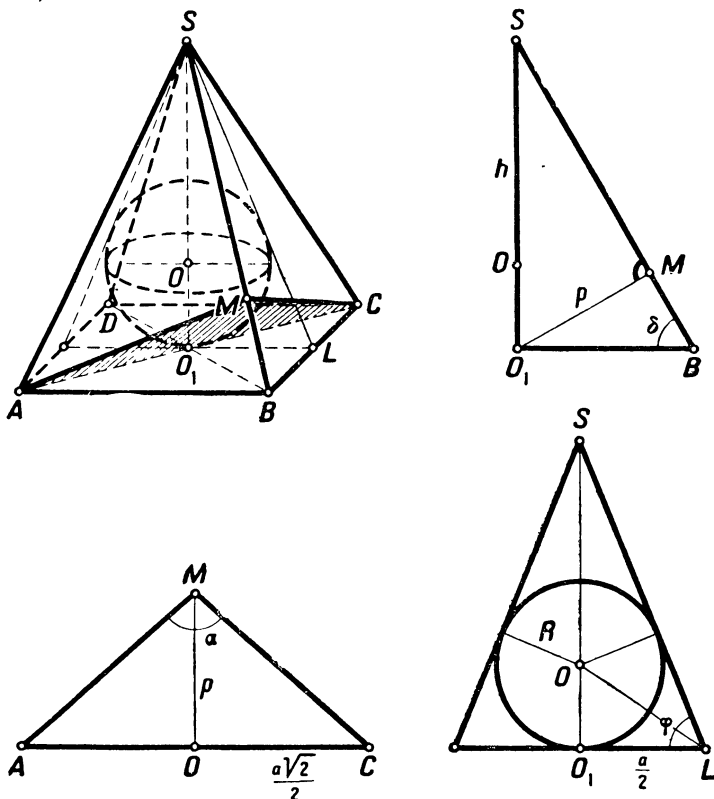
Этим условиям удовлетворяет, например, пара значений: $\alpha = 30^\circ$, $\varphi = 80^\circ$, однако при $\alpha = 30^\circ$ сечений вида I не существует.

7. В правильную четырехугольную пирамиду вписан шар радиуса R . Вычислить боковую поверхность пирамиды, если двугранный угол между боковыми гранями равен α .



Черт. 241

Решение. Пусть O — центр шара, вписанного в пирамиду $SABCD$, а O_1 — центр основания пирамиды; через диагональ основания проведем сечение AMC плоскостью, перпендикулярной ребру SB ; имеем $\angle AMC = \alpha$ (черт. 242).



Черт. 242

Рассмотрим сечение пирамиды плоскостью, проходящей через высоту пирамиды и через боковое ребро SB , и сечение плоскостью O_1SL , проходящей через высоту пирамиды и перпендикулярной стороне основания BC .

Обозначим: $h = O_1S$ — высота пирамиды, $p = O_1M$, $\varphi = \angle SLO_1$ — угол наклона боковой грани к основанию, $\delta = \angle SBO_1$ — угол наклона бокового ребра к основанию, a — сторона основания.

Имеем последовательно:

$$a = 2R \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \quad (\text{из треугольника } LOO_1);$$

$$h = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \varphi = \frac{a \sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} \delta \quad (\text{из треугольников } SO_1L \text{ и } SO_1B).$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{2} \operatorname{tg} \delta,$$

$$p = \frac{a \sqrt{2}}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{a \sqrt{2}}{2} \sin \delta \quad (\text{из треугольников } OMC \text{ и } O_1MB).$$

Следовательно,

$$\sin \delta = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

Проекцией боковой поверхности является основание, а так как все четыре боковые грани наклонены к основанию под одним и тем же углом φ , то (см. пример 2, стр. 414)

$$S_{\text{бок}} = \frac{a^2}{\cos \varphi} = \frac{4R^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}}{\cos \varphi};$$

исключим вспомогательный угол φ :

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \delta}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + 2 \frac{\sin^2 \delta}{1 - \sin^2 \delta}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}}} = \sqrt{-\cos \alpha}, \end{aligned}$$

$$\operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{1 + \cos \varphi}{1 - \cos \varphi} = \frac{1 + \sqrt{-\cos \alpha}}{1 - \sqrt{-\cos \alpha}},$$

Следовательно,

$$S_{\text{бок}} = \frac{4R^2 (1 + \sqrt{-\cos \alpha})}{(1 - \sqrt{-\cos \alpha}) (\sqrt{-\cos \alpha})}.$$

Для нахождения допустимых значений α обратимся к полученной формуле. По смыслу задачи $0 < \alpha < \pi$. Значение $S_{\text{бок}}$ положительно, если $\cos \alpha < 0$, откуда $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Из геометрического рассмотрения фигуры следует, что при $R > 0$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ рассматриваемая пирамида существует.

В данном случае исследование формулы дает истинную область определения задачи.

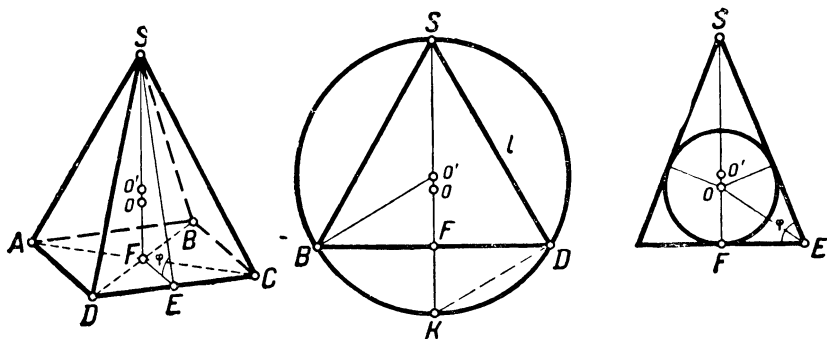
В качестве дополнительного исследования рассмотрим вырожденные фигуры.

При данном $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$ пирамида вырождается в ограниченную снизу и неограниченную сверху призму:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} S_{\text{бок}} = +\infty$$

При $\alpha \rightarrow \pi$ поверхность пирамиды вырождается (при данном R) в пару параллельных плоскостей $\lim_{\alpha \rightarrow \pi} S_{\text{бок}} = +\infty$.

8 Вычислить двугранный угол между основанием и боковой гранью правильной четырехугольной пирамиды, если отношение радиуса описанного шара к радиусу вписанного шара равно n (черт. 243).



Черт. 243

Решение. Пусть φ — искомый угол, R и r — радиусы описанного и вписанного шаров, h — высота пирамиды, l — боковое ребро, a — сторона основания, O — центр вписанного и O' описанного шаров.

Из прямоугольного треугольника SKD найдем:

$$(SD)^2 = SK \cdot SF \quad \text{или} \quad l^2 = 2Rh \quad \text{и} \quad R = \frac{l^2}{2h} \quad (1)$$

Из треугольника SEF найдем:

$$SF = EF \operatorname{tg} \varphi \quad \text{или} \quad h = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \varphi.$$

Из треугольника SDF найдем:

$$SD^2 = DF^2 + SF^2 \quad \text{или} \quad l^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2 + h^2.$$

Подставив в равенство $R = \frac{l^2}{2h}$, получим:

$$R = \frac{\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} \operatorname{tg}^2 \varphi}{a \operatorname{tg} \varphi} = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \varphi + \frac{a}{4} \operatorname{tg} \varphi.$$

Из треугольника OFE найдем:

$$OF = EF \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \quad \text{или} \quad r = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}.$$

По условию

$$R = nr \quad \text{или} \quad \operatorname{ctg} \varphi + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi = n \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}.$$

Выполнив универсальную подстановку $t = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$, получим биквадратное уравнение:

$$(2n + 1)t^4 - 2nt^2 + 1 = 0.$$

Согласно геометрическому смыслу задачи, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, а потому $0 < t < 1$. Определим значения параметра n , при которых квадратное уравнение

$$(2n + 1)z^2 - 2nz + 1 = 0 \quad (2)$$

имеет корни (хотя бы один), содержащиеся в интервале $(0, 1)$. Корни уравнения (2) действительны, если

$$n^2 - (2n + 1) \geq 0 \quad \text{или} \quad n^2 - 2n - 1 \geq 0,$$

и так как по смыслу задачи $n > 0$, то

$$1 + \sqrt{2} \leq n < +\infty.$$

При этом условии оба корня уравнения (2) положительны. Подставив в левую часть (2) $z = 1$, получим положительный результат $f(1) = 2 > 0$. Следовательно, число 1 лежит вне интервала корней, т. е.

$$\text{либо } 0 < z_1 < z_2 < 1, \quad \text{либо } 1 < z_1 < z_2.$$

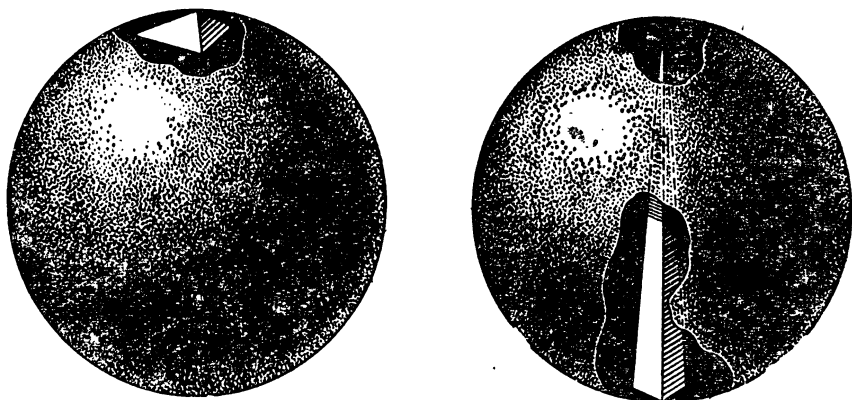
Так как при $n > 0$ выполняется неравенство $\frac{n}{2n+1} < 1$, то имеет место первое расположение. Следовательно, при $n < 1 + \sqrt{2}$ задача не имеет решений, при $n > 1 + \sqrt{2}$ задача имеет два решения:

$$\varphi_{1,2} = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{n \pm \sqrt{n^2 - 2n - 1}}{2n + 1}}.$$

При $n = 1 + \sqrt{2}$ задача имеет единственное решение:

$$\varphi = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\sqrt{2} - 1}.$$

При этом значении φ отношение радиусов n имеет наименьшее значение. При $n \rightarrow -\infty$ (для определенности считаем R данным) получим предельные случаи (черт. 244). $\lim \varphi_1 = 0$ и $\lim \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$, соответствующие вырождению пирамиды в точку и в отрезок.



Черт. 244

§ 69. Понятие о геодезических задачах

Методы тригонометрии находят широкое применение при решении различных практических задач по производству измерений на местности, как, например, вычисление расстояния между различными пунктами земной поверхности, если это расстояние нельзя измерить непосредственно, вычисление высоты данного предмета (горы, здания и т. п.), составление планов и карт и т. д.

Описание необходимых измерительных инструментов, правил пользования ими, учет погрешностей, пользование различными геодезическими таблицами и различные способы практического выполнения измерений излагаются в курсах геодезии. Ниже мы рассмотрим ряд простейших геодезических задач с точки зрения их математического содержания. Мы будем предполагать, что измерения производятся на достаточно малом участке земной поверхности, так что эту поверхность можно считать плоской и не учитывать ее кривизны.

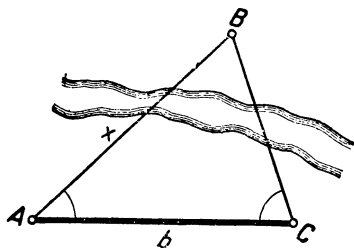
Задача 1. *Вычислить расстояние от доступной точки A до некоторой недоступной точки B , видимой из точки A .*

Р а з ъ я с н е н и е: точка A доступная — это значит, что в ней может находиться наблюдатель вместе с измерительными инструментами. Кроме того, будем предполагать, что доступной является не только точка A , но и некоторая область — доступная местность, — содержащая точку A . Будем считать, что всякая точка C доступной местности видима из точки A и что расстояние

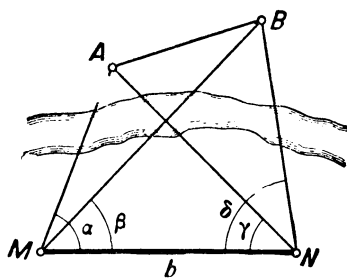
AC может быть измерено непосредственно. Точка B недоступная — это значит, что она отделена от точки A некоторым препятствием, так что расстояние AB не может быть измерено непосредственно (черт. 245).

Решение. Выберем в доступной местности точку C , из которой видима точка B . Измерив отрезок-базис $AC = b$ и углы BAC и BCA , сведем задачу к решению треугольника по стороне и прилежащим углам:

$$\frac{x}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}, \quad \text{откуда} \quad x = \frac{b \sin C}{\sin (A + C)}.$$



Черт. 245



Черт. 246

Задача 2. Вычислить расстояние между двумя недоступными точками A и B , видимыми из доступной местности (черт. 246).

Решение. Выберем в доступной местности базис $MN = b$. Измерим базис и углы $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ между базисом и направлениями на точки A и B из его концов. Для вычисления расстояния x вычислим расстояния MA и MB (см. предыдущую задачу):

$$MA = \frac{b \sin \gamma}{\sin (\alpha + \gamma)}, \quad MB = \frac{b \sin \delta}{\sin (\beta + \delta)}.$$

Зная две стороны MA и MB треугольника MAB и угол между ними $\alpha - \beta$, можно вычислить третью сторону $x = AB$. Можно, например, воспользоваться формулой

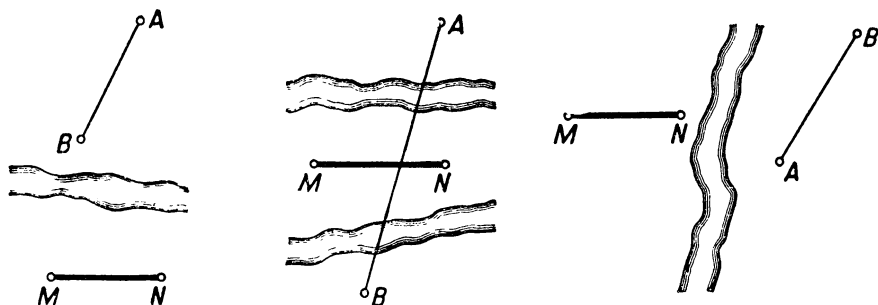
$$x^2 = MA^2 + MB^2 - 2MA \cdot MB \cos (\alpha - \beta).$$

Примечание. Для вычисления x можно воспользоваться треугольником NAB :

$$x = NA^2 + NB^2 - 2NA \cdot NB \cos (\delta - \gamma).$$

Вычисление искомого расстояния двумя различными путями является одним из надежных способов контроля.

Предлагаем в виде упражнения рассмотреть случаи различного взаимного расположения базиса и измеряемого отрезка (черт. 247).



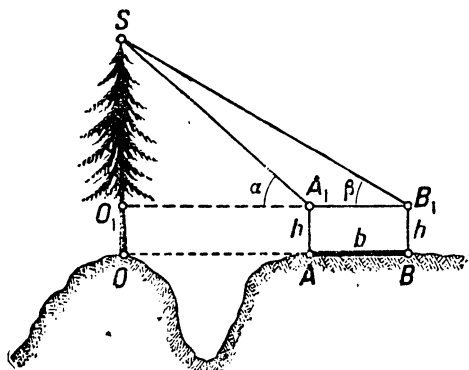
Черт 247

Задача 3. Вычислить высоту вертикального предмета, основание которого недоступно.

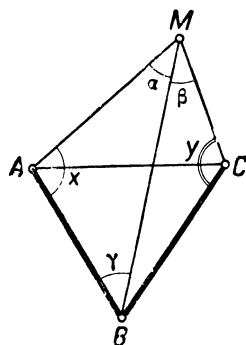
Решение. Задача решается просто, если можно выбрать горизонтальный базис AB , из концов которого видна вершина измеряемой высоты OS (черт. 248) и который находится в одной вертикальной плоскости с этой высотой на уровне ее основания.

Пусть h — высота угломерного инструмента. Вычислив углы α и β (см. черт. 245), из треугольника SA_1B_1 найдем:

$$A_1 S = \frac{b \sin \beta}{\sin (\alpha - \beta)} \quad \text{и} \quad OS = h + A_1 S \sin \alpha.$$



Черт. 248



Черт. 249

Задача Потенота. Известны три опорные пункта A , B и C , которые нанесены на план. Из некоторой точки M измерены углы α и β , под которыми видны отрезки AB и BC (черт 249). Нанести на план точку M .

Предполагается, что точки A , B и C , расположенные в горизонтальной плоскости на местности, даны (например, специально сооруженные и издалека видимые геодезические знаки) и все элементы базисного треугольника ABC измерены с надлежащей степенью точности. Решение задачи Потенота позволяет найти положение пункта M , из которого видны вершины базисного треугольника и который лежит в плоскости этого треугольника. Для нанесения на план точки M достаточно знать углы $x = \angle MAB$ и $y = \angle BCM$. В соответствии со сказанным задача Потенота геометрически формулируется так: *Известны стороны четырехугольника $ABCM$: $AB = a$, $BC = b$ и угол между ними $\angle ABC = \gamma$. Кроме того, известны углы, образованные диагональю BM со сторонами AM и CM : $\angle AMB = \alpha$, $\angle BMC = \beta$, вычислить углы x и y при вершинах A и C .*

Решение. Из треугольников ABM и BMC имеем:

$$BM = a \frac{\sin x}{\sin \alpha} = b \frac{\sin y}{\sin \beta}.$$

Сумма углов четырехугольника равна 360° , а потому

$$x + y = 360^\circ - (\alpha + \beta + \gamma). \quad (1)$$

Для нахождения x и y получим систему двух уравнений (1) и (2)

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta}. \quad (2)$$

Введем вспомогательный угол φ , положив

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta}; \quad \varphi = \arctg \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta}.$$

и составим из (2) производную пропорцию:

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{\operatorname{tg} \varphi - 1}{\operatorname{tg} \varphi + 1} \quad \text{или} \quad \frac{\operatorname{tg} \frac{x-y}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x+y}{2}} = \operatorname{tg}(\varphi - 45^\circ),$$

откуда

$$\operatorname{tg} \frac{x-y}{2} = \operatorname{tg}(\varphi - 45^\circ) \operatorname{tg} \frac{x+y}{2}. \quad (3)$$

Из последнего соотношения в силу (1) получим:

$$x - y = 2 \arctg \left[\operatorname{tg}(45^\circ - \varphi) \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \right].$$

Это уравнение и (1) составляют линейную систему для нахождения x и y .

Особому рассмотрению подлежит случай, когда $\frac{x+y}{2} = 90^\circ$, тогда невозможен переход к уравнению (3). В этом особом случае

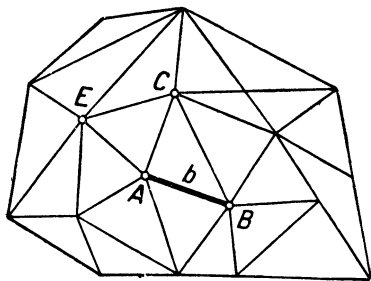
$$x + y = 180^\circ, \text{ а значит } \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Следовательно, вокруг четырехугольника $MABC$ можно описать окружность. Пусть R — радиус описанной окружности, тогда

$$BM = 2R \sin x = 2R \sin y, \quad a = 2R \sin \alpha, \quad b = 2R \sin \beta.$$

В данном случае уравнение (2) есть следствие уравнения (1). Задача имеет бесконечное множество решений, тогда M может занимать произвольное положение на описанной около треугольника ABC окружности.

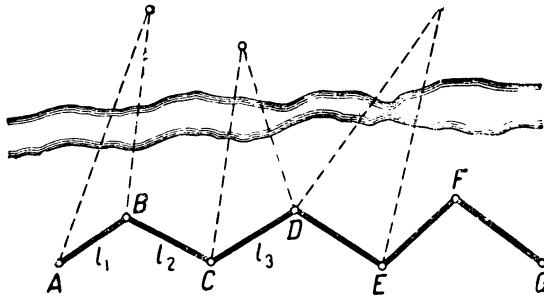
Понятие о триангуляции. Способ триангуляции заключается в *разбиении местности, на которой производятся измерения, на треугольники* таким образом, что каждый пункт рассматриваемой местности принадлежит хотя бы одному треугольнику и каждые два треугольника не могут иметь общих внутренних точек, а могут иметь лишь общую сторону либо общую вершину. На чертеже 250 представлено разбиение многоугольного участка на треугольники, это разбиение называется *тригонометрической сетью*, а вершины треугольников, входящих



Черт. 250

в состав сети, — *тригонометрическими пунктами*. При съемке планов больших участков из каждого данного тригонометрического пункта могут не быть видимы все прочие пункты, однако необходимо, чтобы с каждого пункта были видимы не менее четырех соседних пунктов. Примем сторону AB одного из треугольников за базис и измерим ее непосредственно. Помещая угломерные инструменты в различных вершинах треугольников сети, можно измерить их углы. Стороны треугольников, образующих сеть, могут быть найдены вычислением. Так, зная в треугольнике ABC углы и базис $b = AB$, можно вычислить стороны BC и AC . Зная в треугольнике ACE сторону AC и углы, можно вычислить стороны AE и CE и т. д. Стороны треугольников тригонометрической сети могут служить базисами при производстве измерений на более мелких участках. В случае надобности треугольники основной тригонометрической сети можно разбивать на более мелкие треугольники и строить более мелкую «вторичную» тригонометрическую сеть.

Понятие о полигонометрии. В полигонометрии в качестве геодезической опоры принимается некоторая ломаная линия. Предположим, что измерены расстояния между пунктами $A, B, C, D, E, F, G, \dots$, в таком случае звенья ломаной $ABC\dots$ могут служить базами для производства измерений на местности. Продолженная на местности ломаная $ABC\dots$ называется полигоном или магистралью (черт. 251).



Черт. 251

При составлении планов в геодезии широкое применение имеет метод координат.

Рассмотрим несколько простейших задач полигонометрии.

Если известны координаты (x_0, y_0) начальной точки A_0 , длина l_1 отрезка A_0A_1 и угол α_1 , который этот отрезок образует с прямой, принятой за ось абсцисс, то координаты конца отрезка A_0A_1 находятся по известным формулам:

$$x_1 = x_0 + l_1 \cos \alpha_1, \quad y_1 = y_0 + l_1 \sin \alpha_1.$$

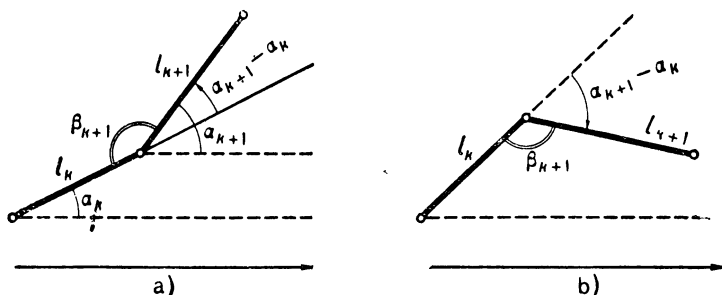
Если для полигона $A_0A_1\dots A_n$ известны длины его звеньев $l_1, l_2, \dots, l_n$, углы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, которые эти звенья образуют с осью абсцисс, и координаты (x_0, y_0) начальной точки A_0 , то координаты вершин вычисляются последовательно:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + l_1 \cos \alpha_1, & y_1 &= y_0 + l_1 \sin \alpha_1; \\ x_2 &= x_1 + l_2 \cos \alpha_2, & y_2 &= y_1 + l_2 \sin \alpha_2; \\ &\dots\dots\dots & & \\ x_n &= x_{n-1} + l_n \cos \alpha_n, & y_n &= y_{n-1} + l_n \sin \alpha_n. \end{aligned}$$

Если угломерным инструментом измерен угол β_{k+1} между звеном l_{k+1} и звеном l_k , то, как нетрудно видеть (черт. 252, а и б):

$$\alpha_{k+1} - \alpha_k = \beta_{k+1} \pm 180^\circ, \quad \text{откуда} \quad \alpha_{k+1} = \alpha_k + \beta_{k+1} \pm 180^\circ.$$

Задача. Известны координаты концов базиса $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$, измерены углы, под которыми произведена засечка пункта P (черт. 253). Вычислить координаты (x, y) этого пункта.



Черт. 252

Решение. Пусть φ — угол, который образует базис с осью абсцисс. Найдем (при данном расположении точек) угол, который образует отрезок AP с осью абсцисс.

$$\angle(AP, X) = \varphi + \alpha.$$

Имеем:

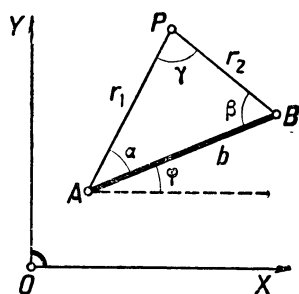
$$\left. \begin{aligned} x &= x_a + r_1 \cos(\varphi + \alpha) = x_a + r_1 (\cos \varphi \cos \alpha - \sin \varphi \sin \alpha), \\ y &= y_a + r_1 \sin(\varphi + \alpha) = y_a + r_1 (\sin \varphi \cos \alpha + \cos \varphi \sin \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Из треугольника ABP найдем:

$$\frac{r_1}{b} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)};$$

подставив в формулы (1), получим (после элементарных преобразований);

$$\begin{aligned} x &= x_a + \frac{(x_b - x_a) \operatorname{ctg} \alpha - (y_b - y_a)}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}, \\ y &= y_a + \frac{(x_b - x_a) + (y_b - y_a) \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}. \end{aligned}$$



Черт. 253

§ 70. О применениях тригонометрии к физике, механике, технике

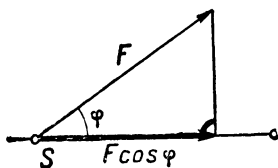
Тригонометрия имеет многочисленные практические применения, а также применения в научных дисциплинах, смежных с математикой. Важные применения находят, как вычисление элементов геометрических фигур, так и учение о тригонометрических функциях. Ниже приведен ряд примеров применения тригонометрии.

1. При разложении силы (или какой-либо другой векторной величины) на составляющие по двум (или трем в пространстве) взаимно перпендикулярным направлениям, приходится вычислять проекции силы на данные направления. Пусть под действием постоянной силы F тело движется прямолинейно, примером может служить движение тела по наклонной плоскости. Если сила образует с прямой, по которой движется тело, угол φ , то для вычисления работы следует найти проекцию силы F на прямую l (черт. 254)

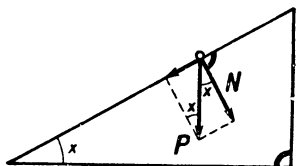
$$\text{пр}_l F = F \cos \varphi.$$

Если длина пути, пройденного телом по прямой l равна s , то соответствующая работа выразится формулой:

$$A = |F| s \cos \varphi.$$



Черт. 254



Черт. 255

Задача. Тело движется по наклонной плоскости под действием силы тяжести с ускорением в n раз меньшим ускорения, свободного падения, коэффициент трения равен k . Вычислить угол x , образованный наклонной плоскостью с горизонтом.

Решение. Разложим вес P данного тела на две взаимно перпендикулярные составляющие, одна из которых $N = P \cos x$ перпендикулярна наклонной плоскости (черт. 255). Другая составляющая, направленная вдоль наклонной плоскости, равна $P \sin x$. Сила трения f пропорциональна нормальной составляющей

$$f = kP \cos x.$$

Движение по наклонной плоскости происходит под действием силы $P \sin x - kP \cos x$ с ускорением, равным

$$\frac{P \sin x - kP \cos x}{m} = g(\sin x - k \cos x),$$

где m — масса тела, а g — ускорение силы тяжести. По условию

$$g(\sin x - k \cos x) = \frac{1}{n} g,$$

откуда получим уравнение

$$\sin x - k \cos x = \frac{1}{n}.$$

Введем вспомогательный угол, положив

$$\alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+k^2}},$$

тогда полученное уравнение примет вид:

$$\sin(x - \alpha) = \frac{1}{n\sqrt{1+k^2}}. \quad (1)$$

По смыслу задачи: $0 < k < 1$, $n > 1$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.
Уравнение (1) имеет решение в том и только в том случае, если

$$\frac{1}{n\sqrt{1+k^2}} \leq 1,$$

это последнее условие выполнено, так как $n > 1$. При данных допустимых значениях неизвестного и параметров

$$-\frac{\pi}{2} < x - \alpha < \frac{\pi}{2}, \text{ а потому}$$

$$x - \alpha = \arcsin \frac{1}{n\sqrt{1+k^2}} \quad \text{и} \quad x = \alpha + \arcsin \frac{1}{n\sqrt{1+k^2}},$$

Из условия $0 < x < \frac{\pi}{2}$ найдем:

$$\alpha + \arcsin \frac{1}{n\sqrt{1+k^2}} < \frac{\pi}{2}, \quad \text{или} \quad \alpha < \arccos \frac{1}{n\sqrt{1+k^2}},$$

или, что то же, $\arccos \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} < \arccos \frac{1}{n\sqrt{1+k^2}}$,

откуда

$$\frac{1}{\sqrt{1+k^2}} > \frac{1}{n\sqrt{1+k^2}};$$

это условие выполнено, так как $n > 1$.

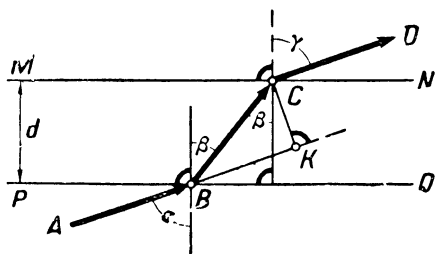
Итак, имеем:

$$\begin{aligned} x &= \arccos \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} + \arcsin \frac{1}{n\sqrt{1+k^2}} = \\ &= \arcsin \left(\frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \cdot \frac{\sqrt{n^2(1+k^2)-1}}{n\sqrt{1+k^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \cdot \frac{1}{n\sqrt{1+k^2}} \right) = \\ &= \arcsin \left(\frac{k\sqrt{n^2k^2+n^2-1+1}}{n(1+k^2)} \right). \end{aligned}$$

II. Тригонометрия широко применяется в различных задачах геометрической оптики. Для иллюстрации рассмотрим следующую задачу.

Задача. Луч света проходит через стеклянную пластинку, ограниченную параллельными плоскостями. Определить положение луча после его прохождения через пластинку (черт. 256).

Решение. Пусть MN и PQ — плоскости, ограничивающие пластинку, n — показатель преломления пластинки, d — ее толщина. Падающий луч AB испытывает двукратное преломление при входе в пластинку и при выходе из нее. Луч AB , встретив пластинку, изменит свое направление и пойдет по прямой BC , направление которой определяется по известному закону преломления света:



$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n.$$

При выходе из пластинки луч пойдет по направлению CD , которое определяется из условия:

$$\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{1}{n}.$$

Черт. 256

Из полученных равенств следует, что

$$\sin \alpha = \sin \gamma, \text{ т. е. } \alpha = \gamma,$$

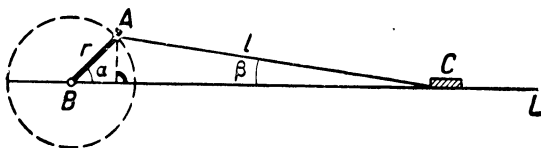
так как α и γ суть острые углы. Следовательно, пройдя через плоскопараллельную пластинку, луч не изменит своего направления. Вычислим смещение CK луча. Из треугольника BKC найдем:

$$CK = BC \sin \angle CBK = BC \sin (\alpha - \beta).$$

Следовательно,

$$CK = \frac{d}{\cos \beta} \sin (\alpha - \beta) = \frac{d \sin (\alpha - \beta)}{\cos \beta}.$$

III. На нижеследующем примере показано применение тригонометрии к техническим расчетам.



Черт. 257

На чертеже 257 представлена схема кривошипного механизма. При вращении кривошипа AB ползун C движется прямолинейно по прямой BL . Движение передается при помощи шатуна AC . Пусть α — угол, образованный кривошипом AB , а β — угол, обра-

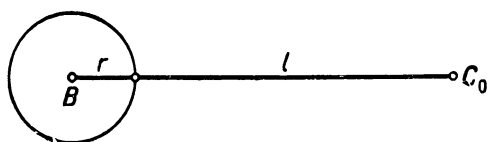
зованный шатуном с осью BL . Если r и l — длины кривошипа и шатуна, то зависимость между α и β можно найти из треугольника ABC :

$$\frac{r}{\sin \beta} = \frac{l}{\sin \alpha}, \quad \text{откуда} \quad \sin \beta = \frac{r}{l} \sin \alpha.$$

Во многих механизмах $\frac{r}{l} = \frac{1}{5}$, а потому $\beta = \arcsin \frac{\sin \alpha}{5}$. Для практических расчетов можно составить, например, такую таблицу приближенных значений β :

α	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
β	0°	2°	4°	$5,5^\circ$	$7,5^\circ$	9°	10°	11°	$11,5^\circ$	$11,5^\circ$

При $\alpha = 0$ шатун и кривошип занимают положение, изображенное на чертеже 258, начальное расстояние ползуна от точки B



Черт. 258

равно $r + l$. Если кривошип повернется на угол α , то расстояние ползуна C от точки B сделается равным

$$r \cos \alpha + l \cos \beta;$$

отклонение $S = C_0C$ ползуна от его начального положения выразится формулой:

$$S = r(1 - \cos \alpha) + l(1 - \cos \beta).$$

IV. Тригонометрические функции находят широкое применение при изучении периодических процессов, о чем было сказано выше (см. гл. III, § 34).

§ 71. Вычисления при помощи тригонометрических таблиц

Для производства вычислений пользуются таблицами значений тригонометрических функций или их логарифмов. Обычно тригонометрические таблицы составляются для значений аргумента, выраженных в градусной мере, так как при практических расчетах удобно за единицу измерения углов принимать угол, соизмеримый с полным оборотом.

Таблицы называются *н а т у р а л ь н ы м и*, если в них даются значения тригонометрических функций, и *л о г а р и ф м и ч е с к и м и*, если в них даются значения логарифмов этих функций.

Для составления тригонометрических таблиц достаточно вычислить значения тригонометрических функций (или их логарифмов) лишь для значений аргумента от 0° до 45° . В самом деле, зная тригонометрические функции острых углов, не больших 45° , можно, пользуясь формулами приведения, вычислить их от любого данного значения аргумента.

На основании формул приведения $\cos \alpha = \sin (90^\circ - \alpha)$, $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} (90^\circ - \alpha)$ значения тригонометрических функций, дополнительных до 90° дуг, могут быть записаны в одну строку, как например:

	sin	cos	tg	ctg	
38°	0,616	0,788	0,781	1,280	52°
	cos	sin	ctg	tg	

Синус угла 38° есть в то же время косинус дополнительного угла 52°

$$\sin 38^\circ = \cos 52^\circ = 0,616.$$

В силу этого свойства, во многих таблицах тригонометрические функции даются для углов от 0° до 45° . Эти же таблицы служат для вычисления тригонометрических функций от 45° до 90° .

Для составления тригонометрических таблиц достаточно вычислить тригонометрические функции углов от 0° до 30° . В самом деле, тождества:

$$\begin{aligned}\sin (30^\circ + \alpha) &= \cos \alpha - \sin (30^\circ - \alpha), \\ \cos (30^\circ + \alpha) &= -\sin \alpha + \cos (30^\circ - \alpha)\end{aligned}$$

позволяют вычислить синус и косинус угла $\alpha + 30^\circ$, зная значения этих функций от углов α и $30^\circ - \alpha$.

При помощи аппарата степенных рядов (см. ниже, § 80) можно вычислять значения тригонометрических функций с любой заданной степенью точности, а потому можно составить тригонометрические таблицы с любым данным числом значащих цифр.

Тригонометрические таблицы можно составить элементарными средствами, однако, при современной вычислительной технике эти средства не имеют практического значения, и могут (в разумной мере) служить лишь учебно-педагогическим целям.

Ниже изложено краткое описание способов вычисления значения функций элементарными средствами.

Если известны (т. е. могут быть вычислены с любой степенью точности) $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$, то можно вычислить с любой степенью точности тригонометрические функции от аргументов $\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{4}, \dots, \frac{\alpha}{2^n}$. Для этого достаточно последовательного применения формул тригонометрических функций от половинного аргумента:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \quad \text{и т. д.}$$

Так как извлечение квадратного корня можно выполнить (элементарными средствами) с любой степенью точности, то и искомые значения тригонометрических функций также можно вычислить с любой данной степенью точности. Таким образом, не представляет принципиальных затруднений (если не считаться с громоздкостью вычислений) вычисление тригонометрических функций как угодно малых углов.

В § 10 и 14 было показано, как можно элементарными средствами вычислить тригонометрические функции от углов:

$$45^\circ, 36^\circ, 30^\circ, 24^\circ, 22^\circ 30', 18^\circ, 15^\circ, 12^\circ, 9^\circ, 6^\circ.$$

Далее, исходя из углов 9° и 6° , можно вычислить тригонометрические функции от угла $9^\circ - 6^\circ = 3^\circ$. Исходя из угла 3° , можно вычислить значения функций для углов $1^\circ 30'$ и $45'$. Зная тригонометрические функции от угла $45'$, можно составить таблицы значений синуса и косинуса через каждые $45'$.

Способ составления таблиц (близкий к описанному) через каждые $45'$ изложен в известном учебнике тригонометрии М. Головина «Плоская и сферическая тригонометрия, с алгебраическими доказательствами, собранными Михаилом Головиным, Надворным советником, Академии наук членом, учительской семинарии профессором в Санкт-Петербурге при Императорской Академии наук, 1789 г.». Далее для вычисления значений функции через каждые $15'$ Головин рекомендует применение линейной интерполяции.

При составлении тригонометрических таблиц для вычисления тригонометрических функций малых углов широко пользуются приближенными равенствами:

$$\sin x \approx x, \quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Неравенства

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16} \quad \text{и} \quad x - \frac{x^3}{4} < \sin x < x$$

дают следующие оценки погрешностей (см. § 33):

$$\sin x = x \quad \text{с ошибкой, меньшей } \frac{x^3}{4},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} \quad \text{с ошибкой, меньшей } \frac{x^4}{16}.$$

Если данный угол содержит α градусов, то его радианная мера выразится числом $x = \frac{\alpha\pi}{180}$, и для погрешности рассматриваемых приближенных формул получаются следующие оценки (принять во внимание, что $\frac{\pi}{180} < \frac{1}{50}$):

$$\frac{x^3}{4} = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{180} \right)^3 \alpha^3 < \frac{\alpha^3}{2^2 \cdot 5^3 \cdot 10^3} = \frac{2\alpha^3}{10^6} = 2 \cdot 10^{-6} \cdot \alpha^3;$$

$$\frac{x^4}{16} = \frac{1}{16} \left(\frac{\pi}{180} \right)^4 \alpha^4 < \frac{\alpha^4}{2^4 \cdot 5^4 \cdot 10^4} = 10^{-8} \cdot \alpha^4.$$

Вычислив по приближенной формуле $\sin 1^\circ$, получим

$$\sin 1^\circ = \sin \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{180} = 0,01728$$

с ошибкой, меньшей чем $\frac{2}{10^6} < 0,000005$. Допустим, например, что приближенная формула $\sin x = x$ применяется для составления трехзначных натуральных тригонометрических таблиц. Неравенство (при $\alpha = 7$)

$$x - \sin x < \frac{2 \cdot 7^3}{10} < 0,000686$$

показывает, что в данном случае приближенная формула пригодна для вычисления синусов углов от 1° до 7° . Воспользовавшись найденным значением $\frac{\pi}{180} = 0,01728$, получим (округлив результаты до 3-го знака):

$$\sin 1^\circ = \frac{\pi}{180} = 0,017; \quad \sin 5^\circ = 5 \frac{\pi}{180} = 0,086;$$

$$\sin 2^\circ = 2 \frac{\pi}{180} = 0,035; \quad \sin 6^\circ = 6 \frac{\pi}{180} = 0,104;$$

$$\sin 3^\circ = 3 \frac{\pi}{180} = 0,052; \quad \sin 7^\circ = 7 \frac{\pi}{180} = 0,121;$$

$$\sin 4^\circ = 4 \frac{\pi}{180} = 0,069.$$

Приближенная формула для косинусов малых углов $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$ обладает большей степенью точности. Так, при составлении трехзначных таблиц этой формулой можно пользоваться непосредственно для вычисления косинусов углов до 15° . В самом деле, для погрешности получим следующую оценку:

$$10^{-8} k^4 \leq 10^{-8} \cdot 15^4 < \frac{60000}{10^8} < 0,001.$$

Как было указано выше, путем применения формул деления аргумента пополам и теорем сложения можно вычислить непосредственно (с любой степенью точности) тригонометрические функции от довольно большого числа углов:

$$3^\circ, 6^\circ, 9^\circ, 12^\circ, 15^\circ, 18^\circ, 22^\circ 30', 24^\circ \text{ и т. д.}$$

Эти непосредственно вычисленные значения, с одной стороны, могут служить средством контроля, а с другой стороны, зная эти значения и значения функций от малых углов, можно, пользуясь теоремами сложения:

$$\begin{aligned}\sin(x \pm h) &= \sin x \cos h \pm \cos x \sin h, \\ \cos(x \pm h) &= \cos x \cos h \mp \sin x \sin h,\end{aligned}$$

вычислить значения тригонометрических функций для промежуточных аргументов. Таким образом, элементарными средствами без особого труда можно составить трехзначные тригонометрические таблицы.

В вычислительной работе применяются различные таблицы, например: четырехзначные таблицы Б р а д и с а, пятизначные таблицы П р ж е в а л ь с к о г о, семизначные таблицы В е г а и пр. Мы не останавливаемся на описании пользования таблицами, поскольку к каждой таблице прилагается соответствующее руководство, в котором и излагаются правила их применения. Заметим, что в зависимости от устройства таблиц эти правила могут быть несколько различными. В таблицах обычно даются значения тригонометрических функций (или их логарифмов) через некоторый интервал. Так, например, значения логарифмов тригонометрических функций в таблицах Брадиса даются через $6'$, в таблицах Пржевальского через $1'$, а в таблицах Вега через $10''$.

Для вычисления значений функций от промежуточных значений аргумента обычно применяется линейная интерполяция. Как известно, при линейной интерполяции приращение функции приближенно считается пропорциональным приращению аргумента.

Пусть, например, по таблицам Пржевальского требуется найти $\lg \sin 37^\circ 10' 32''$, непосредственно из таблицы найдем $\lg \sin 37^\circ 10' =$

$= \bar{1},78113$. Табличная разность (т. е. разность между найденным и непосредственно следующим значением функции) равна 17:

$$d = \lg \sin 37^{\circ}11' - \lg \sin 37^{\circ}10' = 17.$$

Таким образом, 17 сотых тысяч приходится на $60''$, а на $32''$ придется (приближенно) $\frac{17 \cdot 32}{60} = 9$ сотых тысяч; прибавив найденную поправку, получим:

$$\lg \sin 37^{\circ}10'32'' = \bar{1},78113 + 0,00009 = \bar{1},78122.$$

Для облегчения вычислений, поправки обычно даются в готовом виде.

Так, в таблицах Брадиса нахождение поправок не требует никаких дополнительных вычислений: эти поправки включаются в таблицу. В таблицах Пржевальского даются значения поправок для $1''$, $2''$, ..., $9''$ в виде маленьких табличек, помещенных сбоку основной таблицы (*partes proportionalis*). Для рассмотренного примера вычисления расположатся так:

$$\begin{array}{r} \lg \sin 37^{\circ}10' = \bar{1},78113 \\ \quad + 30'' \quad \quad 8,5 \\ \quad + 2'' \quad \quad 0,57 \\ \hline \lg \sin 37^{\circ}10'32'' = 1,78122 \end{array}$$

Для убывающих функций $\cos x$, $\operatorname{ctg} x$, $\lg \cos x$ и $\lg \operatorname{ctg} x$ поправки следует не прибавлять, а **в ы ч и т а т ь**.

Линейная интерполяция может внести значительную погрешность, если табличная разность изменяется быстро. Так для синусов и тангенсов углов, близких к нулю (а также для косинусов, тангенсов и котангенсов углов, близких к 90°), табличная разность изменяется настолько быстро, что линейная интерполяция, применяемая в этих участках таблицы, может внести погрешности большие по сравнению с погрешностями на прочих участках. Этим объясняется, что, например, в таблицах Брадиса логарифмы синусов даются для углов от 0° до 14° с интервалом через $1'$, а для углов от 14° до 90° — с интервалом через $6'$. К таблицам Вега, составленным с интервалом $10''$, приложены специальные таблицы, в которых логарифмы синуса и тангенса углов от 0° до 5° вычислены через интервал $1''$.

Для вычисления логарифмов синусов (тангенсов) углов, близких к нулю, применяется также следующий прием (если нет в распоряжении более подробных таблиц): так как

$$\sin x \approx x \quad (\text{и} \quad \operatorname{tg} x \approx x),$$

то считают приближенно синусы (тангенсы) малых углов пропорциональными аргументу; поэтому можно составить пропорцию (приближенную):

$$\frac{\sin(x+h)}{\sin x} = \frac{x+h}{x} \quad \left(\text{и аналогично} \quad \frac{\operatorname{tg}(x+h)}{\operatorname{tg} x} = \frac{x+h}{x} \right).$$

Заметим, что, так как в правой части находится отношение дуг $x+h$ и x , то безразлично, в какой единице эти дуги измерены: будем считать, например, что дуги измерены в секундах. Пусть известен, например, $\lg \sin x$, тогда, прологарифмировав первую пропорцию, получим:

$$\lg \sin(x+h) = \lg \sin x + \lg(x+h) - \lg x.$$

Значения $\lg(x+h)$ и $\lg x$ находятся по таблицам логарифмов чисел.

Пусть, например, требуется найти $\lg \sin 1^\circ 22' 36''$. Из таблиц найдем непосредственно:

$$\lg \sin 1^\circ 22' = \bar{2},37750.$$

Так как $1^\circ 22' = 4920''$ и $1^\circ 22' 36'' = 4956''$, то положив

$$x = 4920, \quad x+h = 4956,$$

получим:

$$\lg \sin 1^\circ 22' 36'' = \lg \sin 1^\circ 22' + \lg 4956 - \lg 4920 = 2,38066.$$

О точности вычисления при помощи таблиц можно судить по табличной разности, т. е. по разности двух соседних указанных в таблице значений функций. Так как в различных частях таблицы эта разность неодинакова, то и точность вычислений различна в зависимости от значений углов. Пусть, например, в пятизначных таблицах логарифмов, составленных через интервал $1'$, табличная разность d (стотысячных), тогда изменение угла на k'' вызовет в мантиссе логарифмов изменение на $\frac{d}{60} k$ стотысячных. Таким образом, чем меньше табличная разность, тем меньшее влияние оказывают погрешности, получающиеся благодаря округлению данных.

При нахождении угла по данному его логарифму ошибка, вызванная изменением на 1 последнего десятичного знака (т. е. ошибка на 1 стотысячную), вызовет изменение угла на $\left(\frac{60}{d}\right)''$. Чем больше табличная разность, тем точнее можно вычислить угол по логарифму его тригонометрической функции. Так, например, для пятизначных таблиц логарифмов синусов для углов до 12° ошибка в мантиссе на 0,00001 вызовет погрешность, меньшую $1''$; для углов, близких к 30° , погрешность доходит до $3''$; для углов, близких к 45° , — до $5''$, а для углов, близких к 89° , — до $5'$.

Для нахождения углов по их тригонометрическим функциям или их логарифмам пользуются теми же тригонометрическими таблицами, но с той лишь разницей, что данными считаются не углы, а их тригонометрические функции (или логарифмы этих функций). Найдя по таблицам значение, наиболее близкое к данному, и соответствующий угол, применяют принцип линейной интерполяции и вносят надлежащую поправку (подробности см. в приложенных к таблицам описаниях). Следует учитывать также ошибки, обус-

ловленные самими таблицами, так как в них значения функций даются до 0,5 последнего десятичного знака.

Указанным приемом может быть оценена погрешность в каждом конкретном вычислении.

При решении задач на вычисление элементов геометрических фигур методами тригонометрии обычно поступают следующим образом: сначала решают задачу в общем виде, обозначив буквами данные и искомые элементы, и составляют формулы, выражающие искомые элементы через данные (либо выписывают готовые формулы). Общие формулы преобразуют (по возможности) к виду, наиболее удобному при вычислениях по данным таблицам. Так, при пользовании натуральными таблицами лучше всего, когда окончательный результат дан в виде суммы легко вычислимых слагаемых; напротив, при пользовании логарифмическими таблицами лучше всего окончательный результат представить в виде произведения сомножителей, логарифмы которых непосредственно находятся по таблицам. После составления общей формулы решения подставляют в нее числовые значения данных элементов и производят вычисления по таблицам, соблюдая правила пользования таблицами и правила приближенных вычислений.

В настоящее время техника вычислений при помощи логарифмических таблиц отживает свой век. Однако во многих распространенных математических таблицах на первое место ставятся именно логарифмические таблицы. Это соответствует тому положению вещей, что еще до сравнительно недавнего прошлого эти таблицы считались единственным вычислительным средством. В настоящее время следует избегать применения логарифмических таблиц в тех случаях, когда вычисления с помощью натуральных таблиц не вызывают особых затруднений. При производстве вычислений следует широко пользоваться различными имеющимися в распоряжении математическими таблицами.

Так, в таблицах В. М. Брадиса, кроме логарифмических таблиц, содержатся многие другие таблицы (квадратов, кубов, квадратных и кубических корней, обратных величин и пр.). Использование различных таблиц дает возможность многие вычисления в школьной практике производить, не прибегая к таблицам логарифмов. При наличии же арифмометра таблицы логарифмов становятся почти бесполезными.

Для вычислений, не требующих большой точности (не более трех значащих цифр), удобно пользоваться логарифмической линейкой. При помощи линейки быстро находятся квадраты, кубы, квадратные и кубические корни, обратные величины, а потому линейка может заменить двух-трехзначные математические таблицы. Так как при помощи логарифмической линейки весьма просто решаются пропорции, то удобно пользоваться теми формулами, которые записываются в виде равенства отношений (теорема синусов, тангенсов, формулы Мольвейде).

В приведенных ниже примерах показано применение натуральных и логарифмических таблиц и логарифмической линейки к решению вычислительных задач.

Примеры.

1. Вычислить по четырехзначным таблицам основные элементы треугольника, если дано $a \approx 225,2$; $b \approx 798,2$; $C = 36^\circ 44'$.

Решение. При вычислении с помощью натуральных таблиц воспользуемся формулой косинусов

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C},$$

$a^2 \approx 50\,760$, $b^2 \approx 637\,100$ (по таблицам квадратов).

Далее (умножение выполнено на арифмометре)

$$2ab \cos C = 2 \cdot 225,2 \cdot 798,2 \cdot 0,8015 = 288180,$$

и наконец,

$$c \approx \sqrt{399\,700} \approx 632,3$$

(по таблицам квадратных корней)

$$\sin A \approx \frac{a}{c} \sin C \cdot \frac{1}{c} \approx 225,2 \cdot 0,5981 \cdot 0,001581 \approx 0,2129$$

$\left(\frac{1}{c} \text{ найдем по таблицам обратных величин}\right)$, и наконец, $A \approx 12^\circ 18'$,
 $B = 180^\circ - (A + C) \approx 130^\circ 58'$.

При помощи логарифмической линейки решение примет следующий вид.

Округляем данные $a \approx 225$, $b \approx 798$, $C \approx 36^\circ 40'$.

Далее, $a^2 \approx 50\,800$, $b^2 \approx 637\,000$ найдем при помощи шкалы квадратов.

Производим умножение $2ab \cos C \approx 288\,000$ и по шкале квадратов находим $c = \sqrt{400\,000} \approx 632$.

Далее воспользуемся теоремой синусов

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c},$$

устанавливаем пометку $c \approx 632$ основной шкалы против $C \approx 36^\circ 40'$ шкалы синусов. На шкале синусов читаем $A \approx 12^\circ 18'$ (против пометки ≈ 225). Угол A острый как лежащий против меньшей стороны.

Против пометки $b \approx 798$ читаем 49° ; чтобы выполнялось условие $A + B + C = 180^\circ$, следует взять $B \approx 180^\circ - 49^\circ = 131^\circ$.

2. Вычислить при помощи пятизначных таблиц логарифмов основные элементы треугольника, если дано $A = 61^\circ 40' 30''$, $b = 375,44$, $c = 278,20$.

Решение. Для логарифмических вычислений лучше всего воспользоваться формулой тангенсов:

$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{\operatorname{tg} \frac{B-C}{2}}{\operatorname{tg} \frac{B+C}{2}}, \text{ откуда } \operatorname{tg} \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \operatorname{tg} \frac{B+C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \operatorname{ctg} \frac{A}{2}.$$

Имеем;

$$b - c = 97,24; \quad b + c = 653,64; \quad \frac{A}{2} = 30^\circ 50' 15''.$$

Выполняем логарифмические вычисления:

$$\begin{array}{r|l}
 \lg(b-c) = 1,98784 \\
 - \lg(b+c) = \bar{3},18466 \\
 \lg \operatorname{ctg} 30^{\circ}50'15'' = 0,22402 \\
 \hline
 \lg \operatorname{tg} \frac{B+C}{2} = \bar{1},39652 \\
 \frac{B-C}{2} = 13^{\circ}59'32'' \\
 \hline
 \lg(b+c) = 2,81534.
 \end{array}$$

Итак

$$\frac{B-C}{2} = 13^{\circ}59'32'',$$

$$\frac{B+C}{2} = 90^{\circ} - \frac{A}{2} = 59^{\circ}9'45'',$$

откуда

$$B = 73^{\circ}9'17'', \quad C = 45^{\circ}10'13''.$$

Для вычисления a можно воспользоваться формулой Молевейде:

$$\frac{b+c}{a} = \frac{\cos \frac{B-C}{2}}{\sin \frac{A}{2}}, \quad \text{откуда} \quad a = \frac{(b+c) \sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{B-C}{2}}.$$

Имеем:

$$\begin{array}{r|l}
 \lg(b+c) = 2,81534 \\
 \lg \sin \frac{A}{2} = \bar{1},70978 \\
 - \lg \cos \frac{B-C}{2} = 0,01308 \\
 \hline
 \lg a = 2,53820 \\
 a = 345,30 \\
 \hline
 \lg \cos \frac{B-C}{2} = \bar{1},98692.
 \end{array}$$

3. Основанием четырехугольной пирамиды служит квадрат, две боковые грани пирамиды перпендикулярны к плоскости основания, две другие боковые грани образуют с плоскостью основания равные двугранные углы, каждый из которых равен $\alpha = 53^{\circ}46'$, высота пирамиды $h = 24,15$. Вычислить посредством четырехзначных таблиц боковую поверхность.

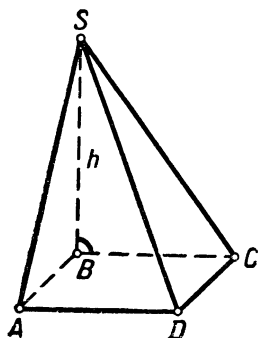
Решение. Сначала решаем задачу в общем виде. Из геометрических соображений следует, что (черт. 259):

$$S_6 = 2 \text{ пл. } \triangle ASB + 2 \text{ пл. } \triangle SAD.$$

Имеем:

$$\text{пл. } \triangle ASB = \frac{1}{2} AB \cdot h = \frac{h^2 \operatorname{ctg} \alpha}{2};$$

$$\text{пл. } \triangle SAD = \frac{1}{2} AD \cdot AS = \frac{1}{2} h \operatorname{ctg} \alpha \cdot \frac{h}{\sin \alpha}.$$



Черт. 259

Составляем формулу решения задачи в общем виде:

$$S_6 = h^2 \left(\operatorname{ctg} \alpha + \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\sin \alpha} \right) = h^2 \operatorname{ctg} \alpha \frac{1 + \sin \alpha}{\sin \alpha}.$$

Для сравнения произведем вычисления при помощи как натуральных, так и логарифмических таблиц.

Вычисления при помощи натуральных таблиц:

$$S_6 = h^2 \operatorname{ctg} \alpha \left(\frac{1}{\sin \alpha} + 1 \right)$$

имеем:

$$h^2 \approx 24,15^2 \approx 583,2, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} 53^\circ 46' \approx 0,7328,$$

$$\sin \alpha = \sin 53^\circ 46' \approx 0,8067; \quad \frac{1}{\sin \alpha} + 1 \approx 2,240,$$

$$S_6 = 583,2 \cdot 0,7328 \cdot 2,240 \approx 957,3 \text{ (кв. единиц).}$$

Вычисления при помощи таблиц логарифмов.

Приведем результат к логарифмическому виду:

$$S_6 = \frac{2h^2 \operatorname{ctg} \alpha \cos^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \alpha}.$$

Производим вычисления по таблицам:

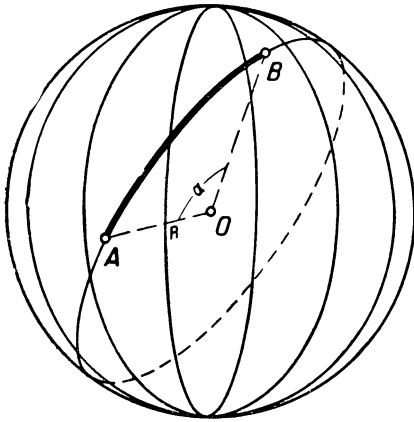
$\lg 2 = 0,3010$	$\lg 24,15 = 1,3829 = \lg h,$ $\lg \cos \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) = \lg \cos 18^\circ 07' = \bar{1},9780,$ $\lg \sin 53^\circ 46' = \bar{1},9067.$
$2 \lg 24,15 = 2,7658$	
$\lg \operatorname{ctg} 53^\circ 46' = \bar{1},8649$	
$2 \lg \cos 18^\circ 07' = \bar{1},9560$	
$-\lg \sin 53^\circ 46' = 0,0933$	
$\lg S_6 = 2,9810$	

Откуда $S_6 = 957,2$ (квадратных единиц).



§ 72. Основные понятия

В настоящем параграфе будут (в конспективном изложении) указаны те положения из сферической геометрии, которые служат основой сферической тригонометрии. Элементы сферической геометрии излагаются в специальном курсе геометрии, поэтому мы ниже ограничимся лишь перечислением необходимых для дальнейшего сведений, опуская их доказательства*.



Черт. 260

I. Известно, что через всякие две данные не диаметрально противоположные точки сферической поверхности проходит единственная окружность большого круга; через две диаметрально противоположные точки проходит бесконечное множество таких окружностей (черт. 260).

Две не диаметрально противоположные точки разбивают проходящую через них окружность большого круга на две дуги, одна из этих дуг меньше, а другая больше полуокружности.

Всякой дуге большого круга соответствует центральный угол, образуемый радиусами сферы, соединяющими ее центр с концами дуги.

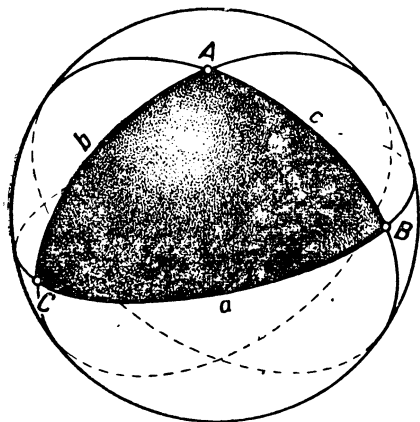
Дуги большого круга принято измерять в дуговой мере (например, в радианах или градусах); в соответствующей угловой мере измеряется опирающийся на нее центральный угол.

* См. Д. И. Перепелкин, Курс элементарной геометрии, т. II, Гостехиздат.

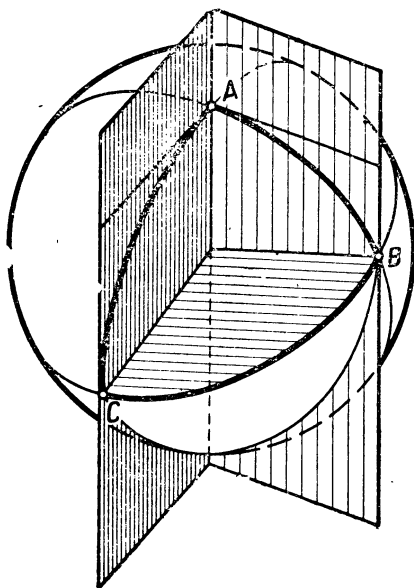
Если R — радиус сферы, а α — радианная мера дуги AB , то длина этой дуги v вычисляется по формуле

$$v = \alpha R.$$

Пусть A, B, C — три точки сферы, не лежащие (все три) на одной и той же окружности большого круга; соединив попарно эти три точки тремя дугами большого круга, каждая из которых меньше π , получим на поверхности сферы фигуру, называемую эйлеровым сферическим треугольником или кратко — сферическим треугольником (черт. 261). Точки A, B, C называются вершинами, а соединяющие их дуги сторонами сферического треугольника. Стороны сферического треугольника, про-



Черт. 261



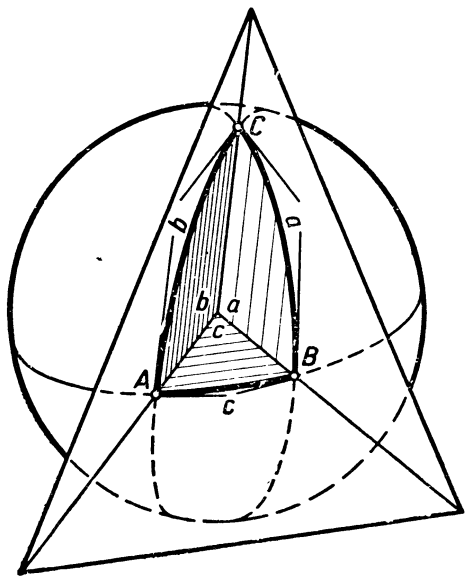
Черт. 262

тиволежащие вершинам A, B и C , обозначаются соответственно малыми буквами a, b и c . Углом сферического треугольника при данной его вершине называется угол, образованный сторонами, пересекающимися в этой вершине; это есть угол, образованный касательными в данной вершине к пересекающимся в ней сторонам. Угол сферического треугольника есть линейный угол двугранного угла, образованного пересечением плоскостей больших кругов, в которых расположены стороны, образующие данный угол (черт. 262). При этом внутренней областью угла считается та область, в которой расположена сторона треугольника, противоположная вершине. Углы и стороны сферического треугольника будем называть его основными эле-

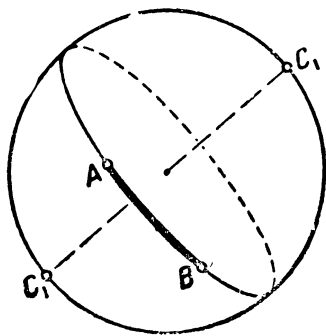
ментами. Из сказанного следует, что *величина каждого из основных элементов эйлера треугольника* заключается в интервале от 0 до π^* .

II. *Всякому сферическому треугольнику соответствует трехгранный угол, вершина которого находится в центре сферы, а ребрами служат радиусы, соединяющие центр сферы с вершинами треугольника. Обратно, всякому трехгранному углу с вершиной в центре сферы соответствует сферический треугольник, который высекает этот угол на поверхности сферы* (черт. 263).

Элементы взаимно соответственных сферического треугольника и трехгранного угла связаны между собой следующим образом: величины



Черт. 263



Черт. 264

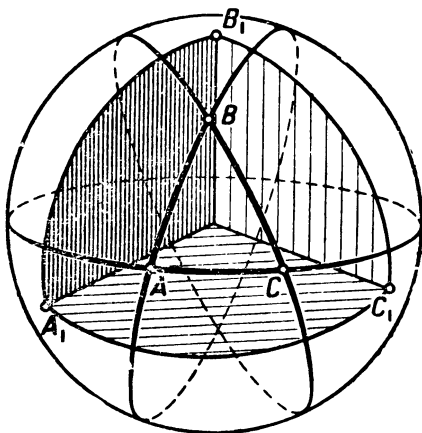
углов A, B и C треугольника суть величины двугранных углов трехгранного угла, а величины сторон a, b, c треугольника суть величины плоских углов трехгранного угла. Всякое соотношение между элементами сферического треугольника (тригранного угла) может быть интерпретировано как соотношение между элементами соответствующего трехгранного угла (сферического треугольника).

III. Пусть AB — дуга большого круга, тогда диаметр, перпендикулярный плоскости большого круга, в которой содержится дуга AB , пересечет поверхность сферы в двух точках C_1 и C_1 , которые называются *полюсами* данной дуги (черт. 264).

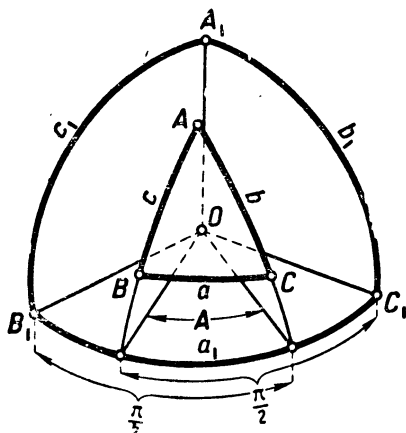
* В чисто теоретических исследованиях иногда рассматриваются сферические треугольники, так называемые *треугольники Мебиуса*, элементы которых могут иметь произвольную величину. Изучение таких треугольников практического значения не имеет.

Если вершины треугольника $A_1B_1C_1$ служат полюсами сторон треугольника ABC , то треугольник $A_1B_1C_1$ называется *полярным* относительно треугольника ABC (черт. 265).

При этом приняты такие обозначения: точка A_1 есть полюс BC , точка B_1 есть полюс AC , точка C_1 есть полюс AB . Вершины полярного треугольника принято выбирать так, чтобы вершины A_1 и A лежали с одной стороны относительно плоскости дуги BC . Аналогичное указание относится к выбору остальных вершин полярного треугольника.



Черт. 265



Черт. 266

В сферической геометрии доказывается, что если треугольник $A_1B_1C_1$ полярен относительно ABC , то и треугольник ABC полярен относительно $A_1B_1C_1$.

В силу изложенного, вершина A треугольника ABC есть полюс стороны a_1 треугольника $A_1B_1C_1$, а вершина A_1 треугольника $A_1B_1C_1$ есть полюс стороны a треугольника ABC .

В сферической геометрии доказывается, что *соответственные угол и сторона взаимно полярных треугольников в сумме составляют π* (черт. 266):

$$A + a_1 = \pi, \quad A_1 + a = \pi, \quad B + b_1 = \pi,$$

$$B_1 + b = \pi, \quad C + c_1 = \pi, \quad C_1 + c = \pi.$$

На чертеже 266 дуга B_1C_1 есть суть экватора относительно полюса в точке A ; величина этой дуги (в радианах) равна a_1 . Эта дуга состоит из двух дуг равных $\frac{\pi}{2}$ (точка B_1 есть полюс относительно дуги b , а точка C_1 есть полюс относительно дуги c), частично наложенных друг на друга так, что их общая часть равна линейному углу двугранного угла с ребром OA , т. е. углу A .

IV. Во всяком сферическом треугольнике:

1°. Каждая сторона меньше суммы двух других сторон

$$a < b + c, \quad b < a + c, \quad c < a + b.$$

2°. Каждая сторона больше разности двух сторон.

3°. Сумма сторон треугольника положительна и меньше 2π

$$0 < a + b + c < 2\pi.$$

П р и м е ч а н и е. Эти предложения известны из стереометрии как свойства плоских углов трехгранного угла.

4°. Сумма углов сферического треугольника больше π и меньше 3π

$$\pi < A + B + C < 3\pi$$

(применить свойство 3° к сторонам a_1 , b_1 и c_1 полярного треугольника).

П р и м е ч а н и е. В отличие от прямолинейного треугольника сферический треугольник может иметь два, а также все три угла тупые или прямые.

5°. В сферическом треугольнике против большей стороны (большого угла) лежит больший угол (большая сторона).

Против равных сторон (углов) лежат равные углы (стороны).

6°. Углы сферического треугольника удовлетворяют неравенствам:

$$A + B - C < \pi, \quad A - B + C < \pi, \quad B + C - A < \pi.$$

Так, для получения первого неравенства достаточно применить условие 1° к сторонам полярного треугольника: $a_1 < b_1 + c_1$, а затем выразить стороны треугольника $A_1B_1C_1$ через углы данного треугольника ABC .

Указанные соотношения 1° — 6° служат для определения множества допустимых систем значений для элементов сферического треугольника. В задачах на вычисление элементов сферического треугольника эти соотношения позволяют установить, имеет ли задача решение при данных условиях, а также число ее решений.

V. Если элементы сферического треугольника ABC равны соответственным элементам треугольника $A'B'C'$:

$$\begin{aligned} A &= A', & B &= B', & C &= C', \\ a &= a', & b &= b', & c &= c', \end{aligned}$$

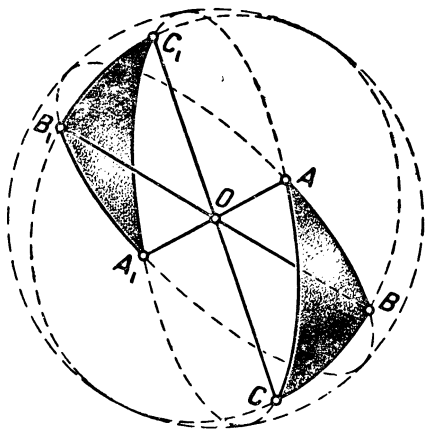
то такие треугольники либо равны (могут быть наложены друг на друга движением в пространстве), либо зеркально равны. Два зеркально-равные треугольника движением в пространстве не могут

быть наложены друг на друга, а могут быть приведены в положение, изображенное на чертеже 267, при котором соответственные вершины являются диаметрально противоположными. Зеркально-равные треугольники называются также с и м м е т р и ч н ы м и .

VI. В сферической геометрии рассматриваются следующие задачи на построение сферических треугольников: по трем сторонам; по трем углам; по стороне и прилежащим углам; по углу и прилежащим сторонам; по двум сторонам и углу, противолежащему одной из них; по двум углам и стороне, противолежащей одному из них. При этом равные и зеркально-равные треугольники не р а с с м а т р и в а ю т с я как различные

решения задачи. Если произвольно заданы три элемента сферического треугольника, то задача построения треугольника по этим элементам может не иметь решения (заданная система трех элементов не является допустимой), может иметь единственное решение, может иметь два различных решения.

В соответствии с изложенным в сферической тригонометрии рассматриваются задачи на вычисление основных элементов сферического треугольника по заданной системе значений трех его основных элементов.



Черт. 267

VII. Сумма углов всякого сферического треугольника больше π

$$A + B + C > \pi.$$

Разность

$$\varepsilon = (A + B + C) - \pi$$

между суммой углов и π называется эксцессом или сферическим избытком треугольника.

Площадь сферического треугольника равна произведению эксцесса на квадрат радиуса

$$S_{\Delta} = \varepsilon R^2.$$

§ 73. Соотношения между основными элементами сферического треугольника

В настоящем параграфе выведены соотношения между основными элементами произвольного эйлера треугольника, применяющиеся в сферической тригонометрии при решении треугольников (сферических).

Ф о р м у л ы к о с и н у с а с т о р о н ы

Теорема 1. Косинус стороны сферического треугольника равен произведению косинусов двух других сторон плюс произведение синусов тех же сторон на косинус угла между ними:

$$\left. \begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \\ \cos b &= \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B, \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C. \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

Эти формулы можно получить из какой-либо одной путем одновременной круговой перестановки букв a, b, c и A, B, C .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства достаточно рассмотреть соответствующий трехгранный угол. Так как a, b, c и A, B, C равны по величине (соответственно) плоским и двугранным углам трехгранного угла, то, как известно,

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

(доказательство дано в § 68, пример 3, стр. 414) это равенство равносильно первому доказываемому соотношению. Аналогично устанавливаются прочие формулы, ч. т. д.

Д р у г о е д о к а з а т е л ь с т в о. Из векторной алгебры известна следующая общая формула преобразования скалярного произведения двух векторных произведений:

$$([ab][xy]) = (ax)(by) - (ay)(bx). \quad (*)$$

Обозначим через r_A, r_B и r_C радиусы-векторы точек A, B, C , т. е. векторы, соединяющие центр сферы с вершинами данного треугольника. Преобразуем по формуле (*) следующее произведение $([r_A r_B][r_A r_C])$. Без ущерба для общности считаем радиус сферы равным 1, тогда получим: $|[r_A r_B]| = \sin c$, $|[r_A r_C]| = \sin b$; векторные произведения $[r_A r_B]$ и $[r_A r_C]$ перпендикулярны к плоскостям двугранного угла при вершине A и угол между этими произведениями равен углу A (принять во внимание, что угол A меньше π).

Следовательно,

$$([r_A r_B][r_A r_C]) = \sin c \sin b \cos A;$$

имеем далее:

$$(r_A r_A) = 1, \quad (r_B r_C) = \cos a,$$

$$(r_A r_C) = \cos b, \quad (r_B r_A) = \cos c.$$

Подставив в формулу (*), получим равенство

$$\sin c \sin b \cos A = \cos a - \cos b \cos c,$$

эквивалентное первому равенству (I). Аналогично доказываются прочие равенства, ч. т. д.

Ф о р м у л ы с и н у с о в

Теорема II. Синусы сторон сферического треугольника пропорциональны синусам противолежащих им углов:

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}. \quad (\text{II})$$

Доказательство. Формулы синусов можно вывести из формул косинусов.

Имеем:

$$\begin{aligned} \sin A &= \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{\sin^2 b \sin^2 c - \cos^2 b \cos^2 c - \cos^2 a + 2 \cos a \cos b \cos c}{\sin^2 b \sin^2 c}} = \\ &= \sqrt{\frac{(1 - \cos^2 b)(1 - \cos^2 c) - \cos^2 b \cos^2 c - \cos^2 a + 2 \cos a \cos b \cos c}{\sin^2 b \sin^2 c}} = \\ &= \sin a \frac{\sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c}}{\sin a \sin b \sin c} = K \sin a. \end{aligned}$$

Множитель K (в окончательном выражении) при $\sin a$ есть симметрическая функция аргументов a , b и c , не меняющаяся при их перестановке, поэтому все отношения (II) имеют одно и то же значение, равное этому множителю, ч. т. д.

Примечание. Перед радикалом берем знак $+$, так как аргументы в пределах от 0 до π имеют положительные синусы.

Ф о р м у л ы п я т и э л е м е н т о в

Теорема III. Произведение синуса стороны сферического треугольника на косинус прилежащего угла равно произведению косинуса противолежащей этому углу стороны на синус третьей стороны минус произведение синуса противолежащей стороны на косинус третьей и на косинус угла между ними:

$$\left. \begin{aligned} \sin a \cos B &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A, \\ \sin b \cos C &= \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos B, \\ \sin c \cos A &= \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C, \\ \sin a \cos C &= \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A, \\ \sin b \cos A &= \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B, \\ \sin c \cos B &= \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos C. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III})$$

Доказательство. Для доказательства первой формулы воспользуемся равенствами:

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \\ \cos b &= \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B. \end{aligned}$$

Исключим из этих равенств $\cos a$, для чего умножим первое на $\cos c$ и сложим со вторым; тогда получим:

$$\cos b = \cos b \cos^2 c + \sin b \sin c \cos c \cos A + \sin a \sin c \cos B.$$

Заменив в правой части $\cos^2 c$ на $1 - \sin^2 c$, получим (после сокращения) равенство, эквивалентное первому доказываемому соотношению. Прочие формулы доказываются аналогично, ч. т. д.

Заметим, что для получения второй и третьей формул достаточно произвести в первой формуле одновременную круговую перестановку букв a, b, c и A, B, C , а для получения двух последних формул достаточно произвести круговую перестановку букв в четвертой формуле.

Теорема IV. Произведение синуса угла на косинус прилежащей стороны равно произведению косинуса угла, противолежащего этой стороне, на синус третьего угла плюс произведение синуса противолежащего угла на косинус третьего угла и на косинус стороны между ними:

$$\left. \begin{aligned} \sin A \cos b &= \cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a, \\ \sin B \cos c &= \cos C \sin A + \sin C \cos A \cos b, \\ \sin C \cos a &= \cos A \sin B + \sin A \cos B \cos c, \\ \sin A \cos c &= \cos C \sin B + \sin C \cos B \cos a, \\ \sin B \cos a &= \cos A \sin C + \sin A \cos C \cos b, \\ \sin C \cos b &= \cos B \sin A + \sin B \cos A \cos c. \end{aligned} \right\} \quad (IV)$$

Доказательство. Заметив, что равенство

$$\sin c \cos B = \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos C$$

является линейным однородным относительно синусов сторон, заменим в нем $\sin a, \sin b, \sin c$ пропорциональными числами $\sin A, \sin B, \sin C$, тогда получим равенство:

$$\sin C \cos B = \cos b \sin A - \sin B \cos a \cos C,$$

эквивалентное первому доказываемому равенству. Аналогично доказываются прочие равенства, ч. т. д.

Ф о р м у л ы к о с и н у с а у г л а

Теорема V. Косинус угла сферического треугольника равен произведению косинусов двух других углов, взятому с обратным знаком, плюс произведение синусов тех же углов на косинус стороны между ними:

$$\left. \begin{aligned} \cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a, \\ \cos B &= -\cos C \cos A + \sin C \sin A \cos b, \\ \cos C &= -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c, \end{aligned} \right\} \quad (V)$$

Доказательство. Исключим из равенств (формулы (IV)) пяти элементов, вторая серия)

$$\sin A \cos b = \cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a,$$

$$\sin B \cos a = \cos A \sin C + \sin A \cos C \cos b,$$

произведение $\sin A \cos b$ путем подстановки из первого равенства во второе, тогда получим:

$$\sin B \cos a = \cos A \sin C + (\cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a) \cdot \cos C$$

или

$$\sin B \cos a = \cos A \sin C + \cos B \cos C \sin C + \sin B \cos a (1 - \sin^2 C).$$

Откуда (после сокращения) получим равенство, эквивалентное первому доказываемому соотношению. Аналогично доказываются две прочие формулы, ч. т. д.

Другое доказательство. Рассмотрим треугольник $A_1B_1C_1$, полярный для данного. Применив к полярному треугольнику формулу косинуса стороны, получим:

$$\cos a_1 = \cos b_1 \cos c_1 + \sin b_1 \sin c_1 \cos A_1.$$

Приняв во внимание, что

$$a_1 = \pi - A, \quad b_1 = \pi - B, \quad c_1 = \pi - C, \quad A_1 = \pi - a_1,$$

получим первую доказываемую формулу, ч. т. д.

Ф о р м у л ы к о т а н г е н с о в

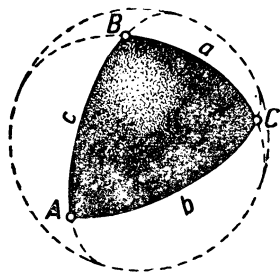
Рассмотрим четыре рядом лежащие элемента сферического треугольника; существуют следующие шесть возможных комбинаций (черт. 268):

$$AcBa, \quad cBaC, \quad BaCb,$$

$$aCbA, \quad CbAc, \quad bAcB.$$

В каждой из этих комбинаций противолежащие друг другу элементы (т. е. A и a , c и C и т. д.) будем называть крайними, а два другие элемента средними (т. е. c и B , B и a и т. д.).

Теорема VI (правило Непера). Разность между произведением синуса средней



Черт. 268

стороны на котангенс крайней и синуса среднего угла на котангенс крайнего, равна произведению косинусов средних элементов:

$$\left. \begin{aligned} \sin c \operatorname{ctg} a - \sin B \operatorname{ctg} A &= \cos c \cos B, \\ \sin a \operatorname{ctg} b - \sin C \operatorname{ctg} B &= \cos a \cos C, \\ \sin b \operatorname{ctg} c - \sin A \operatorname{ctg} C &= \cos b \cos A, \\ \sin a \operatorname{ctg} c - \sin B \operatorname{ctg} C &= \cos a \cos B, \\ \sin b \operatorname{ctg} a - \sin C \operatorname{ctg} A &= \cos b \cos C, \\ \sin c \operatorname{ctg} b - \sin A \operatorname{ctg} B &= \cos c \cos A. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI})$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Рассмотрим равенство, выражающее формулу пяти элементов:

$$\sin b \cos A = \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B,$$

и равенство, являющееся следствием теоремы синусов:

$$\sin b \sin A = \sin a \sin B.$$

Разделив почленно эти равенства, получим равенство, эквивалентное первой доказываемой формуле. Аналогично устанавливаются прочие формулы, ч. т. д.

§ 74. Соотношения между элементами прямоугольного треугольника

Рассмотрим прямоугольный сферический треугольник, т. е. треугольник, хотя бы один из углов которого прямой. Принято обозначать данный прямой угол треугольника буквой A , противолежащая сторона a называется *гипотенузой*, а прочие стороны — *катетами*. Углы B и C называются *косвенными* углами, среди косвенных углов могут быть как прямые, так и тупые.

Если в общих формулах (I) — (VI), содержащих элемент A , положить $A = \frac{\pi}{2}$, то эти формулы упростятся и примут следующий вид (после незначительных преобразований):

$$\cos a = \cos b \cos c, \quad (\text{I}')$$

$$\left. \begin{aligned} \sin b &= \sin a \sin B, \\ \sin c &= \sin a \sin C, \end{aligned} \right\} \quad (\text{II}')$$

$$\left. \begin{aligned} \cos B &= \cos b \sin C, \\ \cos C &= \cos c \sin B, \\ \cos a &= \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C, \end{aligned} \right\} \quad (\text{V}')$$

$$\left. \begin{aligned} \cos B &= \operatorname{ctg} a \operatorname{tg} c, \\ \sin b &= \operatorname{tg} c \operatorname{ctg} C, \\ \cos C &= \operatorname{tg} b \operatorname{ctg} a, \\ \sin c &= \operatorname{tg} b \operatorname{ctg} B \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI}')$$

(в приведенном списке формулы (I') суть следствия формул (I), формулы (II') суть следствия (II) и т. д.).

Равенства (I'), (II'), (V') и (VI') называются д е с я т ь ю ф о р м у л а м и прямоугольного треугольника.

Формула (I'), выражающая гипотенузу прямоугольного сферического треугольника через его катеты, играет роль теоремы Пифагора в евклидовой геометрии, а потому называется с ф е р и ч е с к о й ф о р м у л о й П и ф а г о р а .

С л е д с т в и я : 1°. Если оба катета меньше $\frac{\pi}{2}$, либо больше $\frac{\pi}{2}$, то гипотенуза меньше $\frac{\pi}{2}$, если же один катет больше $\frac{\pi}{2}$, а другой меньше $\frac{\pi}{2}$, то гипотенуза больше $\frac{\pi}{2}$.

В самом деле, из сферической формулы Пифагора

$$\cos a = \cos b \cos c$$

следует, что если знаки $\cos b$ и $\cos c$ одинаковы, т. е. либо $0 < b < \frac{\pi}{2}$ и $0 < c < \frac{\pi}{2}$, либо

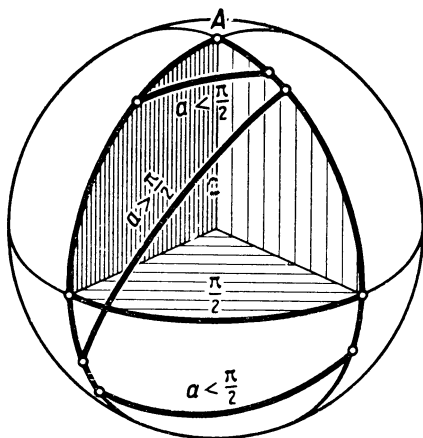
$\frac{\pi}{2} < b < \pi$ и $\frac{\pi}{2} < c < \pi$, то $\cos a > 0$ и $0 < a < \frac{\pi}{2}$; если

же знаки $\cos b$ и $\cos c$ противоположны, то $\cos a < 0$ и $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ (черт. 269).

2°. Из формулы

$$\cos a = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C$$

следует (рассуждения такие же, как и в предыдущем случае), что если косвенные углы оба меньше чем $\frac{\pi}{2}$ или оба больше чем $\frac{\pi}{2}$, то гипотенуза меньше $\frac{\pi}{2}$, если же один угол меньше, а другой больше $\frac{\pi}{2}$, то гипотенуза больше $\frac{\pi}{2}$.



Черт. 269

3°. Катет и противолежащий угол либо оба меньше $\frac{\pi}{2}$, либо оба равны $\frac{\pi}{2}$, либо оба больше $\frac{\pi}{2}$.

В самом деле, из формулы

$$\cos B = \cos b \sin C$$

следует, что $\cos B$ и $\cos b$ одинаковы по знаку (так как $\sin C > 0$), это равносильно доказываемому утверждению.

§ 75. Решение прямоугольных треугольников

Различные задачи на вычисление основных элементов прямоугольных сферических треугольников решаются при помощи десяти формул.

Для облегчения пользования десятию формулами для прямоугольного сферического треугольника существует мнемоническое правило Непера, которое делает излишним заучивание этих формул.

Заменив элементы b и c соответственно на $\frac{\pi}{2} - b$ и $\frac{\pi}{2} - c$, перепишем десять формул прямоугольного сферического треугольника следующим образом:

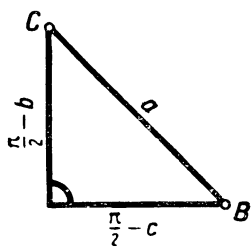
$$\cos a = \sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - c\right), \quad \cos a = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \sin a \sin B, \quad \cos B = \operatorname{ctg} a \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - c\right),$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - c\right) = \sin a \sin C, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - c\right) \operatorname{ctg} C,$$

$$\cos B = \sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right) \sin C, \quad \cos C = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - b\right) \operatorname{ctg} a,$$

$$\cos C = \sin\left(\frac{\pi}{2} - c\right) \sin B, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - c\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - b\right) \operatorname{ctg} B.$$



Черт. 270

Начертив прямоугольный треугольник (плоский), отметим в нем гипотенузу буквой a , острые углы буквами B и C (черт. 270), катеты, противолежащие этим углам, отметим соответственно надписями $\frac{\pi}{2} - b$ и $\frac{\pi}{2} - c$ (при этом, прямой угол, будучи известным элементом, не отмечается никак). Для всякого из пяти элементов имеются два смежные и два несмежные элемента, смотря по расположению соответствующих пометок на вспомогательном плоском треугольнике. Так, например, для элемента C

смежные элементы суть a и $\frac{\pi}{2} - b$, а несмежные — суть B и $\frac{\pi}{2} - c$.

Из рассмотрения десяти формул вытекает мнемоническое правило:

Правило Непера: косинус каждого элемента равен произведению котангенсов смежных элементов; равен произведению синусов несмежных элементов.

Сферический треугольник определяется заданием допустимой системы значений трех его основных элементов, в случае же прямоугольного треугольника один из элементов известен (угол $A = \frac{\pi}{2}$), поэтому прямоугольный треугольник определяется заданием системы (допустимой) значений двух его основных элементов.

В соответствии с изложенным существуют следующие шесть основных случаев решения прямоугольных сферических треугольников:

- 1°. по двум катетам:
даны b и c , вычислить a , B , C ;
- 2°. по катету и гипотенузе:
даны a и b , вычислить c , B , C ;
или
даны a и c , вычислить b , B , C ;
- 3°. по катету и противолежащему углу:
даны b и B вычислить a , c , C ;
или
даны c и C , вычислить a , b , B ;
- 4°. по катету и прилежащему углу:
даны b и C , вычислить a , c , B ;
или
даны c и B , вычислить a , b , C ;
- 5°. по гипотенузе и прилежащему углу:
даны a и C , вычислить b , c , B ;
или
даны a и B , вычислить b , c , C ;
- 6°. по двум углам:
даны B и C , вычислить a , b , c .

Десять формул прямоугольного сферического треугольника связывают во всех возможных сочетаниях три элемента прямоугольного треугольника из пяти его элементов a , b , c , B , C . Число всех возможных таких сочетаний равно 10; число формул также равно 10. Для вычисления искомых элементов прямоугольного треугольника берут три формулы, которые связывают два данных элемента с одним из искомых. Эти три формулы и образуют систему уравнений для вычисления искомых элементов. Выразив в них тригонометрические функции от искомых элементов через тригонометрические функции от заданных элементов, получим систему простейших тригонометрических уравнений, которая обра-

зует смешанную систему вместе с неравенствами, характеризующими допустимые значения искомых элементов.

Выбор формул для решения задачи производится по правилу Непера. Формула, связывающая три искомых элемента, может служить средством контроля.

Поясним сказанное рассматриванием нескольких задач на решение прямоугольных сферических треугольников.

Задача. Даны катеты b и c , вычислить гипотенузу a и косвенные углы B и C .

Решение. Применив правило Непера, пишем формулы, связывающие каждый из искомых элементов с данными элементами.

Для вычисления a

$$\cos a = \sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - c\right)$$

или

$$\cos a = \cos b \cos c;$$

для вычисления B

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - c\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - b\right) \operatorname{ctg} B$$

или

$$\sin c = \operatorname{tg} b \operatorname{ctg} B;$$

для вычисления C

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \operatorname{ctg} C \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - c\right)$$

или

$$\sin b = \operatorname{ctg} C \operatorname{tg} c.$$

Откуда найдем окончательно:

$$\cos a = \cos b \cos c, \quad \operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{tg} b}{\sin c}, \quad \operatorname{tg} C = \frac{\operatorname{tg} c}{\sin b},$$

$$0 < a < \pi, \quad 0 < B < \pi, \quad 0 < C < \pi.$$

Эта смешенная система имеет единственное решение.

Контрольной формулой может служить соотношение между искомыми тремя элементами:

$$\cos a = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C.$$

Задача. Даны катет и гипотенуза a и b , вычислить другой катет c и косвенные углы B и C .

Решение. По правилу Непера имеем:

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right) &= \sin a \sin B, \\ \cos C &= \operatorname{ctg} a \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - b\right), \\ \cos a &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - c\right).\end{aligned}$$

Для вычисления c , B и C получим смешанную систему:

$$\begin{aligned}\sin B &= \frac{\sin b}{\sin a}, \quad \cos C = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a}, \quad \cos c = \frac{\cos a}{\cos b}, \\ 0 < c < \pi, \quad 0 < B < \pi, \quad 0 < C < \pi.\end{aligned}$$

Чтобы первое из простейших уравнений этой системы имело решение, необходимо и достаточно выполнения условия $\sin b \leq \sin a$. При соблюдении этого условия

$$|\cos a| \leq |\cos b| \quad \text{и} \quad |\operatorname{tg} b| \leq |\operatorname{tg} a|.$$

Следовательно, второе и третье уравнения также имеют решение. Первое уравнение имеет в интервале $(0, \pi)$ два решения:

$$B_1 = \arcsin \frac{\sin b}{\sin a} \quad \text{и} \quad B_2 = \pi - \arcsin \frac{\sin b}{\sin a}.$$

Если $B_1 \neq B_2$ (равенство возможно при $B_1 = B_2 = \frac{\pi}{2}$), то из двух значений B_1 и B_2 следует взять значение B_1 , меньшее $\frac{\pi}{2}$, если $b < \frac{\pi}{2}$ и значение B_2 больше $\frac{\pi}{2}$, если $b > \frac{\pi}{2}$, так как катет и противолежащий угол должны быть либо оба большими $\frac{\pi}{2}$, либо оба меньшими $\frac{\pi}{2}$.

Задача. Даны катет b и противолежащий угол B , вычислить a , c и C .

Решение. Применив правило Непера (по образцу, указанному в предыдущих задачах), составим смешанную систему:

$$\begin{aligned}\sin a &= \frac{\sin b}{\sin B}, \quad \sin c = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} B}, \quad \sin C = \frac{\cos B}{\cos b}, \\ 0 < a < \pi, \quad 0 < c < \pi, \quad 0 < B < \pi.\end{aligned}$$

Первое уравнение имеет решение при условии $\sin b \leq \sin B$ и, так как допустимые значения b и B оба одновременно содержатся либо в первой, либо во второй четверти, то либо $b \leq B \leq \frac{\pi}{2}$, либо $\frac{\pi}{2} \leq B \leq b$. Иными словами, задача может иметь решение лишь при

условии, если значение B заключено между значением b и $\frac{\pi}{2}$. При указанном условии каждое из простейших тригонометрических уравнений имеет два, в общем случае, различные решения.

Из первого уравнения для гипотенузы найдем следующие значения:

$$a_1 = \arcsin \frac{\sin b}{\sin B} \quad \text{и} \quad a_2 = \pi - \arcsin \frac{\sin b}{\sin B}.$$

Предположим, что эти значения различны:

$$a_1 < \frac{\pi}{2} < a_2$$

(равенство $a_1 = a_2 = \frac{\pi}{2}$ имеет место при $\sin b = \sin B$). При

$a = a_1 < \frac{\pi}{2}$ катеты и косвенные углы содержатся в одной четверти либо в первой, либо во второй. Поэтому из двух решений второго (третьего) уравнения следует взять то, которое находится в одной четверти с катетом b (углом B). При $a = a_2 > \frac{\pi}{2}$ катеты и косвенные углы

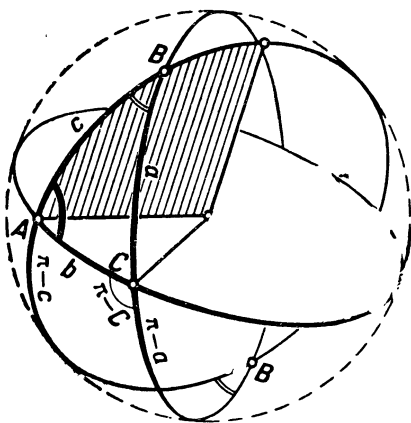
содержатся в различных четвертях, поэтому из двух решений второго (третьего) уравнения следует взять то, которое находится в различных четвертях с катетом b (углом B). Таким образом в общем случае задача допускает два различных решения (черт. 271).

По указанному образцу решаются и исследуются прочие задачи на вычисление основных элементов прямоугольного сферического треугольника по заданным двум его основным элементам.

Решение прямоугонных сферических треугольников, т. е.

треугольников, для которых хотя бы одна сторона равна $\frac{\pi}{2}$, приводится к решению прямоугольных треугольников. В самом деле, если $a = \frac{\pi}{2}$, то полярный треугольник является прямоугольным, так как для него $A_1 = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.

Для углов, близких к $\frac{\pi}{2}$, синус, а для углов, близких к 0, косинус изменяется очень медленно, а потому пользование таблицами в некоторых слу-



Черт. 271

чаях не может обеспечить требуемой точности. В этих случаях искомые элементы можно вычислять по тангенсам, преобразовав надлежащим образом основные формулы. Так, в случае вычисления катета c по гипотенузе a и катету b можно поступить следующим образом. Воспользуемся формулой $\operatorname{tg} \frac{c}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos c}{1 + \cos c}}$; положив $\cos c = \frac{\cos a}{\cos b}$, получим,

$$\operatorname{tg} \frac{c}{2} = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{a+b}{2} \operatorname{tg} \frac{a-b}{2}}.$$

Для вычисления угла B воспользуемся формулой

$$\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos B}{1 + \cos B}}, \quad \text{откуда} \quad \lg \left(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \sin B}{1 - \sin B}}.$$

Положив в этой формуле $\sin B = \frac{\sin b}{\sin a}$,

получим

$$\lg \left(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \frac{a+b}{2}}{\operatorname{tg} \frac{a-b}{2}}}.$$

Знак перед радикалом можно определить, зная, что b и B содержатся в одной четверти.

§ 76. Понятие о решении косоугольных сферических треугольников

В основе решения косоугольных сферических треугольников лежит тот же общий принцип, который применяется при решении прямолинейных треугольников. Остановимся кратко лишь на основных случаях. Если дана система (допустимая) значений трех основных элементов, то взяв систему трех основных соотношений (например, формулы I косинуса стороны) и подставив значения известных элементов, получим тригонометрическую систему трех уравнений для вычисления трех искомых элементов. Присоединив к этой системе уравнений неравенства, связывающие допустимые значения для элементов сферического треугольника, получим смешанную систему для решения и исследования задачи. Основные соотношения, служащие для вычисления значений искомых элементов, можно выбирать в различных видах (см. § 71); этот выбор следует производить с тем расчетом, чтобы сделать наиболее удобными решение тригонометрических уравнений и последующие вычисления. В некоторых случаях целесообразно путем проведения сферического перпендикуляра из вершины на противоположную сторону разбить данный косоугольный треугольник на два прямоугольные треугольника. После этого задача сводится к решению двух прямоугольных треугольников (вернее к вычислению некоторого числа их необходимых элементов).

Существуют следующие шесть типов основных задач на решение треугольников.

- 1°. По трем сторонам: даны a, b, c , вычислить A, B, C .
 2°. По трем углам: даны A, B, C , вычислить a, b, c .
 3°. По двум сторонам и углу между ними: например, даны a, b, C , вычислить A, B, c .
 4°. По двум углам и стороне между ними: например, даны A, B, c , вычислить a, b, C .
 5°. По двум сторонам и углу, противолежащему одной из них: например, даны a, b, A , вычислить B, C, c .
 6°. По двум углам и стороне, противолежащей одному из них: например, даны A, B, a , вычислить b, c, C .
 Задача 1°. Вычисления можно производить по формулам косинусов сторон. Из равенства

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

для вычисления угла A получим следующее простейшее тригонометрическое уравнение:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}.$$

Для вычисления прочих углов получим аналогичные уравнения; к этим уравнениям следует присоединить неравенства:

$$0 < A < \pi, \quad 0 < B < \pi, \quad 0 < C < \pi, \quad A + B + C > \pi.$$

Эта система формул удобна для вычислений на арифмометре.

Задача 2°. Вычисление сторон по данным углам можно производить по формулам (V) косинусов углов, из равенства

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a,$$

получим

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}.$$

Для прочих сторон получим два аналогичных простейших уравнения.

Задача 3°. При данных a, b и C сторона c может быть вычислена по формуле:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.$$

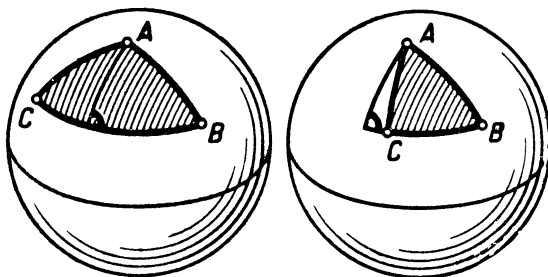
Углы A и B можно найти из формул котангенсов (VI) (см. § 73):

$$\operatorname{ctg} A = \frac{\sin b \operatorname{ctg} a}{\sin C} - \cos b \operatorname{ctg} C,$$

$$\operatorname{ctg} B = \frac{\sin a \operatorname{ctg} b}{\sin C} - \cos a \operatorname{ctg} C$$

(эти формулы удобны для вычислений на арифмометре).

Эту задачу можно решить путем разбиения данного треугольника на два прямоугольных треугольника сферическим перпендикуляром, опущенным из вершины A , на сторону a . Однако этот способ представляет неудобство, связанное с необходимостью различать два случая, изображенные на черт. 272.



Черт. 272

Задача 4° решается подобно предыдущей задаче. Для вычисления элементов a , b и C достаточно воспользоваться формулой косинуса угла и формулами котангенсов:

$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c;$$

$$\operatorname{ctg} a = \operatorname{ctg} c \cos B + \frac{\sin B \operatorname{ctg} A}{\sin c};$$

$$\operatorname{ctg} b = \operatorname{ctg} c \cos A + \frac{\sin A \operatorname{ctg} B}{\sin c}.$$

Задача 5°. Для вычисления угла B при данных a , b и A можно воспользоваться формулой синусов:

$$\sin B = \sin A \frac{\sin b}{\sin a}.$$

Для вычисления стороны c и угла C можно воспользоваться формулами III пяти элементов:

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A$$

(уравнение для вычисления c по данным A , b , B и a):

$$\sin c \cos B = \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos C$$

(уравнение для вычисления C по данным B , b , a и c).

Задача 6° решается аналогично предыдущей.

Как видно из изложенного, по основным формулам может быть решена любая основная задача 1°—6° на вычисление элементов сферического треугольника, однако, для вычислений по логарифмическим таблицам указан-

ные формулы неудобны, а потому в сферической тригонометрии выводятся специальные серии формул, которые и применяются при логарифмических вычислениях. Ниже указаны эти формулы и методы их доказательств (элементарные выкладки опущены, они могут быть выполнены учащимися в виде упражнения). Подставив в формулы

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}, \quad \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}, \quad \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}}$$

значение $\cos A$, найденное из неравенства

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

после элементарных преобразований, получим:

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(p-b) \sin(p-c)}{\sin b \sin c}}, \quad \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-a)}{\sin b \sin c}} \\ \text{и} \quad \operatorname{tg} \frac{A}{2} &= \frac{M}{\sin(p-a)}, \end{aligned} \right\} \left[\frac{A}{2} \right]$$

где

$$2p = a + b + c \quad \text{и} \quad M = \sqrt{\frac{\sin(p-a) \sin(p-b) \sin(p-c)}{\sin p}}$$

и аналогичные формулы для тригонометрических функций углов $\frac{B}{2}$ и $\frac{C}{2}$ (при этом p и M , как симметричные функции сторон, имеют одно и то же значение).

Эти формулы применяются при вычислении углов треугольника по его сторонам.

Аналогично из формулы косинуса угла:

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$$

и из общих формул половинного аргумента могут быть получены формулы, выражающие тригонометрические функции половины сторон:

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{-\cos P \cos(P-A)}{\sin B \sin C}}, \quad \cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos(P-B) \cos(P-C)}{\sin B \sin C}} \\ \operatorname{tg} \frac{a}{2} &= K \cos(P-A), \end{aligned} \right\} \left[\frac{a}{2} \right]$$

где

$$2P = A + B + C$$

и

$$K = \sqrt{\frac{-\cos P}{\cos(P-A) \cos(P-B) \cos(P-C)}},$$

аналогичные формулы имеют место для тригонометрических функций $\frac{b}{2}$

и $\frac{c}{2}$ (в виде упражнения вывести эти формулы из предыдущих путем перехода к полярному треугольнику).

Эти формулы применяются при вычислении сторон сферического треугольника по его углам.

Ф о р м у л ы Д е л а м б р а, так называются нижеследующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{A+B}{2} &= \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{c}{2}} \cos \frac{C}{2}, \\ \sin \frac{A-B}{2} &= \frac{\sin \frac{a-b}{2}}{\sin \frac{c}{2}} \cos \frac{C}{2}, \\ \cos \frac{A+B}{2} &= \frac{\cos \frac{a+b}{2}}{\cos \frac{c}{2}} \sin \frac{C}{2}, \\ \cos \frac{A-B}{2} &= \frac{\sin \frac{a+b}{2}}{\sin \frac{c}{2}} \sin \frac{C}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (D)$$

а также аналогичные формулы для прочих комбинаций сторон и углов.

Для вывода первой формулы подставим в тождество

$$\sin \frac{A+B}{2} = \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}$$

выражения синусов и косинусов половинных углов через стороны треугольника (формулы $\left[\frac{A}{2} \right]$). Приняв во внимание, что

$$\cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin p \sin (p-c)}{\sin a \sin b}},$$

после преобразований радикалов, получим:

$$\begin{aligned} \sin \frac{A+B}{2} &= \frac{\sin (p-b) + \sin (p-a)}{\sin c} \cos \frac{C}{2} = \\ &= \frac{2 \sin \frac{c}{2} \cos \frac{a-b}{2}}{\sin c} \cos \frac{C}{2} = \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{c}{2}} \cos \frac{C}{2}. \end{aligned}$$

Тем же способом выводятся прочие формулы.

Аналогии Непера. Так называются следующие четыре формулы:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{A+B}{2} &= \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{a+b}{2}} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}, \\ \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} &= \frac{\sin \frac{a-b}{2}}{\sin \frac{a+b}{2}} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}, \\ \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} &= \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{A+B}{2}} \operatorname{tg} \frac{c}{2}, \\ \operatorname{tg} \frac{a-b}{2} &= \frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{A+B}{2}} \operatorname{tg} \frac{c}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (N)$$

а также аналогичные формулы для прочих комбинаций сторон и углов.

Аналогии Непера являются следствиями формул Деламбера, достаточно разделить почленно формулы Деламбера, взяв их по две в надлежащих сочетаниях.

Т е о р е м а т а н г е н с о в:

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{a-b}{2}}{\operatorname{tg} \frac{a+b}{2}}$$

выводится почленным делением второй аналогии Непера на первую (или четвертой на третью).

Аналогии Непера применяются при решении основных задач 3° — 6° с помощью логарифмических таблиц. Эти формулы играют ту же роль, что формулы Мольвейде в прямолинейной тригонометрии. При решении задачи 3° , при данных a , b и C , первые две аналогии дают систему уравнений для углов A и B . Сторона c может быть найдена по третьей (или по четвертой) аналогии или по теореме синусов

$$\sin c = \sin C \frac{\sin a}{\sin A}.$$

При решении задачи 4° при данных A , B и c третья и четвертая аналогии дают систему уравнений относительно a и b .

При решении задачи 5° при данных a , b и A угол B находится по теореме синусов, а угол C и сторона c по аналогиям Непера:

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \operatorname{ctg} \frac{A+B}{2} \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{a+b}{2}}, \quad \operatorname{tg} \frac{c}{2} = \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} \frac{\cos \frac{A+B}{2}}{\cos \frac{A-B}{2}}$$

(можно взять две другие аналогии).

Задача 6° решается аналогично предыдущей задаче 5° .

§ 77. Формулы эксцесса и площади сферического треугольника

Эксцесс сферического треугольника определяется как разность между суммой углов и π :

$$\epsilon = (A + B + C) - \pi = 2P - \pi.$$

Если из этого равенства выразить P через эксцесс: $P = \frac{\pi}{2} + \frac{\epsilon}{2}$ и подставить в формулы $\left[\frac{a}{2}\right]$ (см. предыдущий параграф), выражающие тригонометрические функции половин сторон через углы, то (после преобразований) получим:

$$\begin{aligned}\sin \frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{\sin \frac{\epsilon}{2} \sin \left(A - \frac{\epsilon}{2}\right)}{\sin B \sin C}}, \\ \cos \frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{\sin \left(B - \frac{\epsilon}{2}\right) \sin \left(C - \frac{\epsilon}{2}\right)}{\sin B \sin C}}, \\ \operatorname{tg} \frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{\sin \frac{\epsilon}{2} \sin \left(A - \frac{\epsilon}{2}\right)}{\sin \left(B - \frac{\epsilon}{2}\right) \sin \left(C - \frac{\epsilon}{2}\right)}} = \sin \left(A - \frac{\epsilon}{2}\right) N,\end{aligned}$$

где

$$N = \sqrt{\frac{\sin \frac{\epsilon}{2}}{\sin \left(A - \frac{\epsilon}{2}\right) \sin \left(B - \frac{\epsilon}{2}\right) \sin \left(C - \frac{\epsilon}{2}\right)}}.$$

Аналогичные формулы имеют место для других сторон.

Перемножив почленно формулы для $\sin \frac{a}{2}$ и $\sin \frac{b}{2}$, получим

$$\sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} = \frac{\sin \frac{\epsilon}{2}}{\sin C} \sqrt{\frac{\sin \left(A - \frac{\epsilon}{2}\right) \sin \left(B - \frac{\epsilon}{2}\right)}{\sin A \sin B}} = \frac{\sin \frac{\epsilon}{2}}{\sin C} \cos \frac{c}{2}.$$

Отсюда следует формула К а н ь о л и:

$$\sin \frac{\epsilon}{2} = \frac{\sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2}}{\cos \frac{c}{2}} \sin C, \quad (\text{K})$$

а также две аналогичные формулы для $\frac{\epsilon}{2}$, получающиеся круговой перестановкой букв.

Подставив в формулу (K):

$$\sin C = 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} = \frac{2 \sqrt{\sin p \sin (p-a) \sin (p-b) \sin (p-c)}}{\sin a \sin b},$$

получим выражение для $\sin \frac{\varepsilon}{2}$ в виде симметричной функции сторон:

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\sqrt{\sin p \sin (p-a) \sin (p-b) \sin (p-c)}}{2 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}}.$$

Это — вторая формула К а н ъ о л и.

Заменяя в формулах Делаμβера (D) для $\sin \frac{A+B}{2}$ и $\cos \frac{A+B}{2}$ сумму $\frac{A+B}{2}$ через $\frac{\pi}{2} - \frac{C-\varepsilon}{2}$, представим эти формулы в виде пропорций следующим образом:

$$\frac{\cos \frac{C-\varepsilon}{2}}{\cos \frac{C}{2}} = \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{c}{2}}, \quad \frac{\sin \frac{C-\varepsilon}{2}}{\sin \frac{C}{2}} = \frac{\cos \frac{a+b}{2}}{\cos \frac{c}{2}}.$$

Составим следующие пропорции:

$$\frac{\cos \frac{C-\varepsilon}{2} - \cos \frac{C}{2}}{\cos \frac{C-\varepsilon}{2} + \cos \frac{C}{2}} = \frac{\cos \frac{a-b}{2} - \cos \frac{c}{2}}{\cos \frac{a-b}{2} + \cos \frac{c}{2}},$$

$$\frac{\sin \frac{C-\varepsilon}{2} - \sin \frac{C}{2}}{\sin \frac{C-\varepsilon}{2} + \sin \frac{C}{2}} = \frac{\cos \frac{a+b}{2} - \cos \frac{c}{2}}{\cos \frac{a+b}{2} + \cos \frac{c}{2}}.$$

Представив числители и знаменатели в виде произведений, получим (после преобразований):

$$\operatorname{tg} \left(\frac{C}{2} - \frac{\varepsilon}{4} \right) \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{4} = \operatorname{tg} \frac{p-b}{2} \operatorname{tg} \frac{p-a}{2},$$

$$\operatorname{ctg} \left(\frac{C}{2} - \frac{\varepsilon}{4} \right) \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{4} = \operatorname{tg} \frac{p}{2} \operatorname{tg} \frac{p-c}{2}.$$

Умножив почленно последние равенства, получим после извлечения корня следующую формулу Л ю и л ь е:

$$\operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{p}{2} \operatorname{tg} \frac{p-a}{2} \operatorname{tg} \frac{p-b}{2} \operatorname{tg} \frac{p-c}{2}}.$$

Перед радикалом следует взять +, так как $\pi < A+B+C < 3\pi$, откуда

$$\frac{\varepsilon}{4} = \frac{\pi - (A+B+C)}{4} < \frac{\pi}{2}.$$

Зная эксцесс, можно вычислить площадь сферического треугольника, так как

$$S_{\Delta} = \varepsilon R^2,$$

где R — радиус сферы.

§ 78. О различных применениях сферической тригонометрии

1. Применение к решению стереометрических задач. Основные элементы сферического треугольника: его стороны a, b, c и углы A, B, C суть (соответственно) плоские и двугранные углы соответствующего трехгранного угла, поэтому сферическая тригонометрия находит применение при вычислении элементов трехгранных углов.

Примеры.

1. *Вычислить двугранные углы правильных многогранников: тетраэдра и додекаэдра.*

Решение. Плоские углы правильного тетраэдра равны:

$$a = b = c = \frac{\pi}{3}.$$

Воспользовавшись формулой косинуса стороны, получим:

$$\cos A = \frac{\cos \frac{\pi}{3} - \cos^2 \frac{\pi}{3}}{\sin^2 \frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}.$$

Следовательно,

$$A = B = C = \arccos \frac{1}{3} \approx 70^\circ 31' 43''.$$

Для додекаэдра плоские углы при вершинах суть углы правильного пятиугольника, поэтому

$$a = b = c = \frac{3\pi}{5};$$

имеем:

$$\cos A = \frac{\cos \frac{3\pi}{5} - \cos^2 \frac{3\pi}{5}}{\sin^2 \frac{3\pi}{5}}.$$

Подставив значения

$$\cos \frac{3\pi}{5} = -\frac{\sqrt{5}-1}{4} \quad \text{и} \quad \sin \frac{3\pi}{5} = \frac{1}{4} \sqrt{10+2\sqrt{5}},$$

получим:

$$\cos A = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{и} \quad A = B = C = \arccos \left(-\frac{1}{\sqrt{5}} \right) \approx 116^\circ 33' 54''.$$

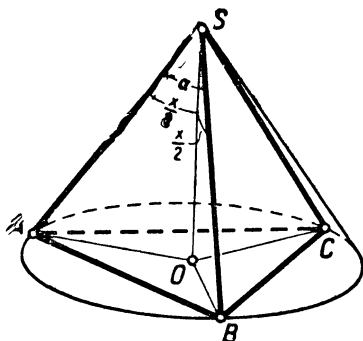
2. *Плоский угол правильного трехгранного угла равен α , вычислить угол при вершине описанного конуса.*

Решение. Вычислим двугранный угол трехгранного угла, применив формулу косинуса стороны (черт. 273):

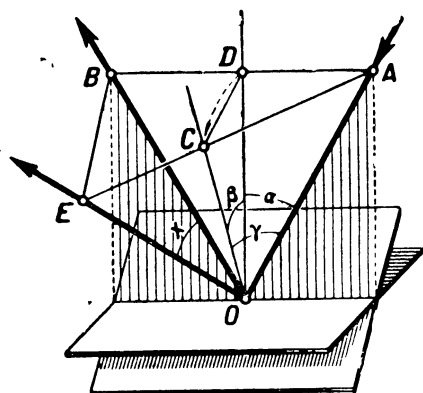
$$\cos A = \cos B = \cos C = \frac{\cos \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\cos \alpha}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Рассмотрим трехгранный угол $SOAB$; в этом угле плоские углы суть α , $\frac{x}{2}$, $\frac{x}{2}$ (где x — искомый угол при вершине конуса), а противолежащие им двугранные углы соответственно суть $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{A}{2}$ и $\frac{B}{2} = \frac{A}{2}$. Вычисление угла $\frac{x}{2}$ равносильно решению сферического (равнобедренного) треугольника по стороне α и прилежащим к ней углам $\frac{A}{2}$ и $\frac{B}{2} = \frac{A}{2}$. Применив теорему синусов,

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \frac{2\pi}{3}} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\sin \frac{A}{2}},$$



Черт. 273



Черт. 274

получим (элементарные преобразования опускаем):

$$\sin \frac{x}{2} = \frac{\sin \alpha}{\sin \frac{2\pi}{3}} \sin \frac{A}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin \alpha \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}} = \frac{2 \sin \frac{a}{2}}{\sqrt{3}}.$$

3. На плоское зеркало падает световой луч; угол падения равен α . Затем зеркало поворачивают на угол β вокруг проекции падающего луча в плоскость зеркала (в первоначальном положении зеркала). Найти угол, на который отклонится отраженный луч от первоначального направления*.

Решение. Пусть AO — падающий луч (черт. 274), OB — отраженный луч при первоначальном положении зеркала, OD — перпендикуляр к плоскости зеркала в первоначальном положении, OC — перпендикуляр к плоскости зеркала в новом положении, OE — новое положение отраженного луча, тогда $\angle AOD = \alpha$, $\angle DOC = \beta$, требуется вычислить угол $x = \angle BOE$. Пусть $\gamma = \angle AOC$ — новый угол падения. Рассмотрим два трехгранных угла $OACD$ и $OABE$; эти углы имеют общий двугранный угол при ребре OA ,

* Эта задача составлена редактором книги П. С. Моденовым.

обозначим этот угол через A . В первом трехгранном угле плоские углы суть α , β и γ , поэтому (из формулы косинуса стороны):

$$\cos A = \frac{\cos \beta - \cos \alpha \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \gamma}.$$

Во втором трехгранном угле плоские углы суть x , 2α и 2γ , поэтому

$$\cos A = \frac{\cos x - \cos 2\alpha \cos 2\gamma}{\sin 2\alpha \sin 2\gamma}.$$

Так как OD есть проекция OC на плоскость OAB и луч OA составляет углы γ и α с наклонной OC и с ее проекцией OD , то (см. стр. 413)

$$\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta.$$

Приравняв значения $\cos A$, получим:

$$\frac{\cos \beta - \cos \alpha \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \gamma} = \frac{\cos x - \cos 2\alpha \cos 2\gamma}{\sin 2\alpha \sin 2\gamma},$$

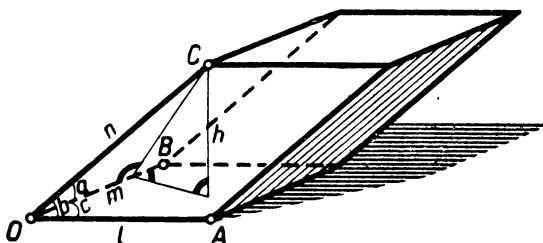
откуда

$$\begin{aligned} \cos x &= 4 \cos \alpha \cos \gamma (\cos \beta - \cos \alpha \cos \gamma) + \cos 2\alpha \cos 2\gamma = \\ &= 4 \cos \alpha \cos \gamma (\cos \beta - \cos \alpha \cos \gamma) + (2 \cos^2 \alpha - 1)(2 \cos^2 \gamma - 1) = \\ &= 4 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - 2 \cos^2 \alpha - 2 \cos^2 \gamma + 1. \end{aligned}$$

Заменяя $\cos \gamma$ на $\cos \alpha \cos \beta$, получим:

$$\begin{aligned} \cos x &= 4 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta - 2 \cos^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta + 1 = \\ &= 2 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta - 2 \cos^2 \alpha + 1 = 1 - 2 \cos^2 \alpha \sin^2 \beta. \end{aligned}$$

4. Вычислить объем наклонного параллелепипеда, если даны длины его ребер, выходящих из одной вершины, и плоские углы при этой вершине.



Черт. 275

Решение. Введем обозначения, как показано на чертеже 275, теми же буквами A , B , C обозначим двугранные углы при ребрах OA , OB и OC . Обозначим через l , m , n длины ребер OA , OB и OC , имеем:

$$V = (\text{пл } OABD) \cdot h = (lm \sin \alpha) (n \sin A \sin B) = lmn \sin \alpha \sin B.$$

Воспользуемся формулами, выражающими $\sin \frac{B}{2}$ и $\cos \frac{B}{2}$ через стороны

сферического треугольника, т. е. через углы a, b, c (см. стр. 466):

$$\begin{aligned}\sin B &= 2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} = 2 \sqrt{\frac{\sin(p-a) \sin(p-c)}{\sin a \sin c}} \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-b)}{\sin a \sin c}} = \\ &= \frac{2 \sqrt{\sin p \sin(p-a) \sin(p-b) \sin(p-c)}}{\sin a \sin c},\end{aligned}$$

где $2p = a + b + c$.

Следовательно, получим окончательно:

$$V = 2lmn \sqrt{\sin \frac{a+b+c}{2} \sin \frac{b+c-a}{2} \sin \frac{a+b-c}{2} \sin \frac{a-b+c}{2}}.$$

II. Применение сферической тригонометрии в геодезии и астрономии. Сферическая тригонометрия применяется к решению различных геодезических задач в тех случаях, когда измерения и вычисления производятся для столь больших участков земной поверхности, что невозможно пренебречь ее кривизной. Сферическая тригонометрия находит широкое применение при решении различных задач теоретической и прикладной астрономии.

Примеры.

1. Задача. Известны географические координаты двух пунктов A и B земной поверхности, вычислить расстояние между данными пунктами.

Решение. Пусть φ_A и φ_B — широты, а λ_A и λ_B — долготы данных пунктов (черт. 276). Расстояние d между A и B измеряется длиной дуги большого круга земного шара. Рассмотрим сферический треугольник, вершинами которого служат полюс и данные пункты A и B . В этом треугольнике стороны PA и PB соответственно суть $\frac{\pi}{2} - \varphi_A$ и $\frac{\pi}{2} - \varphi_B$, угол между ними равен $|\lambda_A - \lambda_B|$. Искомое расстояние равно длине стороны AB . Пусть d — дуговая (радианная или градусная) мера AB , тогда по формуле косинуса стороны имеем:

$$\begin{aligned}\cos d &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_A \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_B \right) + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_A \right) \sin \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_B \right) \times \\ &\quad \times \cos (\lambda_A - \lambda_B)\end{aligned}$$

или

$$\cos d = \sin \varphi_A \sin \varphi_B + \cos \varphi_A \cos \varphi_B \cos (\lambda_A - \lambda_B),$$

искомое расстояние равно Rd , где d — радианная мера дуги AB , а R — радиус земного шара.

Вычислим, например, расстояние между Ленинградом и Берлином.

Координаты Ленинграда $\varphi_A = 59^\circ 56'$ северной широты и $\lambda_A = 30^\circ 18'$ восточной долготы.

Координаты Берлина суть $\varphi_B = 52^\circ 30'$ северной широты и $\lambda_B = 13^\circ 18'$ восточной долготы:

$$\begin{aligned}\cos d &= \sin 59^\circ 56' \cdot \sin 52^\circ 30' + \cos 59^\circ 56' \cos 52^\circ 30' \cos 17^\circ \approx \\ &\approx 0,8655 \cdot 0,7934 + 0,5010 \cdot 0,6088 \cdot 0,9563 \approx 0,9784,\end{aligned}$$

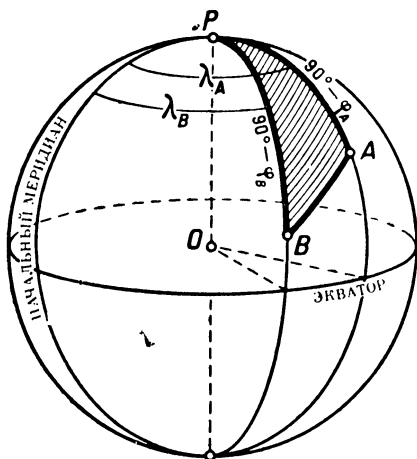
откуда

$$d \approx \arccos 0,9784 = 11^{\circ}56' = 0,2883 \text{ (радиан)}.$$

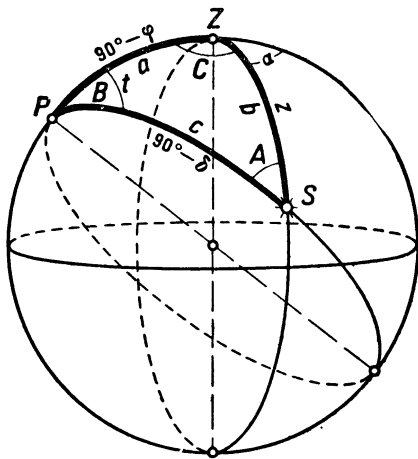
Зная радиус земного шара $R \approx 6370$ (км), получим:

$$AB \approx Rd = 6370 \cdot 0,2883 \approx 1830 \text{ км}.$$

Вычисления выполнены на арифмометре при помощи четырехзначных натуральных таблиц.



Черт. 276



Черт. 277

2. В Харькове наблюдали звезду при часовом угле $t = 50^{\circ}27'32''$ и при азимуте $\alpha = 89^{\circ}7'16''$; вычислить зенитное расстояние звезды и ее склонение δ . Широта Харькова равна $\varphi = 50^{\circ}0'10''$.

Решение. Рассмотрим на небесной сфере треугольник, вершины которого суть небесный полюс P , зенит Z и наблюдаемая звезда S (черт. 277). В сферическом треугольнике PZS сторона PZ равна $90^{\circ} - \varphi$, сторона ZS есть искомое зенитное расстояние z , сторона PS равна $90^{\circ} - \delta$, угол при полюсе P есть часовой угол t , угол при вершине Z равен $180^{\circ} - \alpha$. Следовательно, в треугольнике PZS известны сторона PZ и два прилежащих к ней угла P и Z , требуется вычислить сторону PS и сторону ZS . Перейдя к привычному обозначению, положим:

$$a = PZ = 90^{\circ} - \varphi = 39^{\circ}59'50'', \quad B = t = 50^{\circ}27'32'', \quad C = 180^{\circ} - \alpha = 90^{\circ}52'44''.$$

Для вычисления сторон b и c воспользуемся аналогиями Непера:

$$\operatorname{tg} \frac{b+c}{2} = \frac{\cos \frac{B-C}{2}}{\cos \frac{B+C}{2}} \operatorname{tg} \frac{a}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{b-c}{2} = \frac{\sin \frac{B-C}{2}}{\sin \frac{B+C}{2}} \operatorname{tg} \frac{a}{2}.$$

Производим вычисления:

$$B - C = -40^{\circ}25'12''; \quad \frac{B-C}{2} = -20^{\circ}12'36''; \quad B + C = 141^{\circ}20'16'';$$

$$\frac{B+C}{2} = 70^{\circ}40'8''; \quad \frac{a}{2} = 19^{\circ}59'55'',$$

$$\lg \cos \frac{B-C}{2} = \bar{1},97240$$

$$- \lg \cos \frac{B+C}{2} = 0,48014$$

$$\lg \operatorname{tg} \frac{a}{2} = \bar{1},56104$$

$$\lg \operatorname{tg} \frac{b+c}{2} = 0,01358$$

$$\frac{1}{2}(b+c) = 45^{\circ}53'44'' \quad (*)$$

$$\lg \left| \sin \frac{B-C}{2} \right| = \bar{1},53840$$

$$- \lg \sin \frac{B+C}{2} = 0,02520$$

$$\lg \operatorname{tg} \frac{a}{2} = \bar{1},56104$$

$$\lg \left| \operatorname{tg} \frac{b-c}{2} \right| = \bar{1},12464$$

$$\frac{b-c}{2} = -7^{\circ}35'22''. \quad (**)$$

Из (*) и (**) получим: $b = 38^{\circ}18'22''$, $c = 53^{\circ}29'6''$;

$$z = b = 38^{\circ}18'22'', \quad \delta = 90^{\circ} - c = 36^{\circ}30'54''.$$



АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

§ 79. Определение тригонометрических функций при помощи степенных рядов

В предыдущих главах (см. гл. II и III) тригонометрические функции изучались на основе их геометрического определения. Однако в науке возникла необходимость в определении тригонометрических функций чисто аналитическими средствами, независимо от геометрии.

Создание неевклидовой геометрической системы поставило ее творца — великого русского ученого Н. И. Лобачевского перед проблемой определения тригонометрических функций аналитически, вне зависимости от геометрии Евклида. В своих трудах Н. И. Лобачевский определяет тригонометрические функции при помощи степенных рядов; этими трудами положены основы современной аналитической теории тригонометрических функций.

В § 36 доказано, что в силу трансцендентности тригонометрических функций, эти функции невозможно представить при помощи формул, содержащих только лишь алгебраические операции над аргументом. Если к алгебраическим операциям присоединить операцию предельного перехода, то представление тригонометрических функций при помощи формул окажется возможным. В самом деле, в общем курсе математического анализа доказывается следующая теорема: *тригонометрические функции $\cos x$ и $\sin x$ разлагаются в следующие степенные ряды:*

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots, \quad (C)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad (S)$$

В общем курсе математического анализа тригонометрически, функции считаются известными из элементарной математики, а в элементарной математике эти функции определяются геометри-

чески. Таким образом, *определенные геометрически функции* $\cos x$ и $\sin x$ *могут быть разложены в степенные ряды* (C) и (S).

Обратно, можно принять за основу аналитическое определение тригонометрических функций как сумм степенных рядов (C) и (S) и доказать, что так определенные функции имеют ту самую геометрическую интерпретацию, которая в геометрической теории принимается за определение тригонометрических функций. Это положение будет доказано в настоящем параграфе.

Определение. Аналитическим косинусом и аналитическим синусом называются (соответственно) функции, заданные следующими формулами:

$$C(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad (C)$$

$$S(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad (S)$$

Установим основные свойства аналитического косинуса и синуса, исходя из этого определения.

1°. Областью определения функций $C(x)$ и $S(x)$ является множество всех действительных (комплексных) чисел.

В самом деле, степенные ряды (C) и (S) сходятся (и притом абсолютно) при произвольном действительном (комплексном) значении x . Чтобы в этом убедиться, достаточно применить признак абсолютной сходимости Даламбера. Так, для ряда (C) имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{2n+2} (2n)!}{(2n+2)! |x|^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^2}{(2n+1)(2n+2)} = 0 < 1.$$

2°. Функция $C(x)$ — четная, а функция $S(x)$ — нечетная.

$$C(-x) = C(x); \quad S(-x) = -S(x).$$

Это очевидно, так как ряд (C) содержит только лишь четные, а ряд (S) — только лишь нечетные степени аргумента.

3°. Имеют место формулы сложения, выражающиеся следующими тождествами:

$$C(x-y) = C(x)C(y) + S(x)S(y), \quad (C_{x-y})$$

$$S(x+y) = S(x)C(y) + C(x)S(y). \quad (S_{x+y})$$

Доказательство. В справедливости доказываемых тождеств можно убедиться проверкой, выполнив соответствующие действия над рядами. Для примера докажем первое тождество. Имеем в левой части:

$$C(x-y) = \sum (-1)^n \frac{(x-y)^{2n}}{(2n)!}.$$

Правую часть вычисляем путем умножения рядов (что возможно в силу их абсолютной сходимости). Выполним умножение рядов:

$$C(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots,$$

$$C(y) = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + \dots,$$

получим ряд — произведение с общим членом:

$$(-1)^n \left[\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{x^{2n-2} y^2}{(2n-2)! 2!} + \dots + \frac{x^{2n-2k} y^{2k}}{(2n-2k)! (2k)!} + \dots + \frac{y^{2n}}{(2n)!} \right].$$

Аналогично, выполнив умножение рядов

$$S(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots,$$

$$S(y) = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{y^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots,$$

получим ряд — произведение с общим членом:

$$\begin{aligned} (-1)^{n-1} \left[\frac{x^{2n-1} y}{(2n-1)!} + \frac{x^{2n-3} y^3}{(2n-3)! 3!} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{x^{2n-2k+1} y^{2k-1}}{(2n-2k+1)! (2k-1)!} + \dots + \frac{xy^{2n-1}}{(2n-1)!} \right]. \end{aligned}$$

Выполнив сложение $C(x)C(y) + S(x)S(y)$, получим ряд с общим членом:

$$\begin{aligned} (-1)^n \left[\frac{x^{2n}}{(2n)!} - \frac{x^{2n-1} y}{(2n-1)!} + \frac{x^{2n-2} y^2}{(2n-2)! 2!} - \dots + \right. \\ \left. + \frac{(-1)^k x^{2n-k} y^k}{(2n-k)! k!} + \dots + \frac{y^{2n}}{(2n)!} \right] = (-1)^n \frac{(x-y)^{2n}}{(2n)!}. \end{aligned}$$

Таким образом, получился ряд тождественный ряду, изображающему левую часть доказываемого равенства (C_{x-y}) , ч. т. д.
С л е д с т в и я.

I. Положив $y = x$ в тождестве (C_{x-y}) , получим тождество:

$$C^2(x) + S^2(x) \equiv 1.$$

В самом деле

$$C(x-x) = C(0) = 1$$

(положить $x = 0$ в ряде (C).

II. Заменяв в тождествах (C_{x-y}) и (S_{x+y}) аргумент y на $-y$ и воспользовавшись четностью аналитического косинуса, и нечет-

ностью аналитического синуса, получим две следующие формулы сложения

$$\begin{aligned} C(x+y) &= C(x)C(y) - S(x)S(y) & (C_{x+y}), \\ S(x-y) &= S(x)C(y) - C(x)S(y) & (S_{x-y}). \end{aligned}$$

III. Таким образом, для аналитического косинуса и аналитического синуса имеют место те же самые формулы сложения, которые в гл. II доказаны для тригонометрических функций, достаточно лишь заменить $\cos x$ на $C(x)$, а $\sin x$ на $S(x)$. В качестве следствий теорем сложения, путем формальных преобразований были получены формулы преобразования сумм в произведения и произведений в суммы, формулы удвоения и деления пополам аргумента для функций $\cos x$ и $\sin x$. Так как формулы сложения имеют место для функций $C(x)$ и $S(x)$, то указанные следствия этих формул остаются в силе (для доказательства нет надобности воспроизводить изложенные в гл. II выкладки).

Формулы преобразования произведений в суммы:

$$\left. \begin{aligned} C(x)C(y) &= \frac{C(x+y) + C(x-y)}{2}; \\ S(x)S(y) &= \frac{C(x-y) - C(x+y)}{2}; \\ C(x)S(y) &= \frac{S(x+y) - S(x-y)}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (A)$$

Формулы преобразования сумм в произведения:

$$\left. \begin{aligned} C(x) + C(y) &= 2C\left(\frac{x+y}{2}\right)C\left(\frac{x-y}{2}\right); \\ C(x) - C(y) &= -2S\left(\frac{x+y}{2}\right)S\left(\frac{x-y}{2}\right); \\ S(x) + S(y) &= 2S\left(\frac{x+y}{2}\right)C\left(\frac{x-y}{2}\right); \\ S(x) - S(y) &= 2C\left(\frac{x+y}{2}\right)S\left(\frac{x-y}{2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (B)$$

Формулы удвоения и деления пополам аргумента:

$$\begin{aligned} S(2x) &= 2S(x)C(x); \quad C(2x) = C^2(x) - S^2(x); & (C) \\ C\left(\frac{x}{2}\right) &= \pm \sqrt{\frac{1+C(x)}{2}}; \quad S\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1-C(x)}{2}}. \end{aligned}$$

IV. Функции $C(x)$ и $S(x)$ имеют в интервале $-\infty < x < \infty$ производные любого порядка. Эти производные можно получить почленным дифференцированием (соответствующее число раз) рядов (C) и (S) .

Это свойство вытекает из общей теоремы анализа о дифференцируемости степенного ряда в интервале сходимости.

В частности, имеем:

$$C'(x) = -x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \dots = -S(x);$$

$$S'(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = C(x).$$

V. Уравнение $C(x) = 0$ имеет наименьший положительный корень. Обозначим через λ этот корень, тогда

а) в интервале $(0, \lambda)$ обе функции $C(x)$ и $S(x)$ положительны,

б) на сегменте $[0, \lambda]$ функция $C(x)$ убывает от 1 до 0, а функция $S(x)$ возрастает от 0 до 1.

Доказательство. Имеем:

$$S(x) = x \left(1 - \frac{x^2}{2 \cdot 3} \right) + \frac{x^5}{5!} \left(1 - \frac{x^2}{6 \cdot 7} \right) + \dots$$

При достаточно малых положительных значениях x все члены этого последнего ряда положительны, а потому

$$S(x) > 0.$$

Это неравенство будет наверное выполнено, если $0 < x < 2$. Итак, в интервале $(0, 2)$ функция $S(x)$ положительна. Докажем, что в этом интервале функция $C(x)$ убывает, для этого достаточно установить, что ее производная отрицательна. В самом деле:

$$C'(x) = -S(x) < 0$$

в интервале $(0, 2)$.

Вычислим значение функции $C(x)$ в точках 0 и 2:

$$\begin{aligned} C(0) &= 1, \quad C(2) = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} + \dots = \\ &= -\frac{1}{3} - \frac{2^6}{6!} \left(1 - \frac{4}{7 \cdot 8} \right) - \frac{2^{10}}{10!} \left(1 - \frac{4}{11 \cdot 12} \right) - \dots < 0. \end{aligned}$$

Следовательно, в концах сегмента $[0, 2]$ функция $C(x)$ имеет противоположные знаки:

$$C(0) > 0 \text{ и } C(2) < 0.$$

В силу непрерывности и монотонности этой функции на данном сегменте существует единственное значение аргумента

$$x = \lambda, \quad 0 < \lambda < 2,$$

при котором функция $C(x)$ обращается в нуль:

$$C(\lambda) = 0;$$

при этом

$$C(x) > 0$$

в интервале

$$0 < x < \lambda.$$

Итак, обе функции $C(x)$ и $S(x)$ положительны в интервале $0 < x < \lambda$.

Положив $x = \lambda$, в тождестве

$$C^2(x) + S^2(x) \equiv 1,$$

получим $S(\lambda) = 1$ (принять во внимание, что $S(\lambda) > 0$).

Так как $S'(x) = C(x) > 0$ в интервале $(0, \lambda)$, то на сегменте $[0, \lambda]$ функция $S(x)$ возрастает.

VI. *Имеют место формулы приведения:*

$$C(x + \lambda) = -S(x); \quad S(x + \lambda) = C(x). \quad [x + \lambda]$$

$$C(x + 2\lambda) = -C(x); \quad S(x + 2\lambda) = -S(x). \quad [x - 2\lambda]$$

$$C(x + 3\lambda) = S(x); \quad S(x + 3\lambda) = -C(x). \quad [x + 3\lambda]$$

$$C(x + 4\lambda) = C(x); \quad S(x + 4\lambda) = S(x). \quad [x + 4\lambda]$$

Доказательство. Вычислим значения функций $C(x)$ и $S(x)$ в точках λ , 2λ , 3λ и 4λ ; имеем:

$$C(\lambda) = 0, \quad S(\lambda) = 1;$$

$$C(2\lambda) = C^2(\lambda) - S^2(\lambda) = -1, \quad S(2\lambda) = 0;$$

$$C(3\lambda) = C(\lambda)C(2\lambda) - S(\lambda)S(2\lambda) = 0;$$

$$S(3\lambda) = S(\lambda)C(2\lambda) + S(2\lambda)C(\lambda) = -1$$

и, наконец:

$$C(4\lambda) = C^2(2\lambda) - S^2(2\lambda) = 1, \quad S(4\lambda) = 2S(2\lambda)C(2\lambda) = 0.$$

Для доказательства формул приведения достаточно воспользоваться теоремами сложения. Так, например:

$$C(x + \lambda) = C(x)C(\lambda) - S(x)S(\lambda) = -S(x).$$

С л е д с т в и е . Функции $C(x)$ и $S(x)$ периодические. В самом деле, тождества $[x + 4\lambda]$ показывают, что число 4λ является периодом для каждой из этих функций.

VII. *В каждом из интервалов $(k\lambda, (k+1)\lambda)$ (где k —произвольное целое число) каждая из функций $C(x)$ и $S(x)$ знакопостоянна.*

В силу периодичности рассматриваемых функций, достаточно установить их знакопостоянство лишь в следующих четырех интервалах:

$$(0, \lambda), (\lambda, 2\lambda), (2\lambda, 3\lambda), (3\lambda, 4\lambda);$$

a) в интервале $(0, \lambda)$, где функции положительны:

$$C(x) > 0, \quad S(x) > 0;$$

b) в интервале $\lambda, 2\lambda$:

$$C(x) < 0, \quad S(x) > 0.$$

В самом деле, если $\lambda < x < 2\lambda$, то $x = \lambda + \alpha$, где $0 < \alpha < \lambda$. Воспользовавшись формулами приведения, получим:

$$C(x) = -S(\alpha) < 0, \quad S(x) = C(\alpha) > 0.$$

Аналогично доказываются следующие утверждения:

с) в интервале $(2\lambda, 3\lambda)$:

$$C(x) < 0, \quad S(x) < 0;$$

д) в интервале $(3\lambda, 4\lambda)$:

$$C(x) > 0, \quad S(x) < 0.$$

С л е д с т в и е. Функция $S(x)$ положительна в интервале $(0, 2\lambda)$ и отрицательна в интервале $(2\lambda, 4\lambda)$.

В силу периодичности, $S(x) > 0$ в интервалах $(4k\lambda, (4k+2)\lambda)$ и $S(x) < 0$ в интервалах $((4k+2)\lambda, 4(k+1)\lambda)$. В частности, $S < 0$ в интервале $(-2\lambda, 0)$.

Функция $C(x)$ четная, поэтому она положительна в интервале $(-\lambda, 0)$. Из изложенного следует, что функция $C(x)$ положительна в интервале $(-\lambda, \lambda)$ и отрицательна в интервале $(\lambda, 3\lambda)$.

В силу периодичности,

$$C(x) > 0 \text{ в интервалах } ((4k-1)\lambda, (4k+1)\lambda)$$

и

$$C(x) < 0 \text{ в интервалах } ((4k+1)\lambda, (4k+3)\lambda).$$

VIII. На сегменте $[0, 2\lambda]$ функция $C(x)$ убывает, а на сегменте $[2\lambda, 4\lambda]$ — возрастает.

Доказательство. Пусть, например, $0 \leq x_1 \leq x_2 < 2\lambda$. Составим разность $C(x_2) - C(x_1)$, преобразуем ее в произведение:

$$C(x_2) - C(x_1) = -2S\left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right)S\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right).$$

Так как

$$0 \leq x_1 < x_2 \leq 2\lambda,$$

то

$$0 < \frac{x_2 + x_1}{2} < 2\lambda$$

и

$$0 < \frac{x_2 - x_1}{2} < \lambda,$$

а потому

$$S\left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right) > 0$$

и

$$S\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) > 0.$$

Откуда

$$C(x_2) - C(x_1) < 0$$

и

$$C(x_2) < C(x_1),$$

т. е. функция $C(x)$ убывает на сегменте $[0, 2\lambda]$. Возрастание функции $C(x)$ на сегменте $[2\lambda, 4\lambda]$ доказывается аналогично.

Тем же методом доказывается следующее утверждение:

в интервале $(-\lambda, \lambda)$ функция $S(x)$ возрастает, а в интервале $(\lambda, 3\lambda)$ — убывает.

Теорема. Аналитический косинус и аналитический синус совпадают с тригонометрическими функциями $\cos x$ и $\sin x$:

$$C(x) = \cos x, S(x) = \sin x.$$

Доказательство. Достаточно доказать следующие положения:

а) уравнения

$$X = \dot{C}(x), Y = S(x). \quad (1)$$

Суть параметрические уравнения единичной окружности

$$X^2 + Y^2 = 1;$$

б) *аргумент x есть длина дуги AM единичной окружности от точки $A(1, 0)$ до точки $M(X, Y)$.*

а) Рассмотрим простую дугу, определяемую уравнениями (1) на сегменте $0 \leq x \leq \lambda$ (четверть периода). На этом сегменте функции $C(x)$ и $S(x)$ непрерывны и монотонны (первая убывает, вторая возрастает), следовательно, система (1) определяет на плоскости некоторую простую дугу.

При произвольном значении параметра x , где $0 \leq x \leq \lambda$, соответствующая точка дуги расположена в первой четверти единичной окружности, так как

$$X^2 + Y^2 = [C(x)]^2 + [S(x)]^2 = 1$$

и

$$X = C(x) \geq 0; Y = S(x) \geq 0.$$

Обратно, пусть $M(X, Y)$ — точка, расположенная в первой четверти единичной окружности:

$$Y = \sqrt{1 - X^2},$$

где

$$0 \leq X \leq 1;$$

эта точка соответствует тому значению параметра x на сегменте

$$0 \leq x \leq \lambda,$$

при котором функция $C(x)$ имеет значение равное X .

Концами дуги служат точки:

$$x = 0, X = C(0) = 1, Y = S(0) = 0$$

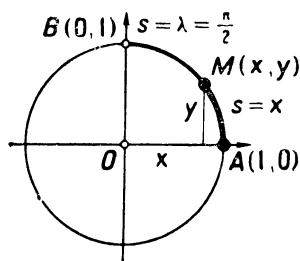
и

$$x = \lambda, X = C(\lambda) = 0, Y = S(\lambda) = 1 \text{ (черт. 278).}$$

Точно так же докажем, что сегменту $\lambda \leq x \leq 2\lambda$ соответствует вторая, сегменту $2\lambda \leq x \leq 3\lambda$ — третья, а сегменту $3\lambda \leq x \leq 4\lambda$ — четвертая четверти единичной окружности.

Таким образом, система (I) на сегменте $0 \leq x \leq 4\lambda$ дает параметрическое представление полной единичной окружности.

б) Докажем что параметр x есть длина дуги s единичной окружности, отсчитываемой от точки $A(1, 0)$. Имеем



Черт. 278

$$s = \int_0^x \sqrt{X'^2 + Y'^2} dx = \int_0^x \sqrt{[-C(x)]^2 + [S(x)]^2} dx = \int_0^x dx = x.$$

Значит x есть радианная мера угла, образованного отрезком OM (черт 278) с осью абсцисс. Отсюда вытекает интерпретация функций $C(x)$ и $S(x)$ как «линии косинуса» и «линии синуса» угла x , ч. т. д.

Из изложенного следует, что геометрическое определение функций $\cos x$ и $\sin x$ и аналитическое определение функций $C(x)$ и $S(x)$ являются лишь различными способами задания одних и тех же функций. Свойства этих функций можно изучать как геометрическими, так и чисто аналитическими средствами.

§ 80. Вычисление значений тригонометрических функций аналитическими средствами

Представление тригонометрических функций при помощи степенных рядов дает удобный аппарат для вычисления значений этих функций с любой заданной степенью точности. Как известно, чтобы вычислить значение тригонометрической функции от произвольного данного значения аргумента, достаточно уметь вычислять значения тригонометрических функций от значений аргумента, заключенных на сегменте $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ (для значения аргумента вне этого сегмента достаточно воспользоваться формулами приведения; см. § 23). Поэтому таблицы значений тригонометрических функций составляются обычно для углов от 0° до 45° . Итак, будем считать, что

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$; так как $\frac{\pi}{4} < 1$, то и подавно $0 \leq x \leq 1$; при этом условии ряды

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

и

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

являются знакопеременными рядами с убывающими по абсолютной величине членами. Из теории рядов известно, что сумма знакопеременного ряда с убывающими (по абсолютной величине) членами заключена между двумя его последовательными частными суммами. Следовательно, имеем в частности:

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x;$$

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120};$$

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} < \sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \text{ и т. д.}$$

Аналогичные неравенства имеют место для косинуса.

Если для вычисления значения тригонометрической функции от данного значения аргумента (считаем $0 \leq x \leq 1$) заменить соответствующий ряд некоторой его частной суммой, т. е. сохранить некоторое количество его первых членов и отбросить все последующие члены, то допущенная от такой замены ошибка меньше абсолютной величины первого отброшенного члена. Пусть, например, требуется составить пятизначные таблицы значений синуса. Сохраним в ряде четыре первые члена, тогда получим приближенное равенство

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

с ошибкой, не превосходящей $\frac{x^9}{9!}$. Так как $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} < 0,8$, то имеем следующую оценку погрешности:

$$\frac{x^9}{9!} < \frac{(0,8)^9}{9!} < \frac{0,2}{362880} < 0,000001.$$

Таким образом, приближенная формула (1) вполне достаточна для составления пятизначных таблиц значений синуса. Следует заметить, что при малых значениях аргумента можно пользоваться меньшим числом членов.

Примеры. 1. Показать, что для составления четырехзначной таблицы значений синусов углов от 0° до 15° достаточно пользоваться приближенной формулой $\sin x = x - \frac{x^3}{6}$.

Угол 15° в радианной мере измеряется числом $\frac{\pi}{12} \approx 0,2618 < 0,3$. При пользовании данной формулой допущенная ошибка будет меньше, чем

$$\frac{x^5}{5!} < \frac{(0,3)^5}{120} = \frac{3^5}{120 \cdot 10^5} = \frac{3^4}{4 \cdot 10^6} < 0,00002.$$

2. Вычислить с точностью до пяти десятичных знаков $24^\circ 30'$.

Решение. Угол $24^\circ 30'$ в радианной мере измеряется числом 0,427606. Воспользуемся приближенной формулой

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$$

с ошибкой, меньшей чем

$$\frac{x^8}{8!} < \frac{(0,5)^8}{8!} = \frac{5^8}{8! 10^8} < 0,0000005.$$

Положив $x = 0,427606$, произведем вычисления по общим правилам приближенных вычислений с шестью десятичными знаками:

положительные слагаемые	отрицательные слагаемые
$1 = 1,000000$	$\frac{x^2}{2!} = 0,091422$
$\frac{x^4}{4!} = 0,001393$	$\frac{x^6}{6!} = 0,000008$
$1,001393$	$0,091430$

Откуда после вычитания и округления получим

$$\cos 24^\circ 30' \approx 0,90996.$$

§ 81. Аксиоматический метод в тригонометрии

В настоящем параграфе будет дано аксиоматическое определение тригонометрических функций как функций, обладающих некоторыми точно описанными характеристическими свойствами, на основании которых можно установить все прочие свойства этих функций*.

При этом, в приведенных ниже рассуждениях совершенно безразлично, какими средствами эти функции могут быть заданы.

Определение. Аналитическим косинусом $C(x)$ и аналитическим синусом $S(x)$ называются функции:

I определенные для всех действительных значений x ;

II удовлетворяющие функциональному уравнению:

$$C(x-y) = C(x)C(y) + S(x)S(y); \quad (C_{x-y})$$

(иными словами, равенство (C_{x-y}) выполняется тождественно при всех значениях x и y);

* При написании настоящего параграфа я пользовался ценными советами редактора книги П. С. Моденова.

III *положительные в интервале $0 < x < \lambda$, где λ — некоторое положительное число*

$$C(x) > 0 \text{ и } S(x) > 0 \text{ при } 0 < x < \lambda;$$

IV *в граничных точках интервала $(0, \lambda)$ имеют место следующие равенства:*

$$C(0) = S(\lambda) = 1.$$

Сформулированное определение не дает ответа на вопрос, существует ли хотя бы одна система функций $C(x)$ и $S(x)$, удовлетворяющая перечисленным условиям.

Предметом специального исследования должен явиться также вопрос, является ли построенная (каким-либо способом) пара функций $C(x)$ и $S(x)$ единственной (при данном λ), удовлетворяющей всем перечисленным условиям I — IV.

В настоящем параграфе мы, не касаясь вопроса о существовании функций $C(x)$ и $S(x)$, установим свойства этих функций, вытекающие только лишь из основных условий I — IV. Таким образом, следующие ниже рассуждения настоящего параграфа будут носить условный характер: в них *будут установлены свойства функций $C(x)$ и $S(x)$ в предположении, что эти функции существуют.*

1°. *Имеют место следующие равенства граничных значений:*

$$S(0) = C(\lambda) = 0.$$

Доказательство. Положив в основном тождестве (II)

$$C(x - y) = C(x)C(y) + S(x)S(y) \quad (C_{x-y})$$

$x = y = 0$, получим:

$$C(0) = C^2(0) + S^2(0), \text{ откуда в силу IV}$$

$$1 = 1 + S^2(0) = 0 \text{ и } S(0) = 0.$$

Положив в II $x = y = \lambda$, получим:

$$C(0) = C^2(\lambda) + S^2(\lambda),$$

откуда $1 + C^2(\lambda) = 1$ и $C(\lambda) = 0$.

2°. *Имеет место тождество*

$$C^2(x) + S^2_{(x)} = 1.$$

Доказательство. Достаточно положить в основном соотношении (II) $x = y$ и принять во внимание условие (IV).

Следствие. *Функции $C(x)$ и $S(x)$ ограничены:*

$$|C(x)| \leq 1, \quad |S(x)| \leq 1.$$

3°. *Имеют место следующие тождества, выражающие функции $C(x)$ и $S(x)$ одна через другую:*

$$C(\lambda - x) = S(x), \quad S(\lambda - x) = C(x).$$

Доказательство. Заменяя в основном соотношении (II) x на λ , а y на x , получим:

$$C(\lambda - x) = C(\lambda)C(x) + S(\lambda)S(x) = S(x).$$

Заменяя в полученном равенстве x на $\lambda - y$, получим:

$$C(y) = S(\lambda - y),$$

ч. т. д.

4°. Для функции $S(x)$ имеет место формула сложения:

$$S(x + y) = S(x)C(y) + S(y)C(x). \quad (S_{x+y})$$

Доказательство. Воспользовавшись доказанным свойством 3°, получим:

$$\begin{aligned} S(x + y) &= C[\lambda - (x + y)] = C[(\lambda - x) - y] = \\ &= C(\lambda - x)C(y) + S(\lambda - x)S(y) = S(x)C(y) + C(x)S(y), \end{aligned}$$

ч. т. д.

5°. Функция $C(x)$ четная, а функция $S(x)$ нечетная.

Доказательство. Положив в основном соотношении (II) $x = 0$, получим:

$$C(-y) = C(0)C(y) + S(0)S(y) = C(y).$$

Итак, $C(x)$ — четная функция.

Положив $y = -x$, в формуле (S_{x+y}) получим:

$$\begin{aligned} 0 &= S(x - x) = S(x)C(-x) + C(x)S(-x) = \\ &= C(x)[S(x) + S(-x)] = 0. \end{aligned}$$

Возможны два случая:

С л у ч а й а): $C(x) \neq 0$; тогда

$$S(x) + S(-x) = 0 \quad \text{или} \quad S(x) = -S(-x).$$

С л у ч а й б): $C(x) = 0$.

Пусть y — произвольное число, взятое в интервале $(0, \lambda)$. Примем во внимание, что $S(-y) = -S(y)$, ибо $C(y) > 0$ [в силу предыдущего пункта а)] и что $S(x) \neq 0$, так как в силу пункта 2° $S(x) = \pm 1$.

Имеем далее

$$C(x + y) = C(x - (-y)) = C(x)C(y) + S(x)S(-y) = \pm S(y) \neq 0.$$

В таком случае

$$S(x + y) = -S(-x - y). \quad \text{Последнее равенство перепишется так:}$$

$$S(x)C(y) = -S(-x)C(y)$$

[принять во внимание, что $C(-x) = C(x) = 0$ и $C(-y) = C(y)$], откуда и в этом случае $S(x) = -S(-x)$.

Следовательно, $S(x)$ — нечетная функция.

6°. Для функций $C(x)$ и $S(x)$ имеют место все четыре формулы сложения, $(C_{x \pm y})$, $(S_{x \pm y})$, а также все их следствия, т. е. формулы приведения, формулы удвоения и деления аргумента пополам, формулы преобразования произведений в суммы и сумм в произведения (все эти формулы в принятом обозначении выписаны в параграфе 79; изложенное их обоснование остается в силе).

С л е д с т в и я: I. Функции $C(x)$ и $S(x)$ периодические с периодом 4λ (см. параграф 79).

II. Остается в силе пункт VIII параграфа 79, в котором установлены промежутки монотонности функций $C(x)$ и $S(x)$.

7°. Функции $C(x)$ и $S(x)$ непрерывны в интервале $(-\infty, +\infty)$. Докажем следующую лемму.

Лемма. Функция $C(x)$ непрерывна в точке $x=0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $C(0) = 1$, то для доказательства леммы надо установить, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} C(x) = 1.$$

Достаточно рассмотреть правый предел $\lim_{x \rightarrow 0} C(x)$, считая, что $x > 0$, так как если этот правый предел существует, то, в силу свойства четности $C(x)$:

$$C(x) = C(-x),$$

существует и имеет то же значение и левый предел $C(x)$ в точке 0.

Так как в интервале $(0, \lambda)$ функция $C(x)$ монотонна (убывает) и ограничена, то правый предел функции $C(x)$ существует, а следовательно, существует предел (двусторонний) $C(x)$ в точке $x=0$; обозначим через l этот предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} C(x) = l.$$

Так как в интервале $(0, \lambda)$ функция $C(x) > 0$ и убывает, то $l \neq 0$. Перейдя к пределу в тождестве $C(2x) = 2C^2(x) - 1$, получим

$$\lim_{x \rightarrow 0} C(2x) = 2 \lim_{x \rightarrow 0} C^2(x) - 1 \quad \text{или} \quad l = 2l^2 - 1.$$

Это квадратное уравнение имеет один положительный корень $l = 1$. Следовательно,

$$l = \lim_{x \rightarrow 0} C(x) = 1 \quad \text{и} \quad C(0) = 1,$$

т. е. функция $C(x)$ непрерывна в точке 0, ч. т. д.

С л е д с т в и е. Функция $S(x)$ непрерывна в точке $x=0$. В самом деле,

$$\lim_{x \rightarrow 0} S(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (\pm \sqrt{1 - C^2(x)}) = 0.$$

Значение функции $S(x)$ в точке $x = 0$ также равно 0

$$S(0) = \lim_{x \rightarrow 0} S(x) = 0.$$

Теорема. Функции $C(x)$ и $S(x)$ непрерывны в каждой точке x .

Доказательство. Требуется доказать, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} C(x+h) = C(x) \quad \text{и} \quad \lim_{h \rightarrow 0} S(x+h) = S(x).$$

Докажем первое равенство. Имеем:

$$C(x+h) = C(x)C(h) - S(x)S(h)$$

и

$$\lim_{h \rightarrow 0} C(x+h) = C(x) \lim_{h \rightarrow 0} C(h) - S(x) \lim_{h \rightarrow 0} S(h) = C(x),$$

$$\text{так как } \lim_{h \rightarrow 0} C(h) = 1, \quad \lim_{h \rightarrow 0} S(h) = 0.$$

Второе равенство доказывается тем же методом, ч. т. д.

Функция аналитический тангенс $T(x)$ определяется формулой:

$$T(x) = \frac{S(x)}{C(x)};$$

изучение ее свойств не представляет затруднений и может быть выполнено обычными способами (см. гл. I и III) на основании определения и известных свойств косинуса и синуса. Это же замечание относится к котангенсу.

§ 82. Теорема единственности

Теорема единственности. При данном положительном λ не существует двух различных систем функций $C(x)$, $S(x)$ и $C_1(x)$, $S_1(x)$, удовлетворяющих основным условиям I — IV.

Доказательство. Требуется доказать, что если (при данном $\lambda > 0$) как для функций $C(x)$, $S(x)$, так и для функций $C_1(x)$, $S_1(x)$ выполняются основные условия I — IV, то имеют место тождества:

$$C(x) \equiv C_1(x), \quad S(x) \equiv S_1(x).$$

1°. Рассмотрим последовательность значений аргумента:

$$\lambda, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2^2}, \dots, \frac{\lambda}{2^n}, \dots \quad \left\{ \frac{\lambda}{2^n} \right\}$$

Докажем, что в точках этой последовательности значения функций $C(x)$ и $C_1(x)$ равны. В силу условия IV, имеем:

$$C(\lambda) = 0, \quad C_1(\lambda) = 0.$$

Последовательным применением формулы деления аргумента пополам получим:

$$C\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+C(x)}{2}} \quad (\text{где } 0 < x \leq \lambda)$$

$$C\left(\frac{\lambda}{2}\right) = C_1\left(\frac{\lambda}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad C\left(\frac{\lambda}{2^2}\right) = C_1\left(\frac{\lambda}{2^2}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

и в общем виде:

$$C\left(\frac{\lambda}{2^n}\right) = C_1\left(\frac{\lambda}{2^n}\right) = \frac{s_n}{2},$$

где $s_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}$ (n — радикалов; применить метод математической индукции).

Точно так же найдем, что

$$S\left(\frac{\lambda}{2^n}\right) = S_1\left(\frac{\lambda}{2^n}\right) = \frac{\sqrt{2-s_{n-1}}}{2}.$$

2°. Пусть m — произвольное целое число, а n — произвольное натуральное число; докажем, что в точках $\frac{m}{2^n}\lambda$ значения функций $C(x)$ и $C_1(x)$ (а также $S(x)$ и $S_1(x)$) равны. По доказанному при $m = 1$ имеем равенства

$$C\left(\frac{\lambda}{2^n}\right) = C_1\left(\frac{\lambda}{2^n}\right); \quad S\left(\frac{\lambda}{2^n}\right) = S_1\left(\frac{\lambda}{2^n}\right).$$

Допустим, что равенства:

$$C\left(\frac{m\lambda}{2^n}\right) = C_1\left(\frac{m\lambda}{2^n}\right); \quad S\left(\frac{m\lambda}{2^n}\right) = S_1\left(\frac{m\lambda}{2^n}\right) \quad (1)$$

верны для некоторого целого m ; докажем, что в этом предположении они будут верны для числа $m + 1$. В самом деле, применим формулы сложения;

$$\begin{aligned} C\left(\frac{m+1}{2^n}\lambda\right) &= C\left(\frac{m}{2^n}\lambda + \frac{\lambda}{2^n}\right) = C\left(\frac{m}{2^n}\lambda\right)C\left(\frac{\lambda}{2^n}\right) - S\left(\frac{m}{2^n}\lambda\right)S\left(\frac{\lambda}{2^n}\right) = \\ &= C_1\left(\frac{m\lambda}{2^n}\right)C_1\left(\frac{\lambda}{2^n}\right) - S_1\left(\frac{m\lambda}{2^n}\right)S_1\left(\frac{\lambda}{2^n}\right) = C_1\left(\frac{m+1}{2^n}\lambda\right). \end{aligned}$$

Для функции $S(x)$ рассуждения аналогичные.

В силу принципа математической индукции, равенства (1) справедливы при произвольном натуральном m .

При $m = 0$ имеет также:

$$C\left(\frac{m\lambda}{2^n}\right) = C_1\left(\frac{m\lambda}{2^n}\right) = 1; \quad S\left(\frac{m\lambda}{2^n}\right) = S_1\left(\frac{m\lambda}{2^n}\right) = 0.$$

Если $m < 0$ — целое отрицательное число, то для доказательства равенств (1) достаточно воспользоваться свойствами четности и нечетности рассматриваемых функций. Так, например:

$$C\left(\frac{m\lambda}{2^n}\right) = C\left(\frac{(-m)\lambda}{2^n}\right) = C_1\left(\frac{(-m)\lambda}{2^n}\right) = C_1\left(\frac{m\lambda}{2^n}\right).$$

3°. Пусть x — произвольное действительное число. Достаточно доказать равенства

$$C(x) = C_1(x); \quad S(x) = S_1(x)$$

для случая $x > 0$, так как, в силу свойств четности и нечетности рассматриваемых функций, эти равенства будут верны и при значении $-x$.

Разложим отношение $\frac{x}{\lambda}$ в двоичную дробь:

$$\frac{x}{\lambda} = p_0 + \frac{p_1}{2} + \frac{p_2}{2^2} + \dots \quad \text{или}$$

$$x = p_0\lambda + \frac{p_1\lambda}{2} + \frac{p_2\lambda}{2^2} + \dots + \frac{p_n\lambda}{2^n} + \dots,$$

где p_0 — целое число, а $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ — двоичные знаки, т. е. либо $p_k = 0$, либо $p_k = 1$. Если двоичная дробь конечна, пусть, например, $p_n \neq 0$, но $p_{n+1} = p_{n+2} = \dots = 0$, то x есть число вида $\frac{m}{2^n}\lambda$, и для этого случая утверждение доказано.

Предположим, что двоичная дробь бесконечна; положим:

$$x_n = p_0\lambda + \frac{p_1}{2}\lambda + \dots + \frac{p_n}{2^n}\lambda.$$

Имеем: $\lim x_n = x$, и в силу непрерывности рассматриваемых функций (пункт 7° предыдущего параграфа) получим:

$$C(x) = \lim C(x_n) \quad \text{и} \quad C_1(x) = \lim C_1(x_n),$$

но так как

$$C(x_n) = C_1(x_n), \quad \text{то} \quad \lim C(x_n) = \lim C_1(x_n), \quad \text{т. е.} \quad C(x) = C_1(x).$$

Для функции $S(x)$ и $S_1(x)$ доказательство аналогичное.

Итак, доказываемые равенства имеют место при произвольных действительных значениях аргумента, ч. т. д.*

* Для доказательства $C(x) \equiv C_1(x)$ достаточно заметить, что значения аргумента $\frac{m\lambda}{2^n}$, при которых функции C и C_1 равны, образуют всюду плотное в интервале $(-\infty, +\infty)$ множество. Из общей теоремы теории функций следует, что при этом условии две непрерывные в интервале $(-\infty, +\infty)$ функции $C(x)$ и $C_1(x)$ тождественны в этом интервале.

П р и м е ч а н и е.

Если при двух различных значениях $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_2$ существуют системы функций

$$C_{\lambda_1}(x), S_{\lambda_1}(x) \text{ и } C_{\lambda_2}(x), S_{\lambda_2}(x),$$

то эти системы различны. Это следует хотя бы из того, что при $\lambda_1 < \lambda_2$ имеем: $C_{\lambda_2}(\lambda_1) > 0$, тогда как $C_{\lambda_1}(\lambda_1) = 0$.

Теорема. Если при некотором значении $\lambda = \lambda_0$ существует соответствующая система функций:

$$C_{\lambda_0}(x) \text{ и } S_{\lambda_0}(x),$$

удовлетворяющая условиям I — IV, то при произвольном $\lambda > 0$ существует единственная система функций $C_\lambda(x)$ и $S_\lambda(x)$, удовлетворяющая условиям I — IV.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно применить преобразование периода, положив

$$C_\lambda(x) = C_{\lambda_0}\left(\frac{\lambda_0 x}{\lambda}\right); \quad S_\lambda(x) = S_{\lambda_0}\left(\frac{\lambda_0 x}{\lambda}\right).$$

В самом деле:

1. Областью определения функций C_λ и S_λ служит интервал $(-\infty, +\infty)$, так как функции C_{λ_0} и S_{λ_0} определены при произвольном действительном значении x .

II. Имеем:

$$\begin{aligned} C_\lambda(x-y) &= C_{\lambda_0}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}x - \frac{\lambda_0}{\lambda}y\right) = \\ &= C_{\lambda_0}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}x\right)C_{\lambda_0}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}y\right) + S_{\lambda_0}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}x\right)S_{\lambda_0}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}y\right) = \\ &= C_\lambda(x)C_\lambda(y) + S_\lambda(x)S_\lambda(y). \end{aligned}$$

III. Если: $0 < x < \lambda$, то $0 < \frac{\lambda_0}{\lambda}x < \lambda_0$, а потому

$$C_\lambda(x) = C_{\lambda_0}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}x\right) > 0 \quad \text{и} \quad S_\lambda(x) = S_{\lambda_0}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}x\right) > 0.$$

IV. Имеем:

$$C_\lambda(0) = C_{\lambda_0}(0) = 1; \quad S_\lambda(\lambda) = S_{\lambda_0}(\lambda_0) = 1.$$

Таким образом, система функций $C_\lambda(x)$, $S_\lambda(x)$ удовлетворяет всем условиям I—IV.

В силу теоремы единственности, никаких других функций $C_\lambda(x)$ и $S_\lambda(x)$, кроме $C_{\lambda_0}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}x\right)$ и $S_{\lambda_0}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}x\right)$, не может существовать ч. т. д.

§ 83. Различные конкретные определения тригонометрических функций

В аксиоматической теории особого рассмотрения требует вопрос о существовании объектов, удовлетворяющих данной системе аксиом. Так, в данном случае из рассуждений двух предыдущих параграфов не следует, что функции $C(x)$ и $S(x)$, удовлетворяющие заранее поставленным условиям I — IV, существуют. В изложенных выводах из аксиом I — IV мы не встретили противоречий, однако, быть может, эти противоречия встретятся при дальнейшем развитии теории, и тогда вся теория окажется несостоятельной. Существование функций $C(x)$ и $S(x)$ будет доказано, если будет сконструирована конкретная система функций, обладающая характеристическими свойствами I — IV. Тем самым будет установлена непротиворечивость условий I — IV. Построить функции $S(x)$ и $C(x)$ можно различными способами. Ниже указаны наиболее распространенные способы этого построения.

I. Геометрическая теория. Эта теория была изложена в главе I. Косинус и синус, определенные геометрически, суть функции $C_{\frac{\pi}{2}}(x)$ и $S_{\frac{\pi}{2}}(x)$:

$$\cos x = C_{\frac{\pi}{2}}(x), \quad \sin x = S_{\frac{\pi}{2}}(x);$$

функции $C_{\lambda}(x)$ и $S_{\lambda}(x)$ суть:

$$C_{\lambda}(x) = \cos \frac{\pi}{2\lambda} x, \quad S_{\lambda}(x) = \sin \frac{\pi}{2\lambda} x.$$

В силу теоремы единственности, никаких других функций, удовлетворяющих условиям I — IV, не существует.

В параметрическом представлении окружности:

$$x = \cos t, \quad y = \sin t$$

параметр t есть длина дуги, отложенной от начальной точки $A(1, 0)$ до точки $M(x, y)$, соответствующей значению параметра t . Если $\lambda \neq \frac{\pi}{2}$, то в параметрическом представлении окружности:

$$x = \cos_{\lambda} t, \quad y = \sin_{\lambda} t, \quad \text{т. е. } x = \cos \frac{\pi}{2\lambda} t, \quad y = \sin \frac{\pi}{2\lambda} t,$$

длина s дуги AM равна $s = \frac{\pi}{2\lambda} t$, откуда $t = \frac{2\lambda}{\pi} s$, т. е. *параметр пропорционален длине дуги AM с коэффициентом пропорциональности, отличным от 1.*

II. Определение тригонометрических функций как степенных рядов.

В этой теории, изложенной в § 79, при помощи степенных рядов строятся функции $C_{\frac{\pi}{2}}(x) = \cos x$ и $S_{\frac{\pi}{2}}(x) = \sin x$.

III. Тригонометрические функции как решения линейного дифференциального уравнения. Тригонометрические функции можно определить как частные решения некоторого линейного дифференциального уравнения второго порядка, при этом их свойства можно установить на основании общих теорем теории дифференциальных уравнений.

Рассмотрим следующее линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0. \quad (1)$$

Согласно общим теоремам теории дифференциальных уравнений, существуют два частных решения $C(x)$ и $S(x)$ уравнения (1), удовлетворяющие следующим начальным условиям*:

$$C(0) = 1, \quad C'(0) = 0, \quad S(0) = 0, \quad S'(0) = 1.$$

Функции $C(x)$ и $S(x)$ линейно независимы, так как начальное значение вронскиана отлично от нуля:

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} C(0) & S(0) \\ C'(0) & S'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

а потому общее решение уравнения (1) можно представить в виде

$$y = c_1 C(x) + c_2 S(x),$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные. Функции $C(x)$ и $S(x)$ непрерывны в интервале $(-\infty, +\infty)$.

Следовательно, эти функции удовлетворяют первому характеристическому условию I, присущему аналитическим косинусу и синусу (см. § 81).

Дифференциальное уравнение (1) можно заменить системой линейных уравнений

$$\frac{dy}{dx} = z, \quad \frac{dz}{dx} = -y \quad (2)$$

с постоянными коэффициентами. Существует единственное решение этой системы

$$y = y(x), \quad z = z(x),$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0) = 0, \quad z(0) = 1.$$

Функция $y(x)$ [в силу способа составления системы (2)] удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) и начальным условиям

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = z(0) = 1.$$

Следовательно,

$$y(x) = S(x). \quad (3)$$

* В данном рассуждении функции $C(x)$ и $S(x)$ (пока) никак не связываются с тригонометрическими функциями.

Функция $z(x)$ также удовлетворяет уравнению (1)

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dz}{dx} \right) = \frac{d(-y)}{dx} = -\frac{dy}{dx} = -z$$

и начальным условиями

$$z(0) = 1, \quad z'(0) = -y(0) = 0,$$

а потому

$$z(x) = C(x). \quad (4)$$

Итак, в силу системы (2), имеем

$$S'(x) = C(x), \quad C'(x) = -S(x).$$

Умножив первое уравнение (2) на y , а второе на z и сложив, получим:

$$y \frac{dy}{dx} + z \frac{dz}{dx} \equiv 0 \quad \text{или} \quad \frac{d}{dx} (y^2 + z^2) \equiv 0,$$

откуда

$$y^2(x) + z^2(x) = \text{const.}$$

Положив (в частности) $y = C(x)$, $z = S(x)$, получим:

$$C^2(x) + S^2(x) = \text{const.}$$

но при $x = 0$ значение левой части равно 1. Следовательно, имеет место тождество:

$$C^2(x) + S^2(x) \equiv 1. \quad (5)$$

Следствие. Функции $C(x)$ и $S(x)$ ограничены.

Пусть ξ — произвольное действительное число; функция:

$$f(x) = C(x - \xi)$$

(при данном ξ) удовлетворяет уравнению (1). В самом деле,

$$f'(x) = C'(x - \xi) = -S(x - \xi),$$

$$f''(x) = S'(x - \xi) = -C(x - \xi),$$

а потому

$$f''(x) + f(x) = C(x - \xi) - C(x - \xi) \equiv 0.$$

Следовательно, функция $f(x)$ при некоторых значениях c_1 и c_2 содержится в общем решении (y) уравнения (1):

$$C(x - \xi) = c_1 C(x) + c_2 S(x). \quad (6)$$

Продифференцируем последнее равенство

$$C'(x - \xi) = c_1 C'(x) + c_2 S'(x) = -c_1 S(x) + c_2 C(x) \dots \quad (7)$$

и положив в равенствах (6) и (7) $x = \xi$, получим:

$$c_1 C(\xi) + c_2 S(\xi) = 1;$$

$$-c_1 S(\xi) + c_2 C(\xi) = 0,$$

откуда (принять во внимание (5)), получим:

$$c_1 = C(\xi), \quad c_2 = S(\xi).$$

Равенство (6) примет следующий вид:

$$C(x - \xi) = C(x)C(\xi) + S(x)S(\xi).$$

Последнее равенство есть тождество, так как x и ξ — произвольные числа.

С л е д с т в и е. Для функций $C(x)$ и $S(x)$ удовлетворяется условие II, которым обладают аналитические косинус и синус.

Теорема. Существует положительные значения аргумента x , при которых функция $C(x)$ обращается в нуль.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное, что $C(x) \neq 0$ при произвольном значении $x > 0$. Тогда $C(x) > 0$ в интервале $(0, +\infty)$. В самом деле, если бы существовало значение x_1 , при котором $C(x_1) < 0$, то (в силу непрерывности) в промежутке, ограниченном точками $x = 0$ и $x = x_1$, существовала бы точка ξ (по крайней мере одна), в которой $C(\xi) = 0$ (ибо $C(x_1) < 0$, а $C(0) = 1 > 0$), что противоречит предположению.

Так как $S'(x) = C(x) > 0$, то функция $S(x)$ возрастает. Следовательно, $S(x) > 0$ при $x > 0$, ибо $S(0) = 0$ и $S(0) < S(x)$. Так как $S(x)$ — возрастающая положительная и ограниченная в интервале $(0, +\infty)$ функция, то существует конечный предел:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} S(x) = l_2 > 0.$$

Из тождества $C'(x) = -S(x)$ и неравенства $S(x) > 0$ следует, что $C'(x) < 0$, и значит $C(x)$ есть убывающая функция. Будучи убывающей и положительной (а потому ограниченной), функция $C(x)$ имеет предел в бесконечности:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} C(x) = l_1 \geq 0.$$

Рассмотрим разность

$$C(x+1) - C(x);$$

эта разность в бесконечности имеет предел равный 0:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [C(x+1) - C(x)] = l_1 - l_1 = 0.$$

Но, с другой стороны, применив теорему Лагранжа:

$$C(x+1) - C(x) = C'(\xi) = -S(\xi)$$

(где $x < \xi < x+1$), получим:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [C(x+1) - C(x)] = -\lim_{x \rightarrow \infty} S(\xi) = -l_2 < 0.$$

Следовательно, предположение, что функция $C(x)$ отлична от нуля при всех положительных значениях аргумента, привело к противоречию, откуда следует справедливость теоремы, ч. т. д.

Обозначим через λ наименьший положительный корень функции $C(x)^*$, тогда $C(\lambda) = 0$ и $C(x) > 0$ при $0 < x < \lambda$. В интервале $(0, \lambda)$ функция $S(x)$ возрастает (как имеющая положительную производную) и $S(0) = 0$, а потому $S(\lambda) > 0^{**}$:

$$S(\lambda) = \lim_{x \rightarrow \lambda} S(x) > 0.$$

Положив $x = \lambda$ в тождестве $C^2(x) + S^2(x) = 1$, получим $S(\lambda) = 1$. Итак, имеем

$$C(0) = S(\lambda) = 1$$

и в интервале $(0, \lambda)$ функции $C(x)$ и $S(x)$ положительны.

Следовательно, эти функции удовлетворяют характеристическим условиям III — IV.

Функции $C(x)$ и $S(x)$, как удовлетворяющие условия I — IV, суть аналитический косинус и аналитический синус:

$$C(x) = C_\lambda(x), \quad S(x) = S_\lambda(x).$$

Докажем, что $\lambda = \frac{\pi}{2}$. Рассмотрим параметрические уравнения окружности (см. стр. 495):

$$x = C_\lambda(t), \quad y = S_\lambda(t), \quad \text{где } 0 < t < 4\lambda.$$

Вычислим длину дуги σ с началом в точке $A(1, 0)$, соответствующей значению параметра $t = 0$, и с концом в точке $M(x, y)$, соответствующей произвольному значению параметра t . Имеем:

$$\begin{aligned} \sigma &= \int_0^t \sqrt{[C'_\lambda(t)]^2 + [S'_\lambda(t)]^2} dt = \\ &= \int_0^t \sqrt{[-S_\lambda(t)]^2 + [C_\lambda(t)]^2} dt = \int_0^t dt = t. \end{aligned}$$

Следовательно, $C_\lambda(t)$ и $S_\lambda(t)$ суть абсцисса и ордината конца дуги длины t единичной окружности, отложенной от точки A , а потому

$$C_\lambda(t) = \cos t; \quad S_\lambda(t) = \sin t.$$

При $t = \lambda$ имеем $\sigma = \lambda = \frac{\pi}{2}$.

* Наименьший положительный корень существует, так как множество точек, в которых непрерывная функция $C(x)$ обращается в нуль, замкнуто

** Значение $S(\lambda)$ есть предел возрастающей положительной в интервале $(0, \lambda)$ функций: $S(\lambda) = \lim_{x \rightarrow \xi} S(x)$.

IV. Определение тригонометрических функций при помощи обращения интегралов. В этой теории сначала определяются обратные тригонометрические функции, а затем тригонометрические функции как им обратные.

В данной аналитической теории рассматривается функция, аргументом которой является верхний предел следующего интеграла

$$A_S(x) = \int_0^x \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Этот интеграл рассматривается (пока) вне связи с известными из элементарной математики тригонометрическими и обратными тригонометрическими функциями.

Областью определения подынтегральной функции является интервал $(-1, 1)$.

Оба несобственные интеграла $\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ и $\int_{-1}^0 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ сходятся*. Таким образом, областью определения функции $A_S(x)$ служит сегмент $[-1, 1]$. Обозначим $\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \lambda$ и введем в рас-

смотрение функцию $A_C(x) = \lambda - A_S(x) = \int_x^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$. Имеем $A_S(x) + A_C(x) = \lambda$.

Из общих теорем интегрального исчисления следует, что обе функции $A_S(x)$ и $A_C(x)$ непрерывны на сегменте $[-1, 1]$.

Так как подынтегральная функция положительна, то на сегменте $-1 \leq x \leq 1$ функция $A_S(x)$ возрастает, а функция $A_C(x)$ убывает. При этом первая возрастает от $\int_{-1}^0 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = -\lambda$ до λ , а вторая убывает от $\int_{-1}^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = 2\lambda$ до 0.

* Сходимость интегралов можно установить, применив степенной признак сходимости. Так, например, $\lim_{z \rightarrow 1} (1-z)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, следовательно, $\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ сходится.

Функция $y = A_S(x)$ как возрастающая и непрерывная на сегменте $[-1, 1]$ имеет обратную функцию

$$x = S(y),$$

непрерывную и возрастающую от -1 до 1 на сегменте $-\lambda \leq y \leq \lambda$.

Функция $y = A_C(x)$ имеет обратную функцию

$$x = C(y),$$

непрерывную и убывающую от 1 до -1 на сегменте $0 \leq y \leq 2\lambda$.

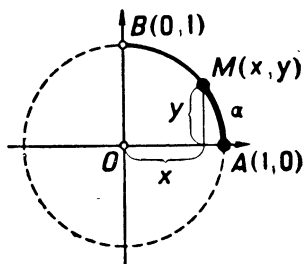
Будем рассматривать функции $S(\alpha)$ и $C(\alpha)$ совместно на сегменте $0 \leq \alpha \leq \lambda$.

Теорема. Функции $C(\alpha)$ и $S(\alpha)$ суть тригонометрические функции

$$C(\alpha) = \cos \alpha, \quad S(\alpha) = \sin \alpha,$$

рассматриваемые на сегменте $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

Доказательство. Рассмотрим первую четверть единичной окружности (черт. 179)



Черт. 279

$$y = \sqrt{1-x^2}, \quad \text{где } 0 \leq x \leq 1.$$

Вычислим длину дуги от точки $B(0, 1)$ до произвольной точки $M(x, y)$ (черт. 279), имеем

$$\begin{aligned} \widetilde{BM} &= \int_0^x \sqrt{1+y'^2} dx = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2} dx = \\ &= \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = A_S(x). \end{aligned}$$

Вычислим длину четверти окружности

$$\widetilde{BA} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lambda; \text{ итак, } \lambda = \frac{\pi}{2}.$$

Пусть α есть длина дуги AM , тогда

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \text{дуга } BM = \frac{\pi}{2} - A_S(x) = A_C(x) \text{ и } x = C(\alpha).$$

Вычислим длину α дуги AM следующим образом:

$$\alpha = \int_0^y \sqrt{1+x'^2} dy = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = A_S(y),$$

откуда $y = S(\alpha)$.

Итак, $C(\alpha)$ и $S(\alpha)$ суть абсцисса и ордината точки $M(x, y)$ единичной окружности, в которой оканчивается дуга α , отложенная от начальной точки $A(1, 0)$, ч. т. д.

С л е д с т в и е. *Функции A_S и A_C суть обратные тригонометрические функции:*

$$A_S(x) = \arcsin x, \quad A_C(x) = \arccos x.$$

При помощи интегрального представления функции $A_S(x)$ и $A_C(x)$ можно изучать аналитическими средствами свойства обратных им функций $C(x)$ и $S(x)$. Для примера установим аналитически теоремы сложения для тригонометрических функций.

Пусть $t = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$, тогда имеем:

$$\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{d(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

(элементарные выкладки опущены) или

$$d(\arcsin t) = d(\arcsin x) + d(\arcsin y),$$

откуда

$$\arcsin t = \arcsin x + \arcsin y + C,$$

где $C = \text{const}$; положив $x = y = 0$, получим $C = 0$. Итак,

$$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}).$$

Положим далее

$$\arcsin x = \alpha, \quad \text{тогда } x = S(\alpha), \quad \sqrt{1-x^2} = C(\alpha);$$

$$\arcsin y = \beta, \quad \text{тогда } y = S(\beta), \quad \sqrt{1-y^2} = C(\beta);$$

тогда получим

$$\alpha + \beta = \arcsin[S(\alpha)C(\beta) + C(\alpha)S(\beta)]$$

и наконец

$$S(\alpha + \beta) = S(\alpha)C(\beta) + C(\alpha)S(\beta) \quad (S_{\alpha+\beta})$$

эта формула выведена при условиях

$$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \alpha + \beta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Аналогично (при соответствующих условиях) выводятся остальные формулы сложения.

Функции $C(\alpha)$ и $S(\alpha)$ определены совместно *лишь на сегменте* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ и совпадают на этом сегменте с тригонометрическими функциями. Распространим функции $C(\alpha)$ и $S(\alpha)$ на все множество действительных чисел так, чтобы при этом сохранились формулы сложения $(C_{\alpha \pm \beta})$ и $(S_{\alpha \pm \beta})$.

Например, потребовав выполнения формулы $S(\alpha + \beta)$, положим $\beta = \frac{\pi}{2}$, тогда получим (формула приведения):

$$S\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = S(\alpha)C\left(\frac{\pi}{2}\right) + C(\alpha)S\left(\frac{\pi}{2}\right) = C(\alpha).$$

Этим равенством функция $S(x)$ распространяется на сегмент $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ (если $x = \alpha + \frac{\pi}{2}$, то $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$).

Положив $\alpha = 0$, $\beta = -\alpha$, получим $S(0 - \alpha) = S(0) \cdot C(\alpha) - C(0)S(\alpha) = -S(\alpha)$, т. е. $S(\alpha)$ есть нечетная функция и т. д.*.

Точно таким же условиям (в силу формул приведения) подчиняются тригонометрические функции $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$. Следовательно, $S(\alpha) = \sin \alpha$, $C(\alpha) = \cos \alpha$ в интервале $-\infty \leq \alpha \leq \infty$.

Примечание. При построении теории можно исходить из интеграла $A_T(x) = \int_0^x \frac{dz}{1+z^2}$. Несобственный интеграл

$\int_0^\infty \frac{dz}{1+z^2}$ сходится. Функция $A_T(x)$ определена на множестве всех действительных чисел. Функция $A_T(x)$ может служить средством аналитического определения арктангенса.

§ 84. О различных способах построения теории тригонометрических функций

Изложенная в § 81 аксиоматическая теория тригонометрических функций не предпринимает вопроса о том, какими средствами можно построить эти функции. Приняв за основные (характеристические) некоторые свойства данных функций, аксиоматическая теория устанавливает все прочие их свойства как следствия основных свойств и общих теорем алгебры, анализа, теории функций, *независимо от того или иного способа представления этих функций*. Теорема единственности доказывает, что различные способы задания тригонометрических функций равносильны, поскольку они не могут привести к различным функциям, обладающим данными характеристическими свойствами.

Из § 83 известно, что функции, обладающие характеристическими свойствами I — IV, могут быть построены различно: гео-

* Можно доказать (аналогичные рассуждения см., например, в учебнике Н. Рыбкина), что после указанного распространения тригонометрических функций теоремы сложения останутся в силе для произвольных α и β .

метрически, посредством степенных рядов как решения дифференциального уравнения, как обращения интегралов.

Существуют и другие способы построения теории тригонометрических функций (например, при помощи бесконечных произведений). В § 83 показано, что исследование свойств тригонометрических функций может производиться различными средствами в зависимости от способа их задания. Так, например, приняв за основу геометрическую теорию тригонометрических функций, можно вывести их разложения в степенные ряды, этот путь (при помощи формулы Тейлора) известен из общего курса математического анализа (а потому и не излагается в настоящем курсе). Напротив, если принять за основу представление тригонометрических функций при помощи степенных рядов, то можно установить (см. § 79), что эти функции имеют геометрическое толкование, принимаемое в геометрической теории в качестве их определения.

С точки зрения аксиоматической теории *различные способы определения тригонометрических функций суть лишь различные их конкретные интерпретации*. Для установления свойств тригонометрических функций, в зависимости от целесообразности, можно пользоваться какой-либо (безразлично, какой именно) одной или несколькими различными их интерпретациями.

Исторически аксиоматическая теория является завершающим этапом в развитии теории тригонометрических функций, и по своей сущности она не могла появиться прежде других теорий. Тригонометрия возникла из практических потребностей, вызвавших необходимость решать задачи на вычисление элементов геометрических фигур, а потому геометрическая теория исторически сложилась прежде других теорий.

Многообразные применения, которые получили тригонометрические функции в анализе, в геометрии, в механике, в физике и в других дисциплинах, обусловили возникновение различных путей построения теории этих функций. Аксиоматическая теория возникла в результате отвлечения от различных конкретных построений теории тригонометрических функций, в ней эти функции определяются посредством описания характеризующих их основных свойств (см. § 81, условия I — IV), не зависящих от способа их построения. При этом ясно, что перечень характеристических свойств возник на базе уже развитой теории тригонометрических функций.

В качестве аксиом, определяющих тригонометрические функции, могут быть приняты различные их свойства. Иными словами, *в основу теории тригонометрических функций может быть положена различная система аксиом, однако эта система не может быть установлена произвольно*.

В о п е р в ы х, *совокупность характеристических свойств не должна быть противоречивой*. Так, например, мы получили бы противоречивую систему аксиом, если бы к условиям I — IV присоединили какое-нибудь свойство, которым тригонометрические функ-

ции не обладают. Если бы мы, например, присоединили такое условие V:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} C(x) = +\infty,$$

то это условие находилось бы в противоречии с неравенством $|C(x)| \leq 1$, вытекающим из прочих аксиом (см. § 81, пункт 2°). Следовательно, не существует ни одной пары функций, удовлетворяющей условиям I — V. Непротиворечивость принятой системы аксиом решается (как это было отмечено выше) путем построения конкретной пары функций, для которой все аксиомы выполняются.

В о т о р ы х, система характеристических свойств (аксиом) должна быть полной, а именно ей не должны удовлетворять никакие две различные системы функций. Это свойство полноты имеет место в силу доказанной (см. § 82) теоремы единственности.

Если бы за основу теории принять непротиворечивую, но и неполную систему характеристических свойств, то кроме тригонометрических функций всеми этими свойствами обладали бы и некоторые другие функции. Такая аксиоматика не могла бы служить достаточным основанием для построения тригонометрии.

Две различные системы характеристических свойств, при помощи которых можно определить тригонометрические функции, должны быть эквивалентны. Пусть A и B — две различные эквивалентные системы аксиом, в таком случае, приняв за основу систему A , можно получить как следствия все свойства, перечисленные в системе B , и обратно, приняв за основу систему B , можно получить как следствия все свойства, перечисленные в системе A .

Примеры. Примем за основу следующие свойства функций $C(x)$ и $S(x)$: условия I, III и IV оставим без изменения, а свойство II заменим формулой сложения для синуса:

II' При всех значениях x и y имеет место тождество:

$$S(x+y) = S(x)C(y) + C(x)S(y).$$

Для простоты положим $\lambda = \frac{\pi}{2}$. Тригонометрические функции $\cos x$ и $\sin x$ удовлетворяют всем четырем условиям, I и II', III и IV. Докажем, что кроме тригонометрических функций всем перечисленным условиям удовлетворяют функции

$$C(x) = a^x \cos x \text{ и } S(x) = a^{x - \frac{\pi}{2}} \sin x.$$

Справедливость условий I, III и IV очевидна. В справедливости условия II убедимся проверкой:

$$\begin{aligned} S(x+y) &= a^{x+y - \frac{\pi}{2}} \sin(x+y) = \\ &= \left(a^{x - \frac{\pi}{2}} \sin x \right) (a^y \cos y) + (a^x \cos x) \left(a^{y - \frac{\pi}{2}} \sin y \right) = \\ &= S(x)C(y) + C(x)S(y). \end{aligned}$$

При различных значениях a соответствующие системы функций различны; при $a = 1$ получается тригонометрическая система. Таким образом, условиям I, II' III и IV удовлетворяет бесконечное множество систем функций, а потому эти условия не могут быть положены в основу аксиоматической теории тригонометрических функций.

2. Примем в качестве характеристических следующие свойства функций $C(x)$ и $S(x)$:

I'. Областью определения служит интервал $(-\infty, +\infty)$.

II'. Имеют место формулы сложения:

$$S(x+y) = S(x)C(y) + C(x)S(y);$$

$$C(x+y) = C(x)C(y) - S(x)S(y).$$

III'. Имеет место тождество

$$S^2(x) + C^2(x) = 1.$$

IV'. В промежутке $0 < x \leq \lambda$ функция $S(x)$ положительна

$$S(x) > 0.$$

V'.

$$C(0) = 1; \quad C(\lambda) = 0.$$

Свойства I'—V' суть следствия свойств I—IV, принятых в § 81 за основные. Докажем, что, приняв свойства I'—V' за основные, можно получить I—IV как следствия.

Свойства I и I' формулируются одинаково.

Положив в III' $x = 0$, получим

$$S^2(0) + C^2(0) = 1, \text{ откуда } S(0) = 0.$$

Положим в II' $y = -x$, тогда получим:

$$0 = S(x)C(-x) + C(x)S(-x);$$

$$1 = C(x)C(-x) - S(x)S(-x).$$

Из этой системы найдем:

$$S(-x) = -S(x), \quad C(x) = C(-x).$$

Следовательно, функция $C(x)$ четная, а функция $S(x)$ нечетная.

Заменив во втором тождестве II' y на $-y$ и воспользовавшись свойством четности и нечетности, получим

$$C(x-y) = C(x)C(y) + S(x)S(y).$$

Следовательно, выполняется условие II.

Положив в III' $x = \lambda$, получим $S^2(\lambda) = 1$, и так как (в силу IV') $S(\lambda) > 0$, то $S(\lambda) = 1$.

Следовательно, функции $C(x)$ и $S(x)$ удовлетворяют условиям IV.

Если значение x принадлежит интервалу $(0, \lambda)$, то этому же интервалу принадлежит значение $\lambda - x$, а потому $S(\lambda - x) > 0$. Имеем в интервале $(0, \lambda)$:

$$S(\lambda - x) = S(\lambda)C(x) - C(\lambda)S(x) = C(x) > 0.$$

Следовательно, условие III также выполняется.

Итак, из условий I'—V' вытекают условия I—IV.

Свойства I'—V', как эквивалентные условиям I—IV, могут быть приняты в качестве характеристических свойств тригонометрических функций.

Относительно независимости между собой условий I—IV заметим, что мы не имели в виду сформулировать минимальное число свойств, характеризующих тригонометрические функ-

ции. В выборе свойств I — IV мы руководствовались стремлением дать по возможности легко обозримую, симметричную и простую в применении систему аксиом. Число условий, содержащихся в аксиомах I — IV, можно уменьшить. Так, например, в условии III достаточно потребовать положительность лишь какой-либо одной из функций $C(x)$ и $S(x)$ в интервале $(0, \lambda)$. Потребуем, например, выполнение неравенства $C(x) > 0$; тогда неравенство $S(x) > 0$ можно вывести как следствие. В самом деле, достаточно принять во внимание, что при $0 < x < \lambda$ имеем также $0 < \lambda - x < \lambda$, а потому:

$$S(x) = C(\lambda - x) > 0.$$

При помощи задания характеристических свойств можно определять тригонометрические функции не только совместно, но и каждую по отдельности. В качестве примера рассмотрим аксиоматическое определение косинуса*.

Определение. Аналитическим косинусом называется функция $C(x)$

A) Непрерывная в интервале $(-\infty, +\infty)$;

B) Удовлетворяющая функциональному уравнению

$$C(x+y) + C(x-y) = 2C(x)C(y);$$

C) Существует наименьший и положительный корень λ уравнения

$$C(x) = 0, \text{ т. е. } C(\lambda) = 0, \text{ но } C(x) \neq 0, \text{ если } 0 < x < \lambda;$$

D) $C(0) > 0$.

С л е д с т в и я:

1°. Функция $C(x)$ положительна в интервале $(0, \lambda)$, ибо $C(0) > 0$ и $C(x) \neq 0$ в этом интервале.

2°. $C(0) = 1$. В самом деле, положим в B) $x = y = 0$:

$$2C(0) = 2C^2(0),$$

откуда, приняв во внимание условие D), получим $C(0) = 1$.

3°. Функция $C(x)$ четная. Положив в тождестве B) $x = 0$, получим

$$C(y) + C(-y) = 2C(y), \text{ откуда } C(-y) = C(y).$$

4°. Имеет место тождество

$$C(x+2\lambda) = -C(x).$$

В самом деле,

$$C(x+2\lambda) + C(x) = 2C(x+\lambda)C(\lambda) = 0.$$

Положив $x = 0$, получим $C(2\lambda) = -1$.

5°. Имеет место формула удвоения аргумента

$$C(2x) = 2C^2(x) - 1.$$

В самом деле,

$$C(2x) + 1 = C(2x) + C(0) = 2C^2(x).$$

6°. Имеет место формула деления аргумента пополам

$$C\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1+C(x)}{2}}.$$

Достаточно в предыдущем равенстве заменить x на $\frac{x}{2}$.

* См. Ю. М. Гайдук, Журнал «Математика в школе» № 4, 1953.

7°. Функция $C(x)$ ограничена

$$|C(x)| \leq 1.$$

Допустим противное, что при некотором значении $x = a$ имеем $|C(a)| > 1$, тогда (в силу тождества B)

$$2C(\lambda + a)C(\lambda - a) = C(2\lambda) + C(2a) = 2[C^2(a) - 1] > 0,$$

но с другой стороны

$$2C(\lambda - a)C(\lambda + a) = 2C(2\lambda - (\lambda + a))C(\lambda + a) = -2C^2(\lambda + a) \leq 0.$$

8°. Функция $C(x)$ периодическая, с наименьшим положительным периодом равным 4λ .

Во-первых, 4λ есть период, так как

$$C(x + 4\lambda) = C((x + 2\lambda) + 2\lambda) = -C(x + 2\lambda) = C(x).$$

Во-вторых, не существует положительного периода l , меньшего 4λ . Допустим противное, что такой период l существует; имеем:

$$C(l) = C(0 + l) = C(0) = 1$$

и

$$C(l) + C(0) = 2C^2\left(\frac{l}{2}\right), \text{ откуда } C\left(\frac{l}{2}\right) = \pm 1. \text{ Если } C\left(\frac{l}{2}\right) = 1, \text{ то}$$

$$\begin{aligned} 2C\left(\frac{2\lambda + \frac{l}{2}}{2}\right)C\left(\frac{2\lambda - \frac{l}{2}}{2}\right) &= -2C\left(2\lambda - \frac{2\lambda + \frac{l}{2}}{2}\right)C\left(\frac{2\lambda - \frac{l}{2}}{2}\right) = \\ &= -2C^2\left(\lambda - \frac{l}{4}\right). \end{aligned}$$

Но, с другой стороны,

$$2C\left(\frac{2\lambda + \frac{l}{2}}{2}\right)C\left(\frac{2\lambda - \frac{l}{2}}{2}\right) = C(2\lambda) + C\left(\frac{l}{2}\right) = 0,$$

значит, $C^2\left(\lambda - \frac{l}{4}\right) = 0$, что противоречит основному условию C).

Если $C\left(\frac{l}{2}\right) = -1$, то

$$0 = C\left(\frac{l}{2}\right) + C(0) = 2C^2\left(\frac{l}{4}\right),$$

откуда $C\left(\frac{l}{4}\right) = 0$, что также противоречит условию C.

9°. **Теорема единственности.** Не существует двух различных функций $C(x)$ и $C_1(x)$, удовлетворяющих (при данном λ) условиям A), B), C) и D).

Доказательство (с некоторыми несущественными изменениями) теоремы единственности, изложенное в § 82, остается в силе.

С л е д с т в и е. Функция $C_\lambda(x)$, определенная в § 81, удовлетворяет условиям A), B), C) и D), а потому не существует никакой другой функции, определяемой этими условиями:

$$C(x) = C_\lambda(x) = \cos \frac{\pi}{2\lambda} x.$$



ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ
НАД ПОЛЕМ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

В настоящей главе даны краткие (по возможности элементарные) сведения об элементарных трансцендентных функциях от комплексного аргумента. Всестороннее изучение элементарных функций над полем комплексных чисел является одной из задач теории аналитических функций и излагается в руководствах по этой дисциплине*. В нижеследующих параграфах основное внимание обращено на рассмотрение элементарных трансцендентных функций с точки зрения исследования тех их свойств, которые известны из элементарной алгебры и тригонометрии.

§ 85. Показательная функция над полем комплексных чисел
и ее связь с тригонометрическими функциями

В качестве одного из свойств, характеризующих показательную функцию, примем функциональное уравнение:

$$f(z_1 + z_2) = f(z_1)f(z_2), \quad (1)$$

которому (по условию) должна удовлетворять, эта функция при произвольных комплексных значениях z_1 и z_2 .

Будем искать функцию от комплексного аргумента, удовлетворяющую следующим условиям:

I. Функция $f(z)$ является целой трансцендентной функцией, т. е. она может быть представлена в виде суммы степенного ряда, сходящегося при всех (комплексных) значениях аргумента.

II. Функция $f(z)$ удовлетворяет функциональному уравнению (1) при произвольных комплексных значениях z_1 и z_2 .

* См. например, И. И. Привалов, Введение в теорию функций комплексного переменного или В. И. Смирнов, Курс высшей математики, том. III.

Для доказательства существования функции $f(z)$ построим степенной ряд, сумма которого удовлетворяет условиям I и II. Положим

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots;$$

этот ряд по условию I должен сходиться при всех значениях z . Вычислим отдельно левую и правую части равенства (I); имеем в левой части

$$f(z_1 + z_2) = a_0 + a_1(z_1 + z_2) + a_2(z_1 + z_2)^2 + \dots + a_n(z_1 + z_2)^n + \dots$$

Для вычисления правой части выполним умножение степенных рядов по общему правилу

$$f(z_1) = a_0 + a_1 z_1 + \dots + a_n z_1^n + \dots$$

$$f(z_2) = a_0 + a_1 z_2 + \dots + a_n z_2^n + \dots$$

Группа членов n -й степени ряда-произведения есть однородный многочлен

$$a_0 a_n z_1^n + a_1 a_{n-1} z_1^{n-1} z_2 + a_2 a_{n-2} z_1^{n-2} z_2^2 + \dots + a_n a_0 z_2^n.$$

По условию, эта группа членов при произвольном целом неотрицательном n должна быть тождественна многочлену

$$a_n (z_1 + z_2)^n = a_n z_1^n + a_n C_n^1 z_1^{n-1} z_2 + \dots + a_n C_n^k z_1^{n-k} z_2^k + \dots + a_n z_2^n.$$

Необходимые условия, которым должны удовлетворять искомые коэффициенты a_i , получим, приравняв соответственные коэффициенты в двух полученных выражениях для группы членов n -й степени (при $n = 0, 1, 2, \dots$). В частности, при произвольном n имеем $a_0 a_n = a_n$. По условию, ряд бесконечен (т. е. $a_n \neq 0$ для бесконечного множества значений n), поэтому $a_0 = 1$. Приравняв коэффициенты при $z_1^{n-1} z_2$, получим рекуррентную формулу:

$$n a_n = a_1 a_{n-1},$$

откуда

$$a_2 = \frac{a_1^2}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{3} a_1 a_2 = \frac{a_1^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \quad \text{и т. д.}$$

Допустим, что $a_{n-1} = \frac{a_1^{n-1}}{(n-1)!}$, тогда из соотношения $a_1 a_{n-1} = n a_n$

найдем $a_n = \frac{a_1^n}{n!}$. Таким образом, найдена единственно возможная система значений для коэффициентов искомого ряда.

Докажем, что ряд

$$1 + a_1 z + \frac{a_1^2}{2!} z^2 + \dots + \frac{a_1^n}{n!} z^n + \dots \quad (2)$$

удовлетворяет всем поставленным условиям.

Условие I выполнено, так как ряд (2) сходится при всех значениях z (достаточно, например, применить признак абсолютной сходимости Даламбера). Следовательно, сумма ряда (2) есть целая трансцендентная функция $f(z)$. Условие II выполнено, в чем можно убедиться, перемножив ряды:

$$f(z_1) = 1 + a_1 z_1 + \frac{(a_1 z_1)^2}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{(a_1 z_1)^n}{n!} + \dots$$

$$f(z_2) = 1 + a_1 z_2 + \frac{(a_1 z_2)^2}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{(a_1 z_2)^n}{n!} + \dots$$

Выполнив умножение, получим ряд с общим членом

$$\begin{aligned} \frac{(a_1 z_1)^n}{n!} + \frac{(a_1 z_1)^{n-1} a_1 z_2}{(n-1)! 1!} + \dots + \frac{(a_1 z_1)^{n-k} (a_1 z_2)^k}{(n-k)! k!} + \dots + \frac{(a_1 z_2)^n}{n!} = \\ = \frac{a_1^n (z_1 + z_2)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Сумма ряда-произведения есть значение суммы ряда (2) при

$$z = z_1 + z_2, \quad \text{ч. т. д.}$$

При различных значениях a_1 получаются различные функции, удовлетворяющие условиям I и II. Положив, в частности, $a_1 = 1$, получим функцию, которая обозначается символом $\exp z$:

$$\exp z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

Функция $\exp z$ действительна при всех действительных значениях $z = x$, непрерывна (как сумма всюду сходящегося степенного ряда) и удовлетворяет функциональному уравнению (1). Следовательно (см. «Специальный курс элементарной алгебры» § 110), функция $\exp z$, рассматриваемая над полем действительных чисел, является (над этим полем) показательной функцией

$$\exp x = a^x,$$

где

$$a = \exp 1 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

Сумма ряда $2 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$ есть число e — основание натуральных логарифмов, ибо, как известно из теории пределов:

$$e = \lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

Таким образом, при всех действительных x имеем

$$\exp x = e^x.$$

Изложенное выше служит мотивировкой следующего определения.

Определение. Показательной функцией e^z над полем комплексных чисел называется целая трансцендентная функция, определяемая формулой:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Пусть z — чисто мнимое число: $z = iy$; подставив в степенной ряд и отделив действительную и мнимую части, получим формулу:

$$\begin{aligned} e^{iy} &= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{y^{2n}}{2n!} + \dots \right) + \\ &+ i \left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{y^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \right) = \\ &= \cos y + i \sin y, \end{aligned}$$

дающую выражение показательной функции от чисто мнимого аргумента через тригонометрические функции.

Для показательной функции от произвольного комплексного аргумента $z = x + iy$ получим формулу:

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

При $z = \pm iy$ имеем:

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y, \quad e^{-iy} = \cos y - i \sin y. \quad (A)$$

Из этих последних формул получим выражение тригонометрических функций через показательную:

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}. \quad (B)$$

Формулы (A) и (B) называются формулами Эйлера — по имени великого ученого, члена Российской Академии наук Л. Эйлера (1707—1783).

Примеры.

$$1. \quad e^i = \cos 1 + i \sin 1.$$

$$2. \quad e^{1+i} = e (\cos 1 + i \sin 1).$$

$$3. \quad e^{\pi i} = \cos \pi + i \sin \pi = -1.$$

$$4. \quad e^{-i \frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2} = -i.$$

Основные свойства показательной функции.

1°. Показательная функция отлична от нуля при всех значениях z .

В самом деле, предположение $e^z = 0$ противоречит равенству

$$e^z \cdot e^{-z} = 1.$$

2°. Функция e^z — периодическая с мнимым периодом $l = 2\pi i$.
В самом деле

$$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z.$$

В частности, $e^{2k\pi i} = 1$, где k — произвольное целое число.

3°. Всякий период ω показательной функции e^z есть число, кратное $2\pi i$, т. е. $\omega = 2k\pi i$. В самом деле, если $\omega = \alpha + i\beta$ есть период показательной функции, то

$$e^\omega = e^{\alpha+i\beta} = e^\alpha (\cos \beta + i \sin \beta) = 1,$$

откуда

$$e^\alpha \cos \beta = 1, \quad e^\alpha \sin \beta = 0.$$

Следовательно, $\sin \beta = 0$ и $\beta = n\pi$. Из условия $e^\alpha \cos n\pi = 1$ получим: $e^\alpha = 1$, $\cos n\pi = 1$, а поэтому $\alpha = 0$, число $n = 2k$ — четное и $\omega = \alpha + i\beta = 2k\pi i$.

4°. Всякое комплексное число $z = a + bi$ можно представить в следующей показательной форме: $z = re^{i\varphi}$, где $r = |z|$, $\varphi = \arg z$, при этом аргумент φ определен с точностью до слагаемого, кратного $2\pi i$.

В самом деле, достаточно представить z в тригонометрической форме $z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi}$ (если $z = 0$, то $r = 0$, а в качестве φ может быть взято произвольное число).

5. О т о б р а ж е н и е , р е а л и з у е м о е п о к а з а т е л ь н о й ф у н к ц и е й . Пусть $w = e^z$; положим $z = x + iy$, $w = u + iv$, тогда

$$u + iv = e^x (\cos y + i \sin y) \text{ или } u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y.$$

Так как e^z — периодическая функция с периодом $2\pi i$, то достаточно рассмотреть ее лишь в полосе (замкнутой сверху):

$$-\infty < x < +\infty, \quad -\pi < y \leq \pi.$$

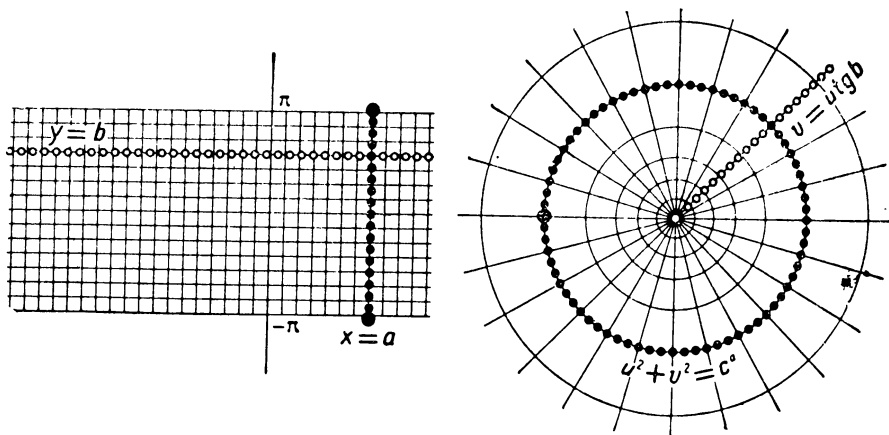
Положив $y = b$, где $-\pi < b \leq \pi$, получим

$$u = e^x \cos b, \quad v = e^x \sin b.$$

В плоскости UOV это суть параметрические уравнения луча $v = u \operatorname{tg} b$, проходящего через начало координат и образующего угол b с осью абсцисс. Таким образом, прямые, параллельные оси OX , отображаются на лучи, проходящие через начало координат плоскости w (само начало исключается, $w \neq 0$). Положив $x = a$, получим параметрические уравнения окружности:

$$u = e^a \cos y, \quad v = e^a \sin y, \quad \text{где } -\pi < y \leq \pi.$$

Таким образом, отрезки параллелей оси OY отображаются на окружности с центром в начале координат. Радиус окружности, соответствующей отрезку $x = a$, равен e^a , отрезкам, расположенным в правой полуплоскости (при $a > 0$), соответствуют окружности с радиусами, большими 1, а отрезкам, расположенным в левой полуплоскости (при $a < 0$), соответствуют окружности с радиусами, меньшими 1 (черт. 280).



Черт 280

Итак, декартова координатная сетка рассматриваемой полосы в плоскости z отображается на сетку полярных координат в плоскости w , а вся полоса отображается на полную плоскость w , из которой исключена точка $w = 0$ (черт. 280).

В силу периодичности показательной функции, каждая из полос:

$$-\infty < x < +\infty, \quad (2k-1)\pi < y \leq (2k+1)\pi$$

отображается на полную плоскость w с исключенной точкой $w = 0$.

§ 86. Тригонометрические функции от комплексного аргумента

Определение. Тригонометрическими функциями $\cos z$ и $\sin z$ называются функции, заданные формулами:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \quad (1)$$

Областью определения этих функций служит множество всех комплексных чисел. В частности, если z — действительное число, то в силу формул Эйлера (стр. 512), функции, определенные равенствами (1), совпадают с тригонометрическими функциями от действительного аргумента.

Если показательные функции e^{iz} и e^{-iz} разложить в степенные ряды (по степеням z) и подставить в формулы (1), то получим разложения косинуса и синуса в степенные ряды:

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots; \quad \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

справедливые при произвольном комплексном значении z .

Из формул (1) следует, что равенства:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad \text{и} \quad e^{-iz} = \cos z - i \sin z$$

справедливы при произвольном комплексном значении z .

Примеры.

$$1 \quad \cos i = \frac{e^{i^2} + e^{-i^2}}{2} = \frac{e^{-1} + e}{2} = \frac{e^2 + 1}{2e},$$

$$\sin i = \frac{e^{i^2} - e^{-i^2}}{2i} = \frac{e - e^{-1}}{2} i = \frac{e^2 - 1}{2e} i.$$

$$\begin{aligned} 2 \quad \cos(1-i) &= \frac{e^{(1-i)i} + e^{-(1-i)i}}{2} = \frac{e^i \cdot e^{-i^2} + e^{-i} e^{i^2}}{2} = \\ &= \frac{e}{2} e^i + \frac{1}{2e} e^{-i} = \frac{e}{2} (\cos 1 + i \sin 1) + \frac{1}{2e} (\cos 1 - i \sin 1) = \\ &= \frac{e^2 + 1}{2e} \cos 1 + i \frac{e^2 - 1}{2e} \sin 1. \end{aligned}$$

Основные свойства тригонометрических функций.

1°. Теоремы сложения, имеющие место для тригонометрических функций от действительного аргумента, остаются в силе. Так, например:

$$\begin{aligned} \cos(z_1 - z_2) &= \frac{e^{i(z_1 - z_2)} + e^{-i(z_1 - z_2)}}{2} = \frac{e^{iz_1} e^{-iz_2} + e^{-iz_1} e^{iz_2}}{2} = \\ &= \frac{(\cos z_1 + i \sin z_1)(\cos z_2 - i \sin z_2) + (\cos z_1 - i \sin z_1)(\cos z_2 + i \sin z_2)}{2} = \\ &= \cos z_1 \cos z_2 + \sin z_1 \sin z_2. \end{aligned}$$

Аналогично можно вывести остальные теоремы сложения.

Примечание. Теоремы сложения можно вывести путем непосредственного умножения рядов (рассуждения, изложенные на стр. 478 и 479 остаются в силе).

2°. Из формул (1) следуют тождества:

$$\cos(-z) = -\cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z, \quad \sin^2 z + \cos^2 z = 1.$$

3°. Функции $\cos z$ и $\sin z$ неограничены во всей комплексной плоскости*.

Рассмотрим, например, функцию $\cos z$ на мнимой оси; имеем

$$\cos iy = \frac{e^{-y} + e^y}{2} \quad \text{и} \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \cos iy = +\infty.$$

4°. Из теоремы сложения (так же, как в § 16) можно вывести формулы приведения.

5°. Функции $\sin z$ и $\cos z$ — периодические с действительным периодом, равным 2π . Так, например:

$$\cos(z + 2\pi) = \frac{e^{zi} e^{2\pi i} + e^{-iz} e^{-2\pi i}}{2} = \frac{e^{zi} + e^{-iz}}{2} = \cos z.$$

Всякий период синуса и косинуса есть число $2k\pi$, кратное 2π . Так, например, если $\omega = \alpha + i\beta$ есть период косинуса, то

$$\cos \omega = \cos 0 = 1, \quad \text{откуда} \quad e^{2\omega i} - 2e^{\omega i} + 1 = 0,$$

значит, $e^{i\omega} = 1$ или (см. стр. 513) $i\omega = 2k\pi i$, т. е. $\omega = 2k\pi$.

6°. Функция $\cos z = \cos(x + iy)$ действительна на действительной оси $y = 0$ и на прямых $x = k\pi$; во всех прочих точках z косинус имеет мнимые значения.

Доказательство. Отделив действительную и мнимую части косинуса, получим:

$$\begin{aligned} \cos z = \cos(x + iy) &= \frac{e^{(x+iy)i} + e^{(-x-iy)i}}{2} = \frac{e^{-y} e^{ix} + e^y e^{-ix}}{2} = \\ &= \frac{e^{-y} (\cos x + i \sin x) + e^y (\cos x - i \sin x)}{2} = \\ &= \cos x \frac{e^y + e^{-y}}{2} - i \sin x \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y^{**}. \end{aligned}$$

Значения $\cos z$ действительны в том и только в том случае, если

$$\text{либо } \sin x = 0, \quad \text{либо } \frac{e^y - e^{-y}}{2} = 0,$$

а потому, в силу известных свойств синусов от действительного аргумента:

$$\text{либо } x = k\pi, \quad \text{либо } e^y = e^{-y}, \quad \text{откуда } y = 0, \quad \text{ч. т. д.}$$

* Неограниченность тригонометрических функций вытекает также из общих теорем теории аналитических функций о целых трансцендентных функциях.

** Как известно, функции $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ и $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ называются гиперболическим косинусом и гиперболическим синусом и обозначаются так: $\operatorname{ch} x$ и $\operatorname{sh} x$.

Из формулы

$$\sin z = \cos \left(z + \frac{\pi}{2} \right)$$

следует, что значения $\sin z$ действительны на действительной оси $y = 0$ и на прямых $x = k\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{2k-1}{2}\pi$.

Найдем, в частности, все комплексные значения $z = x + iy$, при которых $\cos z = 0$. Эти значения находятся из системы уравнений:

$$\cos x \operatorname{ch} y = 0, \quad \sin x \operatorname{sh} y = 0.$$

Так как $\operatorname{ch} y > 0$, то из первого уравнения найдем $\cos x = 0$ и $x = \frac{2k+1}{2}\pi$. Из второго уравнения найдем $\operatorname{sh} y = 0$, откуда $e^y = e^{-y}$ или $y = 0$. Следовательно, $z = \frac{2k+1}{2}\pi$. Итак, уравнение $\cos z = 0$ не имеет мнимых корней.

Чтобы найти все значения z , при которых $\sin z = 0$, достаточно решить уравнение:

$$\cos \left(z + \frac{\pi}{2} \right) = 0, \quad \text{откуда} \quad z + \frac{\pi}{2} = \frac{2k+1}{2}\pi \quad \text{и} \quad z = k\pi.$$

7°. Об отображении, реализуемом тригонометрическими функциями. Ограничимся рассмотрением функции $\cos z$. Положив

$$w = u + iv = \cos z,$$

получим (см. предыдущий пункт)

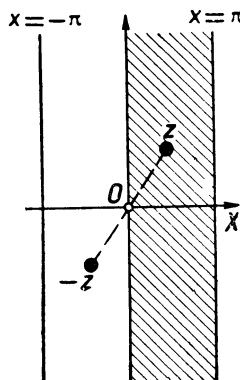
$$u = \cos x \operatorname{ch} y, \quad v = -\sin x \operatorname{sh} y.$$

В силу периодичности, достаточно рассмотреть функцию $\cos z$ лишь в полосе $-\pi \leq x \leq \pi$. В силу свойства четности $\cos z = \cos(-z)$, точки z и $-z$, симметричные относительно начала координат плоскости XOY , отображаются в одну и ту же точку w плоскости UOV (черт 281), поэтому достаточно рассмотреть $\cos z$ лишь в полосе $0 \leq x \leq \pi$.

При $x = 0$ имеем

$$u = \operatorname{ch} y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}, \quad v = 0.$$

В промежутке $-\infty < y \leq 0$ функция $\operatorname{ch} y$ убывает от $+\infty$ до 1, а в промежутке $0 \leq y < +\infty$ возрастает от 1 до $+\infty$, следовательно, мнимой оси OY соответствует



Черт. 281

в плоскости UOV луч (дважды покрытый) действительной оси:

$$1 \leq u < +\infty, \quad v = 0.$$

При $x = \pi$ имеем:

$$u = -\operatorname{ch} y, \quad v = 0.$$

Аналогично докажем, что прямой $x = \pi$ соответствует луч (дважды покрытый) действительной оси

$$-\infty < u \leq -1, \quad v = 0.$$

Отрезку $y = c$, $0 \leq x \leq \pi$, где $c \neq 0$, параллельному действительной оси, соответствует линия

$$u = \operatorname{ch} c \cos x, \quad v = -\operatorname{sh} c \sin x,$$

это есть дуга эллипса

$$\frac{u^2}{\operatorname{ch}^2 c} + \frac{v^2}{\operatorname{sh}^2 c} = 1,$$

соответствующая сегменту $0 \leq x \leq \pi$. При $c > 0$ имеем $v < 0$, а при $c < 0$ имеем $v > 0$; следовательно, при $c > 0$ получается нижняя, а при $c < 0$ — верхняя половина эллипса. При $c = 0$ эллипс вырождается в отрезок действительной оси: $-1 \leq u \leq 1$, $v = 0$. Прямой $x = c$, где $0 \leq c \leq \pi$ и $c \neq \frac{\pi}{2}$, параллельной мнимой оси, соответствует линия

$$u = \cos c \operatorname{ch} y, \quad v = -\sin c \operatorname{sh} y,$$

где $-\infty < y < +\infty$, это есть ветвь гиперболы

$$\frac{u^2}{\cos^2 c} - \frac{v^2}{\sin^2 c} = 1^*.$$

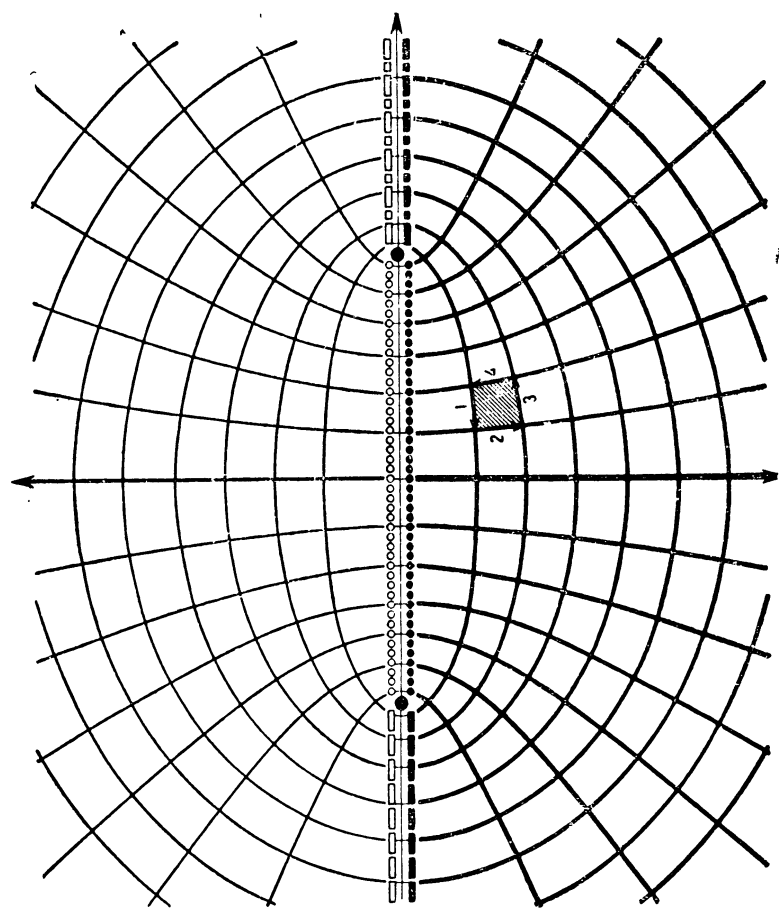
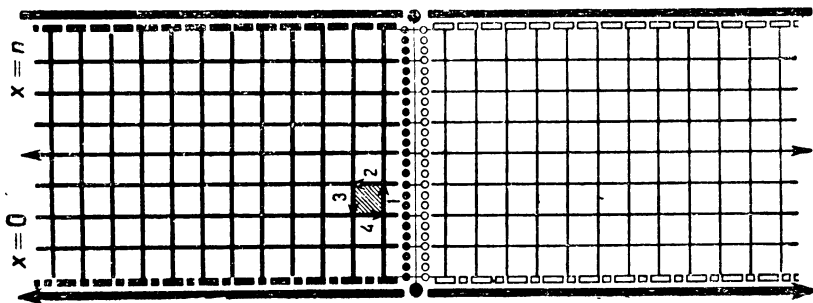
При этом, если $0 < c < \frac{\pi}{2}$, то получается правая ветвь, ибо $u > 0$, если же $\frac{\pi}{2} < c < \pi$, то получается левая ветвь, ибо $u < 0$. Если $c = \frac{\pi}{2}$, то гипербола вырождается в мнимую ось $u = 0$. Таким образом, декартова координатная сетка рассматриваемой полосы отображается на семейство эллипсов и гипербол, имеющих (как трудно проверить) фокусы в точках ± 1 (черт. 282).

Функция $\operatorname{tg} z$ определяется формулой;

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}.$$

* Принять во внимание тождество:

$$\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y \equiv \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2} \right)^2 \equiv 1.$$



Тангенс имеет смысл при всех значениях z , отличных от корней уравнения $\cos z = 0$, т. е. от чисел $z = \frac{2k+1}{2}\pi$.

Теоремы сложения для тангенса устанавливаются обычным способом.

Тангенс есть периодическая функция; всякий ее период кратен π . В самом деле, чтобы число ω было периодом тангенса, необходимо и достаточно наличия тождества

$$\operatorname{tg}(z + \omega) - \operatorname{tg} z = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\sin \omega}{\cos(z + \omega) \cos z} = 0,$$

откуда $\sin \omega = 0$ и $\omega = k\pi$.

Значения $\operatorname{tg} z$ действительны при действительных значениях z , а при мнимых z значения $\operatorname{tg} z$ мнимы. В самом деле, если $z = x + iy$, то

$$\operatorname{tg} z = \frac{1}{i} \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}} = \frac{1}{i} \frac{-\cos x \operatorname{sh} y + i \sin x \operatorname{ch} y}{\cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y}.$$

Приравняв нулю мнимую часть $\operatorname{tg} z$, получим (элементарные выкладки опускаем):

$$\cos^2 x \operatorname{sh} y \operatorname{ch} y + \sin^2 x \operatorname{sh} y \operatorname{ch} y = \operatorname{sh} y \operatorname{ch} y = 0.$$

Так как $\operatorname{ch} y > 0$, то $\operatorname{sh} y = 0$, откуда $y = 0$.

§ 87. Логарифмическая функция

Пусть $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ произвольное отличное от нуля комплексное число. По определению, натуральным логарифмом числа z называется число ω , удовлетворяющее уравнению

$$z = e^{\omega}. \quad (1)$$

Если $\omega = u + iv$, то имеем:

$$r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = e^u (\cos v + i \sin v),$$

откуда найдем:

$$e^u = r, \quad v = \varphi + 2k\pi$$

или

$$u = \ln r, \quad v = \varphi + 2k\pi \quad \text{и} \quad \omega = \ln r + (\varphi + 2k\pi)i, \quad (2)$$

где $\ln r$ — натуральный логарифм в поле действительных чисел, а k — произвольное целое число.

При $z = 0$ уравнение (1) не имеет решений, так как $e^{\omega} \neq 0$ при произвольном значении ω . Таким образом, число 0 не имеет логарифма.

Из формул (2) следует, что всякое отличное от нуля комплексное число имеет бесконечное множество логарифмов, значения которых составляет двустороннюю арифметическую прогрессию с мнимой разностью, равной $2\pi i$. Это объясняется периодичностью показательной

функции. Множество всех значений логарифма числа z будем обозначать так:

$$\operatorname{Ln} z = \ln r + (\varphi + 2k\pi)i = \ln |z| + i \arg z,$$

где под $\arg z$ подразумевается множество всех значений аргумента. Если для $\arg z$ выбирается вполне определенное значение в промежутке от $-\pi$ до π (или от 0 до 2π):

$$-\pi < \varphi \leq \pi \quad (\text{или} \quad 0 \leq \varphi < 2\pi),$$

то из множества всех чисел $\operatorname{Ln} z$ выделится значение, называемое **главным значением логарифма**

$$\ln z = \ln r + i\varphi, \quad \text{где} \quad r = |z| \quad \text{и} \quad -\pi < \varphi \leq \pi.$$

Множество всех чисел $\operatorname{Ln} z$ есть арифметическая прогрессия:

$$\dots, \ln z - 4\pi i, \ln z - 2\pi i, \ln z, \ln z + 2\pi i, \ln z + 4\pi i, \dots$$

Примеры. 1. Имеем:

$$\ln(-1) = \ln 1 + \pi i = \pi i;$$

$$\operatorname{Ln}(-1) = (2k + 1)\pi i.$$

2. Пусть a — произвольное отрицательное число; имеем:

$$|a| = -a, \quad \arg a = \pi + 2k\pi;$$

$$\ln a = \ln(-a) + \pi i$$

и

$$\operatorname{Ln} a = \ln(-a) + (2k + 1)\pi i.$$

$$3. \ln i = \ln 1 + i \frac{\pi}{2} = i \frac{\pi}{2}$$

и

$$\operatorname{Ln} i = \frac{(4k + 1)\pi i}{2}.$$

$$4. \ln(1 + i) = \ln \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right] = \frac{1}{2} \ln 2 + i \frac{\pi}{4}$$

$$\operatorname{Ln}(1 + i) = \frac{1}{2} \ln 2 + \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right) i.$$

Если z — положительное число, $z = a$, где $a > 0$, то $\varphi = 0$, а потому $\ln a$ совпадает со значением логарифма в поле действительных чисел, все прочие значения логарифма мнимые. Обратно, если главное значение $\ln z$ есть действительное число, то $\varphi = 0$, т. е. z есть положительное число. Следовательно, *действительные значения логарифма имеют лишь положительные числа.*

Основное свойство логарифма:

$$\operatorname{Ln} z_1 z_2 = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2 \quad (3)$$

остается в силе. При этом равенство (3) понимается в следующем смысле: *левая и правая его части обозначают одно и то же множество чисел.* В самом деле, пусть

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1); \quad z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2),$$

тогда

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)];$$

имеем

$$\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \ln(r_1 r_2) + (\varphi_1 + \varphi_2 + 2k\pi)i \quad (3')$$

и

$$\begin{aligned} \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2 &= [\ln r_1 + (\varphi_1 + 2k_1\pi)i] + [\ln r_2 + (\varphi_2 + 2k_2\pi)i] = \\ &= \ln r_1 + \ln r_2 + [(\varphi_1 + \varphi_2) + 2(k_1 + k_2)\pi]i. \end{aligned} \quad (3'')$$

В силу свойств логарифмов действительных чисел имеем

$$\ln(r_1 r_2) = \ln r_1 + \ln r_2.$$

Всякое число из множества чисел (3'') содержится в множестве (3'), ибо $k_1 + k_2$ есть целое число $k_1 + k_2 = k$. Обратно, всякое число из множества (3'') содержится в множестве (3'), так как произвольное целое число k можно (бесконечным множеством способов) разбить на два целых слагаемых $k = k_1 + k_2$. Итак, множества (3') и (3'') состоят из одних и тех же чисел. Аналогично доказывается равенство:

$$\operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2.$$

Примечание. Равенство

$$\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$$

имеет место не всегда, так как сумма $\varphi_1 + \varphi_2$ может выйти из промежутка $(-\pi, \pi]$, в котором выбираются главные значения аргументов. Если (в частности) z_1 и z_2 положительны, то это равенство справедливо, ибо тогда

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_1 + \varphi_2 = 0.$$

Равенство

$$\operatorname{Ln} z^m = m \operatorname{Ln} z,$$

вообще говоря, места не имеет. Рассмотрим случай натурального m . Пусть $z = r(\sin \varphi + i \cos \varphi)$, тогда:

$$z^m = r^m (\cos m\varphi + i \sin m\varphi)$$

и

$$\operatorname{Ln} z^m = m \ln r + (m\varphi + 2k\pi)i,$$

но

$$m \operatorname{Ln} z = m \ln r + m(\varphi + 2k_1\pi)i = m \ln r + (m\varphi + 2k_1 m\pi)i.$$

Всякое значение $m \operatorname{Ln} z$ содержится среди значений $\operatorname{Ln} z^m$, но значение $\operatorname{Ln} z^m$ содержится среди значений $m \operatorname{Ln} z$ лишь при значениях k , кратных m . Так, в частности

$$\operatorname{Ln}(-1) = \operatorname{Ln} i^2 = (2k + 1)\pi i,$$

но

$$2 \operatorname{Ln} i = 2 \left(\frac{\pi}{2} + 2k_1\pi \right) i = (4k_1 + 1)\pi i.$$

Следовательно, множество значений $m \operatorname{Ln} z$ составляет правильную часть множества $\operatorname{Ln} z^m$.

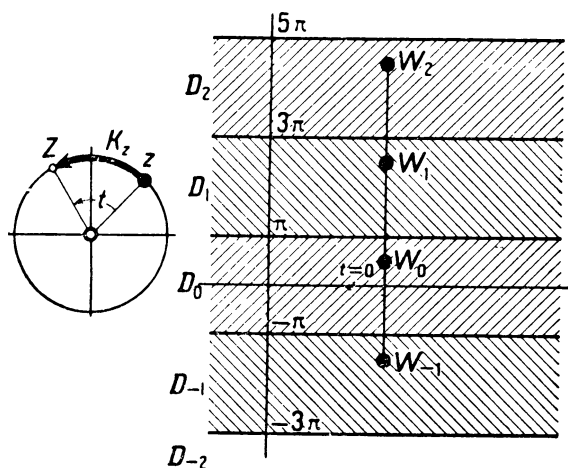
Логарифмическая функция

$$\omega = \operatorname{Ln} z = \ln r + (\varphi + 2k\pi)i = \ln r + i \arg z$$

есть бесконечнозначная функция от комплексного аргумента z . Всякому значению $z \neq 0$ соответствует бесконечное (счетное) множество значений ω_k , где

$$\omega_k = \omega_0 + 2k\pi i \quad \text{и} \quad \omega_0 = \operatorname{Ln} z.$$

Пусть $z \neq 0$ — некоторое значение аргумента; соответствующее значение ω_0 изображается точкой плоскости UOV , расположенной в полосе D_0 , определяемой неравенствами $-\pi < v \leq \pi$. Значение ω_k расположено в полосе $(2k-1)\pi < v \leq (2k+1)\pi$. Пусть $z \neq 0$ — данное комплексное число; возьмем в качестве $\arg z$ главное его значение.



Черт. 283

Рассмотрим окружность K_z (черт 283) радиуса $|z|$ с центром в начале координат. Положение произвольной точки Z этой окружности определяется центральным углом t , который будет отсчитывать от радиуса-вектора точки z . Сегменту $0 \leq t \leq 2\pi$ соответствует полная окружность, при этом концам сегмента $t = 0$ и $t = 2\pi$ соответствует одна и та же точка z . В качестве аргумента Z возьмем вполне определенное значение $\varphi + t$, где $0 \leq t \leq 2\pi$. На плоскости UOV точке z соответствует точка ω_0 , лежащая в D_0 , а точке Z — точка

$$\omega = \ln |Z| + i(\varphi + t);$$

значению $t = 0$ соответствует точка ω_0 в полосе D_0 , а значению $t = 2\pi$ — точка ω_1 в полосе D_1 , а всей рассматриваемой окружности соответствует отрезок, соединяющий точки ω_0 и ω_1 . Кратко принято

говорить так: если точка z , описав в плоскости XOY в положительном направлении окружность с центром в точке O , возвращается в первоначальное положение, то значение логарифма ω_0 переходит в значение ω_1 . Аналогично можно показать, что значение ω_k переходит в значение ω_{k+1} .

§ 88. Обратные тригонометрические функции от комплексного аргумента

Найдем множество всех значений аргумента z , при которых тригонометрическая функция $\cos z$ имеет данное значение ω

$$\cos z \quad \text{или} \quad \omega = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \quad (1)$$

Для вычисления z получим уравнение, квадратное относительно e^{iz} :

$$e^{2iz} - 2\omega e^{iz} + 1 = 0, \quad \text{откуда} \quad e^{iz} = \omega + \sqrt{\omega^2 - 1}.$$

Следовательно, для z получается бесконечное множество значений:

$$z = \frac{1}{i} \operatorname{Ln} (\omega + \sqrt{\omega^2 - 1})^*.$$

Уравнение (1) имеет решения относительно z при произвольном ω , так как $\omega + \sqrt{\omega^2 - 1} \neq 0$ ни при каком значении ω . В самом деле, уравнение $\omega = -\sqrt{\omega^2 - 1}$ имеет противоречивое следствие: $\omega^2 = \omega^2 - 1$.

Бесконечнозначная функция (меняем местами буквы z и ω)

$$\omega = \frac{1}{i} \operatorname{Ln} (z + \sqrt{z^2 - 1})$$

является обратной относительно функции $z = \cos \omega$ и обозначается символом:

$$\omega = \operatorname{Arc} \cos z = \frac{1}{i} \operatorname{Ln} (z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

Областью определения функции $\operatorname{Arc} \cos z$ служит множество всех комплексных значений z ; это находится в соответствии с тем фактом, что косинус (над полем комплексных чисел) может иметь произвольное комплексное значение.

Будем под символом $\sqrt{z^2 - 1}$ подразумевать одно какое-либо из двух значений радикала, тогда другое значение равно:

$$-\sqrt{z^2 - 1}.$$

* В этой формуле радикал рассматривается над полем комплексных чисел, он является двузначным символом, а потому двойной знак не ставится.

Из тождества

$$z - \sqrt{z^2 - 1} = \frac{1}{z + \sqrt{z^2 - 1}}$$

следует, что числа, находящиеся под знаком логарифма в выражении для $\text{Arc cos } z$, взаимно обратны. Следовательно, главные значения аргументов (взятые в пределах от $-\pi$ до π) чисел:

$$z + \sqrt{z^2 - 1} \quad \text{и} \quad z - \sqrt{z^2 - 1}$$

противоположны, если

$$\arg(z + \sqrt{z^2 - 1}) = \varphi, \quad (2)$$

где $-\pi < \varphi \leq \pi$, тогда

$$\arg(z - \sqrt{z^2 - 1}) = -\varphi.$$

Для определенности условимся значение радикала выбирать таким образом, чтобы при $0 \leq \varphi \leq \pi$ имела место формула (2). Иными словами, выбирается то значение радикала, при котором число $z + \sqrt{z^2 - 1}$ изображается точкой, расположенной в верхней (замкнутой) полуплоскости.

Если $z + \sqrt{z^2 - 1} = a$ есть действительное число, что возможно, если значение z действительно, $z = \frac{a^2 + 1}{2a}$, то под $\sqrt{z^2 - 1}$ будем подразумевать арифметическое значение радикала.

Все множество значений $\text{Arc cos } z$ можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \text{Arc cos } z &= \frac{1}{i} \text{Ln}(z \pm \sqrt{z^2 - 1}) = \begin{cases} \frac{1}{i} \text{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}) \\ \frac{1}{i} \text{Ln} \frac{1}{z + \sqrt{z^2 - 1}} \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{i} \text{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}) \\ \frac{1}{i} [\text{Ln } 1 - \text{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})] \end{cases} = -\frac{1}{i} \text{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}) + 2n\pi \end{aligned}$$

(ибо $\text{Ln } 1 = 2n\pi i$).

Но

$$\text{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}) = \ln|z + \sqrt{z^2 - 1}| + (\varphi + 2m\pi)i,$$

откуда

$$\text{Arc cos } z = \pm \frac{1}{i} (\ln|z + \sqrt{z^2 - 1}| + i\varphi) + 2k\pi$$

(полагаем $k = m \pm n$) и, наконец:

$$\operatorname{Arc} \cos z = \pm (\varphi - i \ln |z + \sqrt{z^2 - 1}|) + 2k\pi.$$

Значение $\operatorname{Arc} \cos z$, получающееся при $k = 0$ и при выборе знака $+$, называется главным значением арккосинуса и обозначается символом:

$$\arccos z = \varphi - i \ln |z + \sqrt{z^2 - 1}|;$$

значение $\arccos z$ расположено в полосе $0 \leq u \leq \pi$ плоскости UOV , ибо $u = \varphi$, где $0 \leq \varphi \leq \pi$.

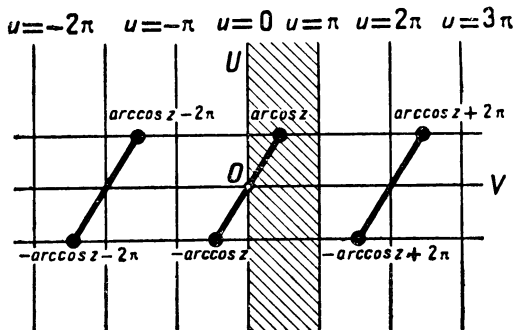
Все множество значений функции $\operatorname{Arc} \cos z$ определяется формулой

$$\operatorname{Arc} \cos z = \pm \arccos z + 2k\pi.$$

В этой формуле значение $-\arccos z$, противоположное главному значению, заключено в полосе $-\pi \leq u \leq 0$, а прочие значения арккосинуса получаются из этих двух прибавлением произвольного слагаемого $2k\pi$, кратного периоду косинуса (черт. 284).

Функция $\operatorname{Arc} \sin z$ определяется как обратная функция относительно $z = \sin w$. Решив относительно w уравнение

$$z = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i},$$



Черт. 284

получим

$$w = \operatorname{Arc} \sin z = \operatorname{Ln} [iz + \sqrt{1 - z^2}]. \quad (3)$$

Воспользовавшись формулой

$$\sin w = \cos \left(\frac{\pi}{2} - w \right) = z,$$

получим

$$\frac{\pi}{2} - w = \operatorname{Arc} \cos z$$

или

$$w = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arc} \cos w = \frac{\pi}{2} \pm \frac{1}{i} \operatorname{Ln} (z + \sqrt{z^2 - 1}). \quad (4)$$

П р и м е ч а н и е . Равенство (4) также можно получить из равенства (3) путем формальных преобразований (предоставляем это учащимся в виде упражнения).

Если взять главное значение арккосинуса, то получим однозначную функцию

$$\arcsin z = \frac{\pi}{2} - \arccos z,$$

называемую главным значением арксинуса. Так как значение $\arccos z$ заключено в полосу, ограниченную прямыми $u = 0$ и $u = \pi$, то значение $\arcsin z$ заключено в полосу, ограниченную прямыми

$$u = -\frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad u = \frac{\pi}{2} \quad (\text{черт. 285}).$$

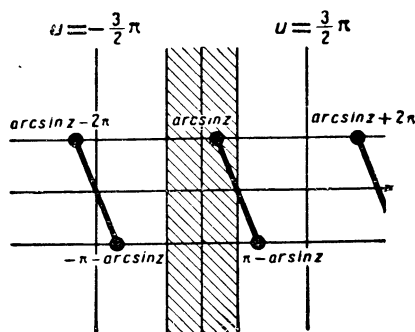
Если $z = x$ — действительное число, не превосходящее по абсолютной величине 1, то

$$|z + \sqrt{z^2 - 1}| = |x + i\sqrt{1 - x^2}| = 1.$$

Точка M с координатами

$$x, y = \sqrt{1 - x^2}$$

расположена на единичной окружности. Значение $\varphi = \arg(x + i\sqrt{1 - x^2})$ есть мера угла, образованного радиусом-вектором OM с осью абсцисс. Так как $\sqrt{1 - x^2} \geq 0$, то точка M лежит в верхней (замкнутой) полуплоскости. В рассматриваемом случае



Черт 285.

$$\arccos z = \arccos x = \varphi, \quad \text{где} \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

Таким образом, на отрезке действительной оси $-1 \leq x \leq 1$ $y = 0$ функция $\arccos z$ имеет геометрическую интерпретацию, которая в геометрической теории принимается в качестве определения этой функции. В этом случае (в частности) множество значений

$$\text{Arc} \cos x = \pm \arccos x + 2k\pi$$

есть множество всех решений простейшего тригонометрического уравнения

$$\cos w = x$$

(где w рассматривается в качестве неизвестного).

Аналогично, функция

$$\arcsin z = \frac{\pi}{2} - \arccos z$$

при $z = x$, где $-1 \leq x \leq 1$, имеет геометрическую интерпретацию, которая принимается за основу в геометрической теории.

Функция $\text{Arc tg } z$ определяется как обратная функция относительно

$$z = \text{tg } w = \frac{1}{i} \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}}.$$

Выразив w через z , получим:

$$w = \text{Arc tg } z = \frac{1}{2i} \text{Ln } \frac{1+iz}{1-iz} = \frac{1}{2i} \text{Ln } \frac{i-z}{i+z}.$$

Эта функция бесконечнозначная; областью ее определения служит множество всех комплексных чисел, неравных $\pm i$. При $z = \pm i$ арктангенс теряет смысл. Если $z = x$ — действительное число, то

$$|i-x| = |i+x| \quad \text{и} \quad \left| \frac{i-x}{i+x} \right| = 1;$$

в этом случае, как нетрудно проверить, значения $\text{Arc tg } z$ действительны.

Примеры.

1. Пусть $z = x$, где $|x| > 1$. В этом случае:

$$z + \sqrt{z^2 - 1} = x + \sqrt{x^2 - 1} \begin{cases} > 0 & \text{при } x > 1, \\ < 0 & \text{при } x < -1. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\varphi = \begin{cases} 0, & \text{если } x > 1, \\ \pi, & \text{если } x < -1, \end{cases}$$

а потому

$$\text{arc cos } x = \begin{cases} -i \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), & \text{если } x > 1, \\ \pi - i \ln(-x - \sqrt{x^2 - 1}), & \text{если } x < -1. \end{cases}$$

Так, например:

$$\text{arc cos } 2 = -i \ln(2 + \sqrt{3}), \quad \text{arc cos } (-2) = \pi - i \ln(2 - \sqrt{3});$$

$$\text{arc sin } 2 = \frac{\pi}{2} + i \ln(2 + \sqrt{3}), \quad \text{arc sin } (-2) = \frac{\pi}{2} + i \ln(2 - \sqrt{3}).$$

2. Положив $z = i$, получим:

$$z + \sqrt{z^2 - 1} = (1 + \sqrt{2})i, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно,

$$\text{arc cos } i = \frac{\pi}{2} - i \ln(1 + \sqrt{2}),$$

$$\text{arc sin } i = i \ln(1 + \sqrt{2}).$$

Тождества

$$\text{Arc sin } z = \text{Arc cos } \sqrt{1 - z^2}, \quad \text{Arc sin } z = \text{Arc tg } \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}};$$

$$\text{Arc sin } z_1 + \text{Arc sin } z_2 = \text{Arc sin } (z_1 \sqrt{1 - z_2^2} + z_2 \sqrt{1 - z_1^2})$$

и прочие аналогичные тождества, вытекающие из соотношений между тригонометрическими функциями и из теорем сложения, имеют место в том смысле, что правая и левая части каждого из этих тождеств представляют собой одно и то же множество чисел.

§ 89. Степенная, общая показательная и общая логарифмическая функции

Пусть

$$z = x + iy = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

(где $-\pi < \varphi \leq \pi$) — произвольное комплексное число.

Определение. Степенью числа $z \neq 0$ с показателем $a = \alpha + i\beta$ называется множество всех чисел, определяемых формулой:

$$z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}.$$

В частности, если $z = x > 0$, число $a = \alpha$ действительно и если берется главное значение логарифма $\operatorname{Ln} z$, то получим тождество

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x},$$

имеющее место над полем действительных чисел.

Рассмотрим следующие возможные случаи.

Случай 1°. $a = n$ — целое число.

В этом случае

$$\begin{aligned} z^n &= e^{n \operatorname{Ln} z} = e^{n (\ln z + 2k\pi i)} = e^{n (\ln \rho + i\varphi + 2k\pi i)} = e^{n \ln \rho} (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = \\ &= \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \end{aligned}$$

Таким образом, получается то же значение z^n , которое находится по формуле Муавра. В данном случае

$$\omega = z^n$$

есть однозначная степенная функция комплексного аргумента.

Случай 2°. $a = \frac{p}{q}$, где $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь и $q > 1$.

В этом случае имеем:

$$\begin{aligned} z^{\frac{p}{q}} &= e^{\frac{p}{q} \operatorname{Ln} z} = e^{\frac{p}{q} (\ln \rho + i\varphi + 2k\pi i)} = e^{\frac{p}{q} \ln \rho} e^{\frac{p(\varphi + 2k\pi)}{q} i} = \\ &= \rho^{\frac{p}{q}} \left(\cos \frac{(\varphi + 2k\pi)p}{q} + i \sin \frac{(\varphi + 2k\pi)p}{q} \right). \end{aligned}$$

Если, в частности, $p = 1$, то получим:

$$z^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{\rho} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{q} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{q} \right) = \sqrt[q]{z}.$$

Таким образом, значения $z^{\frac{p}{q}}$ суть значения комплексного радикала $\sqrt[q]{z}$. При произвольном p , взаимно простым с q , получим:

$$z^{\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[q]{z} \right)^p = \sqrt[q]{z^p}.$$

Таким образом, данное определение дробной степени комплексного числа совпадает с определением, принятым в алгебре (см. «Специальный курс элементарной алгебры», § 46).

Функция $w = z^{\frac{p}{q}}$ есть q -значная функция аргумента z .

С л у ч а й 3°. $z = \alpha$, где α — действительное иррациональное число. В этом случае

$$z^{\alpha} = \rho^{\alpha} [\cos(\alpha\varphi + 2k\pi\alpha) + i \sin(\alpha\varphi + 2k\pi\alpha)]. \quad (1)$$

Придавая k произвольные целые значения, получим бесконечное (счетное) множество значений иррациональной степени z^{α} . При различных k получаются различные значения z^{α} . В самом деле, если бы при $k = k_1$ и $k = k_2$ получились одинаковые значения z^{α} , то имело бы место равенство:

$$\alpha\varphi + 2k_1\pi\alpha = \alpha\varphi + 2k_2\pi\alpha + 2n\pi$$

(где n — некоторое целое число), но тогда, вопреки условию, $\alpha = \frac{n}{k_1 - k_2}$ было бы рациональным числом. Таким образом, функция

$$w = z^{\alpha}$$

является бесконечнозначной функцией комплексного аргумента z . Различные ветви этой функции получаются по формуле (1) при различных целых значениях k .

Рассмотрим, в частности, иррациональную степень отрицательного $z = -b$ (где $b > 0$). Имеем: $\rho = b$, $\varphi = \pi$. Следовательно:

$$(-b)^{\alpha} = b^{\alpha} [\cos(2k + 1)\alpha\pi + i \sin(2k + 1)\alpha\pi];$$

так как $(2k + 1)\pi\alpha \neq n\pi$ (где n — целое число, иначе α было бы рациональным), то все значения иррациональной степени отрицательного числа мнимы. По этой причине иррациональные степени отрицательных чисел над полем действительных чисел не рассматриваются.

С л у ч а й 4°. $a = \alpha + i\beta$ — мнимое число, $\beta \neq 0$. В этом случае

$$\begin{aligned} z^a &= e^{(\alpha + i\beta) [\ln \rho + (\varphi + 2k\pi)i]} = e^{\alpha \ln \rho - \beta (\varphi + 2k\pi)} \cdot e^{i [\beta \ln \rho + \alpha (\varphi + 2k\pi)]} = \\ &= \rho^{\alpha} e^{-\beta (\varphi + 2k\pi)} [\cos(\beta \ln \rho + \alpha\varphi + 2k\pi\alpha) + i \sin(\beta \ln \rho + \alpha\varphi + 2k\pi\alpha)]. \end{aligned}$$

Функция z^a при мнимом a — бесконечнозначная; при различных k получаются различные значения z^a , ибо значения модуля $|z^a| = |z|^a e^{-\beta(\varphi+2k\pi)}$ при различных k различны.

Примеры.

$$1. i^i = e^{i [\ln i + 2k\pi i]} = e^{i^2 \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right)} = e^{-\frac{4k+1}{2} \pi}.$$

Таким образом, все значения степени i^i действительны.

2. Найти общее выражение степени $1^{\alpha+i\beta}$.

$$\begin{aligned} \text{Имеем: } 1^{\alpha+i\beta} &= e^{(\alpha+i\beta) \operatorname{Ln} 1} = e^{2(\alpha+i\beta) k\pi i} = e^{-2\beta k\pi} \cdot e^{2\alpha k\pi i} = \\ &= \frac{1}{e^{k\pi\beta}} [\cos 2k\pi\alpha + i \sin 2k\pi\alpha]. \end{aligned}$$

В частности, при $\alpha = 0$ получим $1^{i\beta} = e^{2k\pi\beta}$ (заменяем k на $-k$, ибо k — произвольное целое число). Таким образом, все значения чисто мнимой степени единицы действительны.

Спределение. *Общей показательной функцией с произвольным комплексным основанием $a \neq 0$ называется функция, заданная формулой*

$$\omega = a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}.$$

Пусть $\rho = |a|$, а φ — главное значение аргумента a ; тогда имеем:

$$\omega = e^{z [\ln \rho + (\varphi + 2k\pi i)]}. \quad (2)$$

Следовательно, общая показательная функция является бесконечнозначной, при различных значениях k получаются различные ее ветви.

До настоящего времени символом e^z обозначалась однозначная функция, определенная как сумма степенного ряда

$$1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

или посредством формулы Эйлера

$$e^x (\cos y + i \sin y).$$

Однако, если в формуле (2) положить $a = e$, то символ e^z приобретет другой смысл, он будет обозначать бесконечнозначную функцию. Во избежание недоразумений (там, где они могут возникнуть) принято показательную функцию в первоначальном смысле обозначать символом:

$$\exp z = 1 + z + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots = \exp x (\cos y + i \sin y),$$

а символом e^z_* — общую показательную функцию при основании, равном e . В этом обозначении формулу (2) следует писать так:

$$\omega = a^z = \exp \{z [\ln \rho + (\varphi + 2k\pi i)]\},$$

и, в частности.

$$e^z = \exp \{z [\operatorname{Ln} e]\} = \exp [z (1 + 2k\pi i)].$$

Надо заметить, однако, что общая показательная функция с основанием e рассматривается редко.

Примеры:

1. Составить формулы для общей показательной функции при $a = 1$.
Имеем:

$$1^z = 1^{x+iy} = \exp (-2k\pi y) \cdot [\cos 2k\pi x + i \sin 2k\pi x].$$

При $k = 0$ получим ветвь этой функции, тождественно, равную 1. Прочие ветви функции 1^z мнимы и не являются постоянными.

2. Имеем:

$$\begin{aligned} i^z &= \exp \left\{ z \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) i \right\} = \\ &= \cos \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) z + i \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) z. \end{aligned}$$

Определение. Общим логарифмом $\operatorname{Log}_a N$ числа $N = t + in$ при основании $a \neq 0$ называется множество всех решений простейшего показательного уравнения

$$a^w = N.$$

Перепишем это уравнение так:

$$\exp (w \operatorname{Ln} a) = N,$$

откуда

$$w \operatorname{Ln} a = \operatorname{Ln} N \quad \text{и} \quad w = \operatorname{Log}_a N = \frac{\operatorname{Ln} N}{\operatorname{Ln} a}.$$

Пусть

$$a = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad N = R (\cos \Phi + i \sin \Phi),$$

тогда имеем

$$\operatorname{Log}_a N = \frac{\ln R + (\Phi + 2k\pi) i}{\ln \rho + (\varphi + 2l\pi) i}.$$

Таким образом, множество всех значений общего логарифма определяется формулой, содержащей два целочисленных параметра k и l .

Общая логарифмическая функция

$$w = \operatorname{Log}_a z = \frac{\operatorname{Ln} z}{\operatorname{Ln} a}$$

является бесконечнозначной.

Примеры.

1 При $a = e$ получим

$$\operatorname{Log}_e N = \frac{\operatorname{Ln} N}{\operatorname{Ln} e} = \frac{\operatorname{Ln} N}{1 + 2l\pi i}.$$

Таким образом, над полем комплексных чисел $\text{Log}_e N$ и $\text{Ln} N$ — не одно и то же. Значение $\text{Ln} N$ содержится (при $l = 0$) среди значений $\text{Log}_e N$.

2. Составить формулу для $\text{Log}_1 N$.

Решение. Имеем:

$$\text{Log}_1 N = \frac{\ln R + (\Phi + 2k\pi) i}{2l\pi i},$$

где l — произвольное целое число, отличное от 0, а k — произвольное целое число. Если $|N| = R = 1$, то значения $\text{Log}_1 N$ действительны.

3. Решить уравнение в поле комплексных чисел:

$$10^z = 100$$

Решение. Имеем:

$$z = \frac{\text{Ln } 100}{\text{Ln } 10} = \frac{2 \ln 10 + 2k\pi i}{\ln 10 + 2l\pi i}.$$

Значение z действительно, если $(2 \ln 10 + 2k\pi i)(\ln 10 - 2l\pi i)$ действительно, что будет иметь место, если

$$2k - 4l = 0,$$

откуда $k = 2l$, и тогда

$$z = \frac{2 \ln 10 + 4l\pi i}{\ln 10 + 2l\pi i} = 2.$$

4. Основание логарифмов отрицательно; найти условие, при котором положительное число A имеет хотя бы одно действительное значение логарифма.

Решение. Имеем:

$$\text{Log}_{-a} A = \frac{\ln A + 2k\pi i}{\ln a + (2l + 1)\pi i}.$$

Значение $\text{Log}_{-a} A$ действительно при условии если

$$(\ln A + 2k\pi i)[\ln a - (2l + 1)\pi i]$$

есть действительное число, откуда

$$2k \ln a - (2l + 1) \ln A = 0$$

и

$$\ln A = \frac{2k}{2l + 1} \ln a; \quad A = a^{\frac{2k}{2l + 1}} = {}^{2l+1}\sqrt{a^{2k}}.$$

Так, например:

$$\text{Log}_{-2} (4) = \frac{2 \ln 2 + 2k\pi i}{\ln 2 + (2l + 1)\pi i} = \frac{2(\ln 2 + k\pi i)}{\ln 2 + (2l + 1)\pi i};$$

действительное значение логарифма получится, если

$k\pi \ln 2 = (2l + 1)\pi \ln 2$, т. е. при $k = 2l + 1$, и тогда значение $\text{log}_{-2} (4)$ будет равно 2:

$$(-2)^2 = 4.$$

Число 3 при основании -2 не имеет действительных логарифмов

Итак, при отрицательном основании $-a$ действительные логарифмы имеют лишь те положительные числа, которые можно представить в виде степени a с показателем, равным дроби с четным числителем и нечетным знаменателем.



